

AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS

EXAMEN 19/SEPTIEMBRE/03

NOTA: La nota obtenida en esta parte se corresponde con el 75% de la nota final correspondiente a la asignatura de Ampliación de Matemáticas. Para aprobar es preciso tener una nota mayor o igual que 4 en cada una de las partes.

PRIMER EJERCICIO

- A) Sea $F(s)$ la transformada de Laplace de una función $f(t)$, válida $\forall s > s_0$, y a una constante real y positiva, se pide:

1º.- Deducir $L[e^{at}]$ aplicando la definición de la transformada.

2º.- Deducir $L[H(t-a)]$.

3º.- Deducir $L[H(t-a) \cdot f(t-a)]$

(3 puntos)

- B) Resolver el siguiente problema de valor inicial aplicando la transformada de Laplace:

$$y'' + 3y' + 2y = H(t-2) \quad , \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

(3 puntos)

- C) Sea $f(t) = \frac{\pi}{4} \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi t}{2L}\right)$. Se pide representar gráficamente en el intervalo $[-3L, 3L]$,

las series de Fourier que coincidan con $f(t)$ en el intervalo $(0, L)$, de menor periodo posible y que sean :

1º.- $\phi_1(t)$, serie de senos. En este caso dar la expresión de la serie.

2º.- $\phi_2(t)$, serie de cosenos.

3º.- $\phi_3(t)$, serie de cosenos impares.

¿Qué valores tomarán las funciones anteriores para $t = 0, L$ y $5L/2$?

(4 puntos)

Tiempo: 50 minutos.

AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS

EXAMEN 19/SEPTIEMBRE/03

SEGUNDO EJERCICIO

A) Estudiar si existe una función analítica cuya parte real sea sólo

1º.- Función de x^2 .

2º.- Función de x .

Hallar las funciones analíticas en el caso de que sea posible.

(3 Puntos)

B) 1º.- Deducir la expresión logarítmica de la función $w = \arg \operatorname{Ch}(z)$.

2º.- Resolver la ecuación : $\operatorname{Ch}(z) = i$.

(3 Puntos)

C) Se tiene la función :

$$f(t) = |\operatorname{sen}(t)| \cdot [H(t) - H(t - 2\pi)]$$

Se pide:

1º.- Hacer su representación gráfica.

2º.- Calcular $F(0)$ sin obtener $F(\omega) = _ [f(t)]$.

3º.- Obtener el valor de $\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \cdot d\omega$ sin calcular ninguna integral.

(4 Puntos)

Tiempo: 50 minutos

AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS

EXAMEN 19/SEPTIEMBRE/03

TERCER EJERCICIO

A) Calcular el número real :

$$\int_0^{2\pi} (\operatorname{sen} \vartheta + \operatorname{cos} \vartheta)^m d\vartheta \quad \text{con } m \in \mathbb{N} \quad (m = 1, 2, \dots)$$

(4 puntos)

B) 1) ¿Cuántos desarrollos en potencias de z admite la siguiente función?. **Justificar la respuesta**

$$f(z) = \operatorname{Log}(2+z) + \frac{1}{\operatorname{Sh}(z)}$$

Corte de la función **logaritmo: eje imaginario positivo y**

$$\operatorname{Log}(z) = L\rho + i\vartheta \quad \vartheta \in (-3\pi/2, \pi/2]$$

2) De los desarrollos anteriores se considera el que es válido en el punto $z=1/2$. Calcular los primeros términos de dicho desarrollo hasta la potencia z^3 .

3) Comprobar que:

$$\operatorname{Res}[f(z) + g(z), z = a] = \operatorname{Res}[f(z), z = a] + \operatorname{Res}[g(z), z = a]$$

y calcular

$$\operatorname{Res}\left[\operatorname{Log}(2+z) + \frac{1}{\operatorname{Sh}^2(z)}, z = 0\right]$$

(6 puntos)

Tiempo : 1 hora