MATEMATIKA GEHIPENA – LEHEN AZTERKETA PARTZIAL
2009ko URTARRILAK 22

- ***1. ARIKETA***

A) Izan bitez $0 < a < b$. Kalkula ezazu $f(t) = (\Pi_{2a} * \Pi_{2b})(t)$ funtzioaren adierazpen analitiko eta grafikoa.

(2 puntu)

B) Ondoriozta ezazu Π_{2a} funtzioaren Fourier transformatuaren adierazpena, eta kalkula ezazu $f_1(t) = (\Pi_2 * \Pi_4)(t)$-ren Fourier transformatua.

(puntu 1)

C) Aurreko emaitzetatik abiaturik, kalkula ezazu $\int_0^{\infty} \frac{\sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x}{x^3} dx$ integralaren balioa.

(2.5 puntu)

D) Izan bedi $\varphi(t)$ 4 periodoko funtzioa, $[-2,2]$ tartean $f_2(t) = (\Pi_2 * \Pi_2)(t)$-rekin bat datorrena. Kalkula ezazu $\varphi(t)$-ren Fourier garapena, ahalik eta sinplifikazio gehien eginez. Irudika ezazu $\varphi(t)$.

(2.5 puntu)

E) Kalkula ezazu $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$

(puntu 1)

F) Ebaluatu $\varphi(t)$ eta $f_2(t)$ hurrengo puntuetan: $t = -1/3$ eta $t = 725/3$.

(puntu 1)

OHARRA:

$$\int x \sin(\alpha x)\, dx = \frac{\sin(\alpha x)}{\alpha^2} - \frac{x \cos(\alpha x)}{\alpha} + K, \qquad \int x \cos(\alpha x)\, dx = \frac{\cos(\alpha x)}{\alpha^2} + \frac{x \sin(\alpha x)}{\alpha} + K$$

Denbora : ordu 1.

- ***2. ARIKETA***

A1) Ondoriozta ezazu $\cos z$ funtzio konplexuaren adierazpen binomikoa, eta froga ezazu $\cos z$-ren modulua funtzio mugaturik ez dela.

(2.5 puntu)

A2) Aurki eta irudika itzazu honako funtzio honen singulartasunak:

$$f(z) = \frac{1}{(1-\cos(iz+1)) \cdot (e^z + e^{-iz}) \cdot z^{1/3}} + \mathrm{Log}(i(z^2+1)),$$

argumentuaren determinazioa $\frac{5\pi}{2} < \theta \le \frac{9\pi}{2}$ izanik.

(4.5 puntu)

B) Kalkula ezazu $f(z)$ funtzioaren *z*-ren menpeko adierazpena, honako hau betetzen delarik:

$$\begin{cases} \mathrm{Im}(f(x+iy)) = e^x(y\cos y + x \sin y) + y + 1 \\ \mathrm{Re}[f(0)] = 1 \end{cases}.$$

Lor ezazu, ere, $\mathrm{Re}(f(x+iy))$ funtzio analitikoaren adierazpena, *x* eta *y*-ren menpekoa.

(3 puntu)

Denbora : ordu 1.

MATEMATIKA GEHIPENA – LEHEN AZTERKETA PARTZIAL
2009ko URTARRILAK 22

- ***3. ARIKETA***

A) Hartu aintzakotzat honako ekuazio hau: $z^3 + 5 - \sqrt{2}\, i = 0$. Eskatzen da:

A1) Ekuazioaren soluzio bat $z_1 = (1 + \sqrt{2}\, i)$ dela jakinik, irudika itzazu, **kalkulatu gabe,** ekuazioaren soluzio guztiak.

(puntu 1)

A2) Aurki ezazu z_2 eta z_3 beste bi soluzioen adierazpen binomikoa, ahalik eta era errazenean.

(1.5 puntu)

A3) Bedi C ekuazioaren hiru soluzioetatik igarotzen den zirkunferentzia, eta bedi C zirkunferentziari zirkunskribatzen zaion laukia Q , z_1 puntutik igarotzen dena. Kalkula itzazu era binomikoan Q laukiko zati irudikari handieneko eta txikieneko erpinak.

(2.5 puntu)

B1) Bedi $F(s) = \mathcal{L}\{f\}(s)$. Froga ezazu honako formula hau:

$$\mathcal{L}\{f'\}(s) = s \cdot F(s) - f(0),$$

beharrezkoak diren baldintzak enuntziatuz.

(1.5 puntu)

B2) Aurreko atala aplikatuz, lor ezazu $\mathcal{L}\{f''\}(s)$ -ri dagokion formula.

(puntu 1)

B3) Ebatz ezazu honako ekuazio diferentzial hau:

$$y''(t) + y(t) = 2e^t$$
$$\begin{cases} y(\pi/4) = e^{\pi/4} \\ y'(\pi/4) = e^{\pi/4} + \sqrt{2} \end{cases}$$

(2.5 puntu)

Denbora : ordu 1.