AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS

12 DE SEPTIEMBRE DE 2007

EJERCICIO PRIMERO

A) Enunciar el teorema de convolución para la transformada de Laplace.

Calcular $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{s}{(s^2+1)^2}\right]$

B) Hallar la solución del siguiente sistema lineal utilizando la teoría de la Transformada de Laplace, y con las condiciones iniciales $x(0)=y(0)=1$.

$$\begin{cases} x'(t) = -y(t) \\ y'(t) = 2x(t) + 2y(t) \end{cases}$$

C) Sea $F(\omega)=\mathcal{F}\left[f(t)\right]$. ¿Qué condiciones debe cumplir f(t) para asegurar que existe $\mathcal{F}\left[f'(t)\right]$?. Calcular, razonando los pasos, $\mathcal{F}\left[f'(t)\right]$ en función de $F(\omega)$.

Sea $g(t)=\begin{cases} 0 & t<-2 \\ t+2 & -2<t<0 \\ -t+2 & 0<t<2 \\ 0 & t>2 \end{cases}$. Calcular $\mathcal{F}\left[g(t)\right]$ a partir de la transformada de su derivada.

D) Un sistema físico está gobernado por la siguiente ecuación diferencial : $y'-y=H(t)\cdot e^{-t}$. Se pide hallar y(t) aplicando la transformada de Fourier.

Nota: Se sabe que $\mathcal{F}\left[\dfrac{1}{a^2+t^2}\right]=\dfrac{\pi}{a}e^{-a|\omega|} \quad con \quad a\in\Re^+$

E) Sea $f(x)=\begin{cases} sen(x) & 0<x\le\pi \\ 1 & \pi<x\le 2\pi \end{cases}$, y g(x) su extensión periódica de periodo 2π. Se pide:

1º) Plantear las integrales correspondientes al cálculo de los coeficientes a_n y b_n del desarrollo en serie de Fourier de g(x) al que se denomina φ(x), explicitando la expresión analítica de los integrandos.

2º) Utilizando *Mathemática* para el cálculo de las integrales del apdo.anterior se obtiene el siguiente resultado:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1+\cos(n\pi)}{1-n^2} + \frac{sen(2n\pi)-sen(n\pi)}{n}\right] \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\left[\frac{sen(n\pi)}{1-n^2} + \frac{\cos(n\pi)-\cos(2n\pi)}{n}\right].$$

Obtener la expresión más sencilla de φ(x).

Tiempo: 1h.30m.

Todos los ejercicios tienen la misma puntuación

Después de este ejercicio habrá un descanso de 10 minutos y, a continuación, un segundo y último ejercicio

AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS

12 DE SEPTIEMBRE DE 2007

EJERCICIO SEGUNDO

A) Hallar los afijos de los números complejos z_1 , z_2 y z_3 pertenecientes al primer cuadrante y tales que,

1) $z_1^3 - 8i = 0$.
2) z_1 y z_2 estén alineados con el origen.
3) La distancia de z_2 al origen es tres veces la de z_1 al origen.
4) La distancia de z_3 a z_1 es la misma que de z_3 a z_2 e igual a $\sqrt{5/2}$ veces la que hay entre z_1 y z_2 .

B) Enunciar y demostrar el teorema del Valor Medio de Gauss.

Dada la función $u(x,y) = x^2 - y^2 + 2y - 1$, que junto a $v(x,y)$ forman la función analítica $f(z) = u(x,y) + i \cdot v(x,y)$ tal que *f(1) = -2i*, se pide:

1. Hallar v(x,y).
2. Hallar el valor medio de Gauss de $f(z)$ sobre la frontera de la región : $R: |z - 2 + i| < 2$.

C) Hallar de dos formas distintas, enunciando los teoremas utilizados para ello, el valor de :

$$I = \oint_{|z|=2} \frac{e^{z+z^2}}{z^3} dz$$

D) Dada la función $f(z) = Log\left[\left(\frac{1}{1+z}\right)^2\right]$, se pide:

1) Hallar el dominio de analiticidad de $f(z)$, analítica y gráficamente.
2) Desarrollarla en serie de potencias de (z-1) dando el campo de convergencia.

E) Calcular el valor de la siguiente integral impropia:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\cos^2 x - 1}{x - i} dx$$

Tiempo: 1h.30m.

Todos los ejercicios tienen la misma puntuación