

Matematika Gehipena. Ingeniaritza Industrial, 2. maila  
2006ko ekainak 13. Deialdi Ohikoa.

**OHARRA:** Zati honetan lortuko den nota Matematika Gehipenako behin-betiko notaren %75-ari dagokio. Ikasgaia gainditzeko beharrezkoa da zati bakoitzaren 4 edo nota handiago bat lortzea.

LEHEN ARIKETA

1. (a) Aurki itzazu analitiko eta grafikoki puntu guztiak zeintzuetarako

$$f(z) = \frac{\sqrt{z + 2\pi}}{\sin z - \cos z}$$

funtzioa analitikoa ez den.

- (b) Bitez  $z_1$  eta  $z_2$  zati errealik txikieneko  $f$ -ren bi singularitasun isolatuak. Adieraz ezazu, arrazoituz, zenbat  $(z - z_i)$ -ko berredura serie garapen desberdin onartzen ditu  $f$ -k,  $i = 1, 2$  bakoitzerako.

**3.5 puntu**

2. (a) Garatu ondorengo funtzioa

$$f(z) = \frac{\text{Log } z}{(z - 1)^3}$$

$(z - 1)$ -ko berreduratan.

- (b) Adierazi garapen hori baliozkoa den eremua.  
(c) Zehaztu  $f$ -k  $z = 1$  puntuan daukan singularitasun mota.

**3 puntu**

3. Bedi  $z = x + iy$  nulua ez den zenbaki konplexu bat, eta bedi  $\alpha = \frac{\bar{z}}{z}$ . Ondorengo eskatzen da:

- (a) Adierazi  $\alpha$ -ren modulu eta argumentua  $z$ -ren argumentuaren funtziotan, baita  $x$  eta  $y$ -ren funtziotan.  
(b)  $z$ -ren afixua  $\{e^{it} : 0 \leq t \leq \pi/2\}$  zirkunferentzi-arkutik doanean  $\alpha$ -ren afixuak deskribatzen duen **leku geometrikoa** zehatz ezazu grafikoki.  
(c) Zehatz ezazu, arrazoituz, zein izango litzatekeen (b) atalaren erantzuna  $z$ -ren afixua  $\{3e^{it} : 0 \leq t \leq \pi/2\}$  zirkunferentzi-arkutik joango balitz.

**3.5 puntu**

**ASTIA: ORDU 1.**

Matematika Gehipena. Ingeniaritza Industrial, 2. kurtsoa  
2006ko ekainak 13. Deialdi Ohikoa.

BIGARREN ARIKETA

1.  $f$  eta  $g$  funtzioek 3. ordenako zero bat dute  $z_0 \in \mathbb{C}$  puntuan. Kalkulatu ondorengo hondarra:

$$\text{Res} \left[ \frac{f''}{g}, z_0 \right]$$

$f$  eta  $g$  funtzioen  $z_0$ -ko Taylor garapenen koefizienteen funtziotan.

**3.5 puntu**

2. Lor eta eztabaida ezazu ondorengo integralaren balioa

$$I_a = \int_{|z-i|=2} \frac{e^z}{z^2 + a^2} dz$$

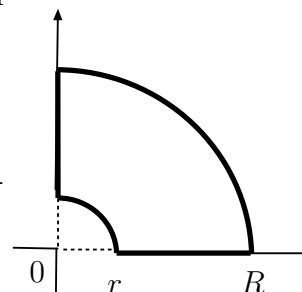
$a > 0$  parametro errealaren arabera,  $a \neq 1, 3$  dela jakinik.

**3 puntu**

3. (a) Kalkula ezazu ondorengo integral inpropioaren balioa:

$$\int_0^\infty \frac{e^{ix} - e^{-x}}{x} dx.$$

Horretarako, integra ezazu  $f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$  funtzioa eskuinetan adierazten den mugaldean zehar.



- (b) Aurreko emaitzatik abiatuz, kalkula ezazu:  $\int_{-\infty}^\infty \frac{\text{sen } x}{x} dx.$

**3.5 puntu**

**TIEMPO: 50 MINUTU.**

Matematika Gehipena. Ingeniaritza Industrial, 2. kurtsoa  
2006ko ekainak 13. Deialdi Ohikoa.

HIRUGARREN ARIKETA

1. Inolako integralik egin gabe, ondorengo funtzioaren Fourier serie garapena lor ezazu:

$$f(x) = \sin^4 x + \cos^2 x$$

Zein da bere periodorik txikiena?

**1.5 puntu**

2. Bedi  $f_T(x)$  ondorengo funtzioaren  $T = 4$  periodoko luzapen periodikoa:

$$f(x) = \begin{cases} -e^{2+x} & -2 \leq x \leq -1 \\ -e^{-x} & -1 \leq x < 0 \\ e^x & 0 \leq x \leq 1 \\ e^{2-x} & 1 < x < 2 \end{cases}$$

Eskatzen da:

- (a)  $f_T(x)$  funtzioaren adierazpen grafikoa  $[-4, 4]$  tartean.  
 (b) Berma al dezakegu, inolako kalkulurik egin gabe, Fourier serie garapenaren koefiziente batzuk nuluak direla? Zeintzu? Erantzun ezazu arrazoituz.  
 (c) Bete ezazu ondorengo taula,  $\varphi_T(x)$  Fourier serie garapena izanik:

$x$	0	1	2	27	2006
$f_T(x)$					
$\varphi_T(x)$					

**2 puntu**

3. (a) Bedi  $F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)]$ ,  $f(t)$  funtzioaren Fourier transformatua. Ondorioztatu  $\mathcal{F}[e^{ibt} \cdot f(t)]$ .

(b)  $\mathcal{F}\left[\frac{1}{t^2 + c^2}\right] = \frac{\pi}{c} e^{-c|\omega|}$ ,  $c \in \mathbb{R}^+$  dela jakinik, eskatzen da:

i. Aurki  $\mathcal{F}\left[\frac{e^{ibt}}{t^2 + a^2}\right]$  eta  $\mathcal{F}\left[\frac{\cos(bt)}{t^2 + a^2}\right]$ .

ii. Aurreko emaitzetatik abiatutik, lor ezazu:  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos^2 t}{t^2 + 1} dt$ .

**3.5 puntu**

4. Bedi  $y' - y = f(t)$ , non  $f(t) = \begin{cases} 1-t & 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & t > 1 \end{cases}$  den. Laplace-ren transformatua erabiliz,  $y(0) = 0$  egiaztatzen duen ebazpen partikularra aurki eta grafikoki adieraz ezazu.

**3 puntu**

**ASTIA: ORDU 1 eta 10 minutu.**