MATEMATIKA GEHIPENA

2007ko IRAILAK 12

LEHEN ARIKETA

A) Enuntzia ezazu konboluzioaren Teorema Laplace-ren transformatuarako.

Kalkula ezazu $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{s}{(s^2+1)^2}\right]$

B) Aurki ezazu ondorengo ekuazio linealen sistema Laplace-ren transformatua erabiliz, hasierako baldintzak $x(0)=y(0)=1$ izanik.

$$\begin{cases} x'(t) = -y(t) \\ y'(t) = 2x(t)+2y(t) \end{cases}$$

C) Izan bedi $F(\omega)=\mathcal{F}\left[f(t)\right]$. Zeintzu baldintza bete behar ditu f(t)-k $\mathcal{F}\left[f'(t)\right]$-ren existentzia bermatuta egoteko? Kalkula ezazu, pausuak arrazoituz, $\mathcal{F}\left[f'(t)\right]$ funtzioa $F(\omega)$ -ren funtziotan.

Izan bedi $g(t)=\begin{cases} 0 & t<-2 \\ t+2 & -2<t<0 \\ -t+2 & 0<t<2 \\ 0 & t>2 \end{cases}$. Kalkula ezazu $\mathcal{F}\left[g(t)\right]$ funtzioa $g(t)$-ren deribatuaren transformatua erabiliz.

D) Sistema fisiko bati ondorengo ekuazio diferentzial dagokio: $y'-y=H(t)\cdot e^{-t}$. Aurki ezazu *y(t)* funtzioa Fourier-en transformatua aplikatuz.

OHARRA: Dakigunez, $\mathcal{F}\left[\dfrac{1}{a^2+t^2}\right]=\dfrac{\pi}{a}e^{-a|\omega|}$ non $a\in\Re^+$

E) Bedi $f(x)=\begin{cases} sin(x) & 0<x\le\pi \\ 1 & \pi<x\le 2\pi \end{cases}$, eta *g(x)* bere luzapen periodikoa, 2π-periodokoa. Bedi φ(x), *g(x)*-ren Fourier serie garapena. Eskatzen da:

1.) Plantea itzazu φ(x) garapeneko a_n eta b_n koefizienteen kalkuluari dagozkion integralak, integrakizunen adierazpen analitikoa esplizituki adieraziz.

2.) Lehen ataleko integralak kalkulatzeko *Mathematica* erabili da, ondorengo emaitzak lortuz:

$$a_n=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1+\cos(n\pi)}{1-n^2}+\frac{sin(2n\pi)-sin(n\pi)}{n}\right] \qquad b_n=\frac{1}{\pi}\left[\frac{sin(n\pi)}{1-n^2}+\frac{\cos(n\pi)-\cos(2n\pi)}{n}\right].$$

Lor ezazu φ(x) garapenaren adierazpenik sinpleena.

Denbora: Ordu 1 eta 30 minutu.

Ariketa guztiek puntuazio berdina dute.

Ariketa hau amaitu ondoren 10 minutuko atsedena egongo da, eta jarraian, bigarren ariketa, azkena dena.

MATEMATIKA GEHIPENA

2007ko IRAILAK 12

BIGARREN ARIKETA

A) Aurki itzazu z_1 , z_2 eta z_3 zenbaki konplexuen afixuak, lehen koadrantean daudela jakinik eta ondorengo propietateak betetzen direlarik:

1) $z_1^3 - 8i = 0$.

2) z_1, z_2 eta jatorria lerro zuzen berean daude.

3) z_2 eta jatorriaren arteko distantzia, z_1 eta jatorriaren artekoa baino hiru aldiz handiagoa da.

4) z_3 eta z_1-en arteko distantzia eta z_3-tik z_2-rakoa berdinak dira: $\sqrt{5/2}$ aldiz z_1 eta z_2 puntuen artekoa, hain zuzen ere.

B) Enuntzia eta froga ezazu Gauss-en batazbestekoaren balioko teorema. Bedi $u(x,y) = x^2 - y^2 + 2y - 1$ funtzioa, zeinek $v(x,y)$-rekin batera, $f(z) = u(x,y) + i \cdot v(x,y)$ funtzio analitikoa osatzen duen, $f(1) = -2i$ izanik. Eskatzen da:

1. Aurki ezazu v(x,y).
2. Aurki ezazu $f(z)$ funtzioaren Gauss-en batazbestekoaren balioa, ondorengo eskualdeko mugaldearen gainekoa: $R: |z - 2 + i| < 2$.

C) Kalkula ezazu ondorengo integralaren balioa bi era desberdinetara, kasu bakoitzean erabilitako teoremak enuntziatuz:

$$I = \oint_{|z|=2} \frac{e^{z+z^2}}{z^3} dz$$

D) Kontsideratu $f(z) = Log\left[\left(\frac{1}{1+z}\right)^2\right]$ funtzioa. Eskatzen da:

1) Aurki ezazu analitiko eta grafikoki $f(z)$ funtzioaren analitikotasun eremua.

2) Gara ezazu $f(z)$ funtzioa (z-1)-ezko berreduretan, analitikotasun eremua adieraziz.

E) Kalkula ezazu ondorengo integral inpropioaren balioa:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\cos^2 x - 1}{x - i} dx$$

Denbora: Ordu 1 eta 30 minutu.

Ariketa guztiek puntuazio berdina dute.