AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS – SEGUNDO EXAMEN PARCIAL
20 DE MAYO DE 2005

- ***EJERCICIO 1***

A) Contestar razonadamente a las siguientes cuestiones, sin efectuar ningún cálculo :

1) $f(z)=\dfrac{1}{(2z+1)(z-1)}$ admite en torno a $z=-\dfrac{1}{2}$ un desarrollo de Taylor válido en la región : $\left|z+\dfrac{1}{2}\right|<\dfrac{3}{2}$.

2) Sea $f(z)=\dfrac{1+2z^2}{z^3+z^5}$. El desarrollo en serie de potencias de z de f(z) válido en z=i/2 es : $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^{2n+5}}+2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^{2n+3}}$.

3) $\displaystyle\oint_{|z|=2}\cos\left(\frac{1}{z}\right)dz=0$

3 Puntos

B) 1) Enunciar el teorema relativo a las sucesivas derivadas de funciones analíticas.

2) Sea f(z) una función analítica $\forall z/|z-a|\le r,\ y\quad C: z=a+r\cdot e^{i\theta}\quad,\quad \theta\in[0,2\pi)$.

Probar la desigualdad de Cauchy :

$$\left|f^{n)}(a)\right|\le\frac{M\cdot n!}{r^n}\ ,\ n=0,1,2\cdots$$

Siendo $|f(z)|\le M\quad\forall z\in C$.

3.5 Puntos

C) Hallar los cuatro primeros términos no nulos del desarrollo en serie de potencias de z válido en z=2i de

$$f(z)=\frac{1}{(z^2-1)(z^4+1)^4}$$

3.5 Puntos
Tiempo: 50 min.

- ***EJERCICIO 2***

A) Evaluar la integral $\displaystyle\oint_C\frac{e^{n\cdot z}}{Sh(z)}dz\quad con\ n\in\mathrm{N}$, y siendo C el cuadrado de vértices z_1= (-4+4i), z_2 = (4+4i), z_3 = (4-4i) y z_4 = (-4-4i).

3 Puntos

B) 1) Definición de residuo de una función f(z) en un punto singular aislado de la misma z_0.

2) Deducir la expresión del residuo de una función f(z) en un punto z_0 polo doble de la misma.

3 Puntos

C) Evaluar la integral $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{Cos(x)}{x^2+i}dx$

4 **Puntos**
Tiempo: 50 min.