

MATEMATIKA GEHIPENA – BIGARREN AZTERKETA PARTZIALA  
2005EKO MAIATZAREN 20

• **1 ARIKETA**

A) Inongo eragiketarik burutu gabe, ondoko galdera hauek arrazoituz erantzun:

1)  $f(z) = \frac{1}{(2z+1)(z-1)}$  funtzioak  $z = -\frac{1}{2}$  puntuaren inguruan Taylor garapen bat

onartzen du,  $\left|z + \frac{1}{2}\right| < \frac{3}{2}$  puntuetarako.

2) Bedi  $f(z) = \frac{1+2z^2}{z^3+z^5}$ .  $z=i/2$  puntuan baliozkoa den  $f(z)$  funtzioaren  $z$ -ren berreturazko

garapena  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^{2n+5}} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^{2n+3}}$  da.

3)  $\oint_{|z|=2} \cos\left(\frac{1}{z}\right) dz = 0$

**3 Puntu**

B) 1) Enuntzia ezazu funtzio analitikoren deribatuei dagozkion teorema.

2) Bedi  $f(z)$  funtzio analitiko bat  $\forall z / |z-a| \leq r$ , eta  $C: z = a + r \cdot e^{i\theta}$ ,  $\theta \in [0, 2\pi)$ .

Froga ezazu Cauchyren desberdintza,

$$|f^{(n)}(a)| \leq \frac{M \cdot n!}{r^n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$|f(z)| \leq M \quad \forall z \in C \text{ izanik.}$$

**3.5 Puntu**

C)  $z=2i$  puntuan baliozkoa den

$$f(z) = \frac{1}{(z^2-1)(z^4+1)^4}$$

funtzioaren  $z$ -ren berreturazko garapeneko aurreneko lau gai ez-nuluak aurki.

**3.5 Puntu**

**Astia: 50 min.**

• **2 ARIKETA**

A)  $\oint_C \frac{e^{n-z}}{\sinh(z)} dz$  integrala kalkula,  $n \in \mathbb{N}$  izanik eta  $C$   $z_1 = (-4+4i)$ ,  $z_2 = (4+4i)$ ,  $z_3 = (4-4i)$  eta  $z_4 = (-4-4i)$  erpinek definitutako karratua.

**3 Puntu**

B) 1) Defini ezazu  $f(z)$  funtzio baten  $z_0$  bere puntu singular isolatuko hondarra.

2) Ondoriozta ezazu  $f(z)$  funtzio baten  $z_0$  bere polo bikoitz bateko hondarraren adierazpena.

**3 Puntu**

C)  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{x^2+i} dx$  integrala baliozta.

**4 Puntu**

**Astia: 50 min.**