MATEMATIKA GEHIPENA – DEIALDI EZOHIKOA
2008ko IRAILAk 5

2. ARIKETA

A) A1) Irudika itzazu $[0, 2\pi]$ tartean honako garapen hauek, periodo txikienekoak direnak eta $(0, \pi/2)$ tartean $f(x) = \cos x$ funtzioarekin bat datozenak, kasu bakoitzean periodoa esplizituki adieraziz:

1. $\varphi_1(x)$: sinu eta kosinu seriezko garapena.
2. $\varphi_2(x)$: kosinu seriezko garapena.
3. $\varphi_3(x)$: sinu seriezko garapena.

Zein da $[0, \pi/2]$ tartean f(x)-rekin bat datorren eta gai eznulu gutxien dituen garapena? Zein(tzu) d(ir)a garapen horri dago(z)kion periodoa(k)?

(2 puntu)

A2) Kalkula itzazu $\varphi_2(x)$ -ri dagozkion Euler koefizienteak eta garapena bera.

Oharra:

$$\int_0^a \cos x \cdot \cos(b \cdot x)dx = \frac{b \cdot \cos a \cdot \sin(b \cdot a) - \cos(b \cdot a) \cdot \sin a}{b^2 - 1},$$

$$\int_0^a \cos x \cdot \sin(b \cdot x)dx = \frac{b - b \cdot \cos a \cdot \cos(b \cdot a) - \sin(b \cdot a) \cdot \sin a}{b^2 - 1}$$

(puntu 1)

B) Aintzakotzat hartu honako EDA sistema hau:

$$\begin{cases} x'(t) = -y(t) + H(t-a) \\ y'(t) = -x(t) + H(t-a) \end{cases},$$

hastapen baldintzak x(0) = 0 eta y(0) =0 direlarik, eta H(t-a) funtzioa, t=a puntuko maila unitate funtzioa izanik (a > 0). Lor ezazu sistemaren soluzioa Laplace-ren transformatua aplikatuz. Aipa itzazu pausu bakoitzean erabiltzen dituzun Laplace-ren transformatuaren propietate eta teoremak.

(3 puntu)

OHARRA:(C) ETA (D) ATALAK ORRIAREN BESTE ALDEAN DAUDE

<u>MATEMATIKA GEHIPENA – DEIALDI EZOHIKOA</u>
<u>2008ko IRAILAk 5</u>

C) C1) Izan bitez $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ eta $F(\omega)=\mathcal{F}\left[f(t)\right](\omega)$ bere Fourier transformatua. Arrazoituz, ondoriozta itzazu $\overline{f(t)}$ eta $f(t-t_0)$ funtzioen Fourier transformatuak, $F(\omega)$-ren funtziotan.

(puntu 1)

C2) Izan bedi $\Pi_T(t)=\begin{cases}0 & |t|>T/2\\ 1 & |t|<T/2\end{cases}$ pultsu laukizuzena. Definiziotik abiaturik, ondoriozta ezazu bere Fourier transformatua.

(puntu 1)

C3) Bedi $g(t)=g_r(t)+i\cdot g_i(t)$, $g_r(t)=\begin{cases}0 & t<a\\ 1 & a<t<3a\\ 0 & t>3a\end{cases}$, $g_i(t)=\begin{cases}0 & t<-3a\\ 1 & -3a<t<-a\\ 0 & t>-a\end{cases}$, non $a>0$ den. Eskatzen da:

i. Irudika itzazu *g(t)* funtzioaren zati erreala eta irudikaria, eta adieraz ezazu bakoitza pultsu laukizuzena erabiliz.

ii. Arrazoituz, eta aurreko atalak aplikatuz, lor itzazu $g(t)$ eta $\overline{g(t)}$ funtzioen Fourier transformatuak. Kalkula itzazu bi transformatu horien era binomikoa baita modulua ere.

(3 puntu)

D) Lor itzau, grafiko eta analitikoki, azpiko funtzioaren puntu singularrak, logaritmoaren determinazioa $\theta\in[-\pi/2,3\pi/2)$ delarik:

$$f(z)=\frac{Log\left(i\cdot z^2+z\right)}{z^8-2z^4+1}.$$

(2 puntu)

DENBORA: ordu 1 eta 20 minutu

MATEMATIKA GEHIPENA – DEIALDI EZOHIKOA
2008ko IRAILAk 5

1. ARIKETA

A) Aintzakotzat hartu honako aldagai konplexuko funtzio konplexu hauek:

$$f(x+i\cdot y)=x^3-2x^2-3xy^2+2y^2+3+i\cdot(-y^3+3x^2y-4xy)$$

$$g(x+i\cdot y)=x^2+x+y^2-i\cdot y$$

Aurki itzazu *f* eta *g* funtzioen *z*-ren menpeko adierazpenak.

(2 puntu)

B) Bedi $a\in\mathbb{C}$ eta $f(z)=\dfrac{1-\cos(z-a)}{h(z)}$ non $h(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n$ funtzio oso bat den, hurrengoa betetzen delarik: $\begin{cases} h(a)=h'(a)=h''(a)=h'''(a)=0 \\ h^{iv)}(a)\neq 0 \end{cases}$

Eskatzen da:

i. Ze singulartasun mota dauka *f* –k $z = a$ puntuan?

ii. Kalkula ezazu $\mathrm{Res}[f(z),a]$ hondarra, c_n koefizienteen funtziotan.

iii. Adieraz ezazu $\mathrm{Res}[f(z),a]$ hondarra h-ren deribatuen funtziotan, a puntuan ebaluatuak.

(3 puntu)

C) Bedi $f(z)=\dfrac{\tan(z/2)}{z^2-\pi^2/4}$ funtzioa. Bedi A, B, C eta D erpinek definitzen duten karratuaren mugaldea Γ, non A eta B zenbaki irudikari hutsak diren, bata bestearen konjokatua izanik, eta $C=x+i\cdot y$, non $y>0$ eta $0<x<2\pi$ den, $x\neq\pi/2,\pi$ izanik. Eskatzen da:

i. Lor itzazu, analitikoki eta grafikoki, f(z)-ren puntu singularrak.

ii. Kalkula ezazu $\oint_\Gamma f(z)dz$ kasu posible guztietan, C-ren abszisaren arabera. Horretarako, erabil ezazu Cauchy-ren teoremak aplikatu ahal denean.

(4 puntu)

D) Hartu aintzakotzat honako funtzio hau: $f(z)=\dfrac{1}{(z-2)(z^2-2z+1)^2}$

i. 1º.- Zenbat $(z-2)$-ko berredura serie garapen onartzen du? Aipatu garapen mota, baita konbergentzia eremua ere, kasu bakoitzean.

2º.- Lor ezazu z = 0 puntuan baliozkoa den garapena.

ii. Enuntzia ezazu Laurent-en Teorema.

iii. Aplikatu i) atalean lorturiko garapena eta Laurent-en teorema honako integral hauek lortzeko:

$$I_1=\oint_C\frac{f(z)dz}{(z-2)^5}$$

$$I_2=\oint_C f(z)(z-2)^7dz$$

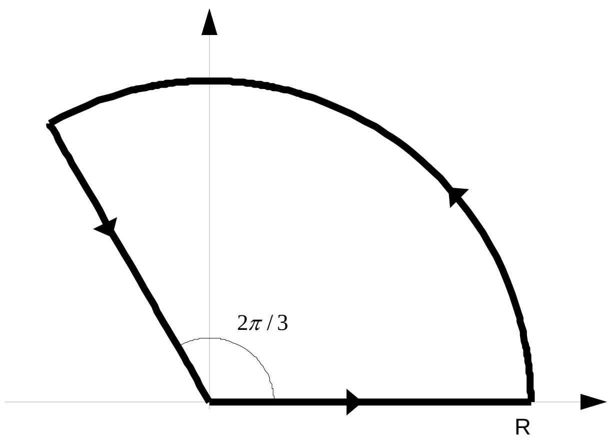
non $C:|z-2|=3$ den.

(4 puntu)

OHARRA: (E) ATALA ORRIAREN BESTE ALDEAN DAGO

MATEMATIKA GEHIPENA – DEIALDI EZOHIKOA
2008ko IRAILAk 5

E) Kalkula itzazu honako integral hauek: $I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^3+1}$ eta $I_2 = \int_{0}^{\infty} \frac{dx}{x^3+1}$. Erabil ezazu honako mugalde hau I_2 kalkulatzeko :



(4 puntu)

DENBORA: Ordu 1 eta 45 minutu
Oharra: Ariketa hau egin ondoren 10 minutuko atsedenaldia egongo da.