AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS – SEGUNDO EXAMEN PARCIAL
11 DE MAYO DE 2007

- ***EJERCICIO 1***

A1) Sea $f:[a,b]\to\mathbb{C}$. Demostrar la siguiente desigualdad:

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \le \int_a^b |f(t)|\,dt$$

(3 puntos)

A2) Sabiendo que la función $f(z)$ tiene un cero de orden m en z_0 y que $g(z)$ tiene un polo de orden n en z_0, **razonar** qué tipo de singularidad o cero presentan las siguientes funciones en z_0.

a) $f\cdot g$ b) $g-\dfrac{1}{f}$ c) $\dfrac{1}{g'}$

(3 puntos)

A3) Calcular el valor de la siguiente integral utilizando los teoremas de Cauchy, siendo $a,b>0$ y sabiendo que $a,b\notin\mathbb{Z}$:

$$\oint_{|z|=3} \frac{z^2-1}{(z+a)(z-b)^2}\,dz$$

(3 puntos)

- ***EJERCICIO 2***

B1) Dada la función

$$f(z)=\frac{1}{(z+1)(z^2+4z+4)}+\operatorname{Log}(z+3),$$

Determinar analítica y gráficamente las regiones en las que se puede desarrollar en potencias de $(z-1)$, indicando qué tipo de desarrollo en serie (Taylor o Laurent) se obtiene en cada región.

(2 puntos)

B2) Calcular el valor de la siguiente integral:

$$\oint_{|z+1|=\frac{1}{2}} \frac{z+1}{\operatorname{sen}^3(\pi z)}\,dz$$

(3 puntos)

B3) Calcular el valor principal de Cauchy de la siguiente integral impropia:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\operatorname{sen}(2x)\cos x-\operatorname{sen} x}{(x-i)}\,dx$$

(3 puntos)

B4) Calcular los 3 primeros términos no nulos del desarrollo de $\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 z}$ en potencias de *z*.

(3 puntos)

TIEMPO TOTAL: 1 hora 40minutos (a los 45 minutos se entregará el Ejercicio 1)