MATEMATIKA GEHIPENA

AZTERKETA 2006ko IRAILAk, 2

OHARRA: Zati honetan lortuko den nota Matematika Gehipenako behin-betiko notaren %75-ari dagokio. Ikasgaia gainditzeko beharrezkoa da zati bakoitzaren 4 edo nota handiago bat lortzea.

LEHEN ARIKETA

A) A1) Adierazi grafikoki ondorengo zenbaki konplexu multzoak:

$$A:\{z \,/\, \operatorname{Im}(z+2i) \geq \operatorname{Re}(z-3)\}$$

$$B:\{z \,/\, 2\operatorname{Im}(z) \geq |z-2i|^2\}$$

A2) z-ren zeintzu baliotarako da cos(z) erreal?. Justifikatu erantzuna.

A3) z= 1+i bada, aurki itzazu $\left|e^{1/z}\right|$ eta $\left|e^{iz}\right|$.

A4) f(z) = u(x,y)+iv(x,y) funtzio osoa dela jakinik, froga ezazu ondorengo formula:

$$\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

(3.5 puntu)

B) B1) Enuntziatu Konboluzio Teorema Fourier-en transformatuarako.

B2) Ebatz ezazu ondorengo ekuazio integral Fourier-en transformatuaren teoria erabiliz:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(y)\cdot e^{-|t-y|}dy+g(t)=e^{-|t|}$$

Oharra:

$$\mathcal{F}\left[e^{-a|t|}\right]=\frac{2a}{a^2+\omega^2}$$

(3 puntu)

C) Adierazi grafikoki [-2π, 2π] tartean *f(x)*-ren 2π periodoko luzapen periodikoa $f_T(x)$, non

$$f(x)=\begin{cases}\pi\cdot x-x^2, & x\in[0,\pi)\\ x^2-\pi\cdot x, & x\in[\pi,2\pi)\end{cases}$$ den.

Bedi $\varphi(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(nx)+\sum_{n=1}^{\infty}b_n sin(nx)$ $f_T(x)$-ren Fourier serie garapena. Kalkula ezazu φ(x)-en kosinuzko zatia. Emaitza honetatik abiaturik, kalkula ezazu ondorengo seriearen batura:

$$S=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$$

Oharra:

$$\int x\cdot\cos(ax)dx=\frac{\cos(ax)}{a^2}+\frac{x\cdot sin(ax)}{a} \quad ; \quad \int x^2\cdot\cos(ax)dx=\frac{2x\cdot\cos(ax)}{a^2}+\frac{(a^2\cdot x^2-2)\cdot sin(ax)}{a^3}$$

$$\int x\cdot sin(ax)dx=\frac{sin(ax)}{a^2}-\frac{x\cdot\cos(ax)}{a} \quad ; \quad \int x^2\cdot sin(ax)dx=\frac{2x\cdot sin(ax)}{a^2}-\frac{(a^2\cdot x^2-2)\cdot\cos(ax)}{a^3}$$

(3.5 puntu)

Denbora : Ordu.1 eta 15 min.

MATEMATIKA GEHIPENA

AZTERKETA 2006ko IRAILAk, 2

BIGARREN ARIKETA

A) A1) Kalkula ezazu ondorengo integrala hondarren teoria erabiliz:

$$I = \int_0^{2\pi} sin^2\left(\frac{\pi}{6} + 4e^{i\theta}\right) d\theta$$

A2) Enuntziatu Gauss-en teorema.

A3) Egiaztatu A1) ataleko emaitza Gauss-en teorema erabiliz.

(6 puntu)

B) Bitez f(z) eta g(z) z_0-n analitikoak diren funtzioak, z_0 f(z)-ren bigarren.ordenako zero bat eta g(z)-ren 3. ordenako zero bat izanik. Kalkula ezazu $\operatorname{Res}\left[\frac{f''(z)}{g'(z)}, z_0\right]$ f(z) eta g(z) funtzioen (z- z_0)-ko berretura garapenen koefizienteen funtziotan:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \text{eta} \quad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n$$

(4 puntu)

Denbora : ordu 1.

HIRUGARREN ARIKETA

A) Froga ezazu $\operatorname{Res}[f(z), z_0]$ f(z)-ren Laurent serie garapenean $(z\text{-}z_0)^{-1}$-rekin doan koefizientea dela.

(2 puntu)

B) Bedi *C* z_1 eta z_2 bere barrualdean edukitzen dituen mugalde itxi bakun bat eta bedi $I = \oint_C \frac{dz}{(z - z_1)(z - z_2)}$. Hondar teoria erabiliz, I integralaren balioa z_1 eta z_2 zenbakien independentea dela ondoriozta ezazu. Lor ezazu . I -ren balioa.

(3 puntu)

C) Bedi *F(z)* funtzio oso bat, eta *C* $|z| = R$ mugaldea. Bedi z_0, non $|z_0| < R$, $F(z_0) = a$, $F(-z_0) = b$ eta $F'(0) = c$. Hondar teoria erabiliz, lor ezazu $I = \oint_C \frac{F(z)}{z^2 - z_0^2} dz$ integralaren balioa *a, b* eta *c* balioen funtziotan ondorengo kasuetan:

a) $z_0 = 0$, b) *F(z)* bikoitia, c) *F(z)* bakoitia, d) *F(z)* ez bakoiti, ezta bikoitia ere.

(5 puntu)

Denbora : Ordu 1.