MATEMATIKA GEHIPENA – DEIALDI OHIKOA
2008ko EKAINAK 20

- ***1 ARIKETA***

A1) Irudikatu $[-\pi, 2\pi]$ tartean periodo txikieneko diren eta $f(x) = \sin x$ funtzioarekin $(0, \pi/2)$ tartean bat datozen honako garapapen hauek, kasu bakoitzean periodoa esplizituki adieraziz:

1. $\varphi_1(x)$: sinu eta kosinuzko serie garapena.
2. $\varphi_2(x)$: kosinuzko serie garapena.
3. $\varphi_3(x)$: sinu bakoitizko serie garapena.
4. $\varphi_4(x)$: kosinu bakoitizko serie garapena

(2 puntu)

A2) Arrazoituz eta kalkulurik egin gabe, ondoriozta ezazu $\varphi_3(x)$.

(puntu 1)

A3) Lor itzazu $\varphi_4(x)$ garapena eta bere Euler koefizienteak.

(1.5 puntu)

B) Izan bitez $a > 0$ eta $b \in \mathbb{R}$. Bedi honako funtzio hau:

$$F(s) = \frac{1}{e^{as}(s+b)s} + \frac{b}{(s+a)^2}.$$

Kalkula ezazu $\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$, $b \in \mathbb{R}$ parametroaren balio guztiak kontsideratuz.

(3 puntu)

C) $f(z) = (z+1+2i)^2$ funtzioa emanda, kalkula ezazu $|z| \le 2\sqrt{5}$ eskualdeko zeintzu puntutan hartzen dituen $|f(z)|$-k bere balio maximo eta minimoak.

(2.5 puntu)

DENBORA: Ordu bat

Oharra: **2. Ariketa orriaren beste aldean dago.**

MATEMATIKA GEHIPENA – DEIALDI OHIKOA
2008ko EKAINAK 20

- ***2. ARIKETA***

A1) Izan bitez $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$, $F(\omega)=\mathcal{F}\left[f(t)\right]$ eta $G(\omega)=\mathcal{F}\left[g(t)\right]$. $\mathcal{F}\left[\overline{g(t)}\right](\omega)=\overline{G(-\omega)}$ dela erabiliz, froga ezazu honako hau:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot\overline{g(t)}dt=\frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)\cdot\overline{G(\omega)}d\omega$$

(1.5 puntu)

Zein da berdintza honetatik ondorioztatzen den Teorema? Enuntzia eta ondoriozta ezazu.

(0.5 puntu)

A2) Kalkula ezazu $f_{[a,b]}(t)=\begin{cases}1 & t\in[a,b]\\ 0 & t\notin[a,b]\end{cases}$ funtzioaren Fourier transformatua, $\mathcal{F}\left[f_{[a,b]}(t)\right]=F_{[a,b]}$.

(puntu 1)

A3) Adieraz itzazu, era binomikoan, $\left|F_{[0,A]}(\omega)\right|^2$ balioa eta $F_{[0,2]}(\omega)\cdot\overline{F_{[1,3]}(\omega)}$ biderkaduraren balioa, $A,\omega\in\mathbb{R}$ direlarik.

(1.25 puntu)

A4) Aurreko atalak erabiliz, kalkula itzazu honako integral hauek:

$$\int_0^{\infty}\frac{1-\cos(5x)}{x^2}dx \quad \text{eta} \quad \int_0^{\infty}\frac{\cos(x)-\cos(3x)}{x^2}dx$$

(1.25 puntu)

B) Bedi f funtzio oso bat, $\mathrm{Re}(f(z))=\mathrm{Im}(f(z))\ \ \forall z\in\mathbb{C}$ betetzen duena. Froga ezazu f konstante dela.

(puntu 1)

C) Aurki itzazu, grafiko eta analitikoki, honako funtzio honen puntu singularrak:

$$f(z)=\frac{\sqrt{i\cdot z^2+z}}{z^6-2z^3+1},$$

Horretarako, hartu $\theta\in[\pi/2,5\pi/2)$ adarra erro karraturako.

(1.75 puntu)

D) Aurki itzazu honako ekuazio honen $z\in\mathbb{C}$ soluzio guztiak:

$$4\cdot\sin z=\frac{(1-i)e^{2iz}}{\cos z},$$

(1.75 puntu)

DENBORA: ordu bat

Oharra: 2. Ariketa egin ondoren, 10 minutuko atseden bat izango da.

MATEMATIKA GEHIPENA – DEIALDI OHIKOA
2008ko EKAINAK 20

- ***3. ARIKETA***

A) Kalkula ezazu honako integral hau:

$$\oint_{|z|=\frac{5}{2}} \left(\frac{z^2}{e^{\pi z}-1} + z^3 \cdot e^{\frac{1}{z^2}} + \mathrm{Log}(z+3) \right) dz$$

(2.5 puntu)

B) Bedi honako aldagai errealeko funtzio erreal hau $f(x) = \dfrac{x^3 - x^2 - x + 2}{x+1}$. Eskatzen da:

B1) Seriez garatu gabe, determina ezazu tarte irekirik handiena zeinerako $f(x)$-ren $(x-1)$ berredurazko Taylor garapena konbergentea den.

(puntu 1)

B2) Orain, f-ren Taylor serie garapena erabiliz, kalkula ezazu $f''(1)$ eta $f^{25)}(1)$.

(1.5 puntu)

C) Izan bitez $a \in \mathbb{C}$ eta $f(z) = \dfrac{\sin(z-a)}{h(z)}$, non $h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (z-a)^n$ funtzio oso bat den, $h(a) = h'(a) = h''(a) = 0$ eta $h'''(a) \neq 0$ betetzen direlarik. Eskatzen da:

C1) Esan zein singulartasun mota dauka $f(z)$-k $z = a$ puntuan.

(0.75 puntu)

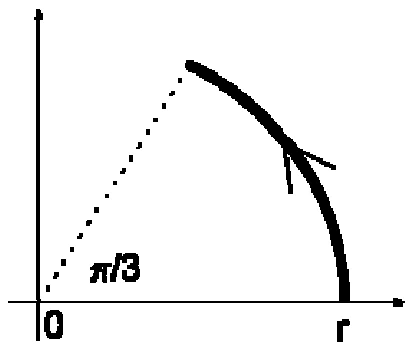
C2) Kalkula ezazu $\mathrm{Res}[f(z), a]$ hondarra, c_n koefizienteen funtziotan.

(1.5 puntu)

C3) Adieraz ezazu $\mathrm{Res}[f(z), a]$ hondarra h-ren deribatuen funtziotan, a puntuan ebaluatuak.

(0.25 puntu)

D) Bedi C_r honako irudi honetan lodiz markaturiko arku leuna:



Kalkula itzazu honako limite hauen balioak:

$$\lim_{r\to\infty} \int_{C_r} \frac{e^{iz}}{z^2-(1+i)z}\,dz \quad \text{eta} \quad \lim_{r\to 0} \int_{C_r} \frac{e^{iz}}{z^2-(1+i)z}\,dz$$

Enuntzia ezazu bigarren limitea kalkulatzeko erabiltzen den Teorema.

(2.5 puntu)

DENBORA: Ordu 1