AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS – PRIMER EXAMEN PARCIAL
25 DE ENERO DE 2008

- ***EJERCICIO 3***

A) Obtener analítica y gráficamente el dominio de analiticidad de la función:

$$f(z) = \mathrm{Log}(\mathrm{Log}\, z),$$

tomando la rama correspondiente a $-3\pi/2 < \theta \le \pi/2$ para ambas determinaciones del logaritmo.

(2.5 puntos)

B) Deducir la expresión logarítmica de $\mathrm{ArgTh}(z)$.

(1.5 puntos)

B) Representar, analítica y gráficamente los puntos singulares de

$$f(z) = \frac{1}{2 - \mathrm{ArgTh}(1+z^2)} + \frac{1}{e^z - e^{2+i}},$$

considerando la determinación del logaritmo correspondiente a $\theta \in (\pi, 3\pi]$

(5 puntos)

Tiempo : 40 m.

- ***EJERCICIO 4***

Hallar todos los $z \in \mathbb{C}$ para los cuales los afijos de $i, z+i$ y z^2+i formen un triángulo equilátero.

(3.5 puntos)

B) Sean $g(x,y)$ y $h(x,y)$ funciones no constantes y armónicas en un dominio D simplemente conexo, cumpliéndose

$$\begin{cases} g_x(x,y) = h_y(x,y) \\ -g_y(x,y) = h_x(x,y). \end{cases}$$

Se pide:

B1) Justificar cuál o cuáles de las siguientes funciones son analíticas en D:

$$f_1(x+iy) = g(x,y) + i\,h(x,y)$$
$$f_2(x+iy) = h(x,y) + i\,g(x,y)$$
$$f_3(x+iy) = -h(x,y) + i\,g(x,y)$$
$$f_4(x+iy) = -g(x,y) + i\,h(x,y)$$

B2) En el caso particular de que $g_x(x,y) = 6xy$, expresar en función de z las funciones analíticas $f_i(z)$ del apartado anterior, sabiendo que $f_i(0) = f_i'(0) = 0$.

(5.5 puntos)

Tiempo 40m.

<u>AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS – PRIMER EXAMEN PARCIAL</u>
<u>25 DE ENERO DE 2008</u>

- ***<u>EJERCICIO 1</u>***

A) **Enunciar y demostrar** la propiedad de simetría para la transformada de Fourier.

(1.5 puntos)

Se sabe que $\mathcal{F}\left[e^{-a|t|}\right]=\dfrac{2a}{a^2+\omega^2}$, $a>0$, Se pide:

1º.- Calcular, $\mathcal{F}\left[\dfrac{1}{4t^2+1}\right]$.

2º.- Resolver la siguiente ecuación integral: $\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\cdot f(t-u)\,du=\dfrac{1}{4t^2+1}$.

Indicar las propiedades y teoremas de la transformada de Fourier utilizados.

(4.5 puntos)

B) La respuesta de un sistema físico con condiciones iniciales nulas a la función Delta de Dirac, δ(t) es :

$$g(t)=\begin{cases}0 & t<1\\ e\cdot e^{-t}\left[\cos(t-1)-\sin(t-1)\right] & t>1\end{cases},$$

1º.- Expresar g*(t)* utilizando la función escalón, *H(t).*

2º.- Obtener la transformada de Laplace de g*(t).*

3º.- Obtener la función de transferencia del sistema.

(5 puntos)

Tiempo 50m.

- ***<u>EJERCICIO 2</u>***

Se considera la función $f(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ 2 & x\geq 0\end{cases}$ *y* $g(x)=\sin(x)\cdot f\left[\sin(x)\right]$, y se pide:

1. Representar gráficamente g(x) en el intervalo [-3π , 3π]

(1 punto)

2. **Calcular** el desarrollo $\varphi_1(x)$ en serie de cosenos de la función periódica de menor periodo posible que coincide con g(x) en [0, π/2].

(2.5 puntos)

3. Sea $\varphi_2(x)$ el desarrollo en serie de cosenos impares de la función periódica de menor periodo posible que coincide con g(x) en [0, π/2]. **Plantear** las integrales para el cálculo de los coeficientes de Euler de $\varphi_2(x)$, dando la expresión analítica de los integrandos.

(1.5 puntos)

4. Sea $\varphi_3(x)$ el desarrollo en serie de cosenos pares de la función periódica de menor periodo posible que coincide con g(x) en [0, π/2].¿En qué valores del intervalo [-2π , 2π] coinciden $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ y $\varphi_3(x)$? **Razonar la respuesta**.

(2 puntos)

5. Completar la siguiente tabla de valores:

x	0	π/2	725π/3	-1027π/4
$\varphi_1(x)$				
$\varphi_2(x)$				

(2 puntos)

6. Calcular $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{1-4n^2}$

(2 puntos)

Tiempo 50m.