AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS

EXAMEN 2/JUNIO/03

NOTA: La nota obtenida en esta parte se corresponde con el 75% de la nota final correspondiente a la asignatura de Ampliación de Matemáticas. Para aprobar es preciso tener una nota mayor o igual que 4 en cada una de las partes.

PRIMER EJERCICIO

A) A1) Enunciar el teorema de Taylor.

A2) Definir y clasificar las singularidades aisladas de una función. Definir residuo de una función f(z) en una singularidad aislada.

A3) Dada la función:

$$f(z)=\frac{(z-1)^2(z+3)}{1-sen(\pi z/2)}$$

Se pide :

1º) Hallar y clasificar todas las singularidades aisladas de f(z).

2º) En el caso de que f(z) tenga algún polo simple, calcular el residuo en el mismo.

2º) Sea $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ el desarrollo en serie de Taylor de f(z). Calcular los tres primeros términos de dicha serie.

(7 Puntos)

B) B1) Definir la convolución de funciones y enunciar el teorema de convolución para la transformada de Laplace.

B2) Calcular la solución de la siguiente ecuación integral aplicando dicho teorema:

$$y(t)=t+e^t-\int_0^t y(u)\cdot ch(t-u)\,du$$

Nota : $\mathrm{L}[t^n]=\frac{n!}{s^{n+1}}$; $\mathrm{L}[e^{at}]=\frac{1}{s-a}$

(4 puntos)

AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS

EXAMEN 2/JUNIO/03

SEGUNDO EJERCICIO

A) Se tiene la función :

$$f(z)=\bar{z}+\frac{i}{2}(z+\bar{z})^2$$

Se pide:

1º.- ¿En qué puntos es $f(z)$ analítica? Razonar la respuesta.

2º.- Calcular $I_1=\int_{C_1} f(z)\,dz$, siendo C_1 el arco de la parábola $y = x^2$ que va desde el punto -1+*i*. hasta el origen.

3º.- Hallar el lugar geométrico de los puntos z del plano complejo en los que $f(z)=\bar{z}$, expresándolo en forma cartesiana.

4º.- Calcular $I_2=\int_{C_2} f(z)\,dz$ siendo C_2 el segmento rectilíneo que va desde el punto -1+*i*. hasta el origen. ¿Se puede esperar que su valor coincida con el de I_1 calculado en el apartado 2?. Razonar la respuesta y calcular el valor de I_2 .

(4 Puntos)

B) Se tiene una función: $f(t)=\begin{cases} 0 & t<0 \\ 1 & t\geq 0 \end{cases}$. Se pide :

1º.- Representar gráficamente:

i) la función compuesta $f\left(\cos(x)\right)$

ii) la función $y(x)=sen(x)\cdot f\left(\cos(x)\right)$

2º.- Desarrollar en serie de Fourier y(x).

(4 Puntos)

AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS

EXAMEN 2/JUNIO/03

TERCER EJERCICIO

A) Sabiendo que F $\left[\Pi_T(t)\right]=2\dfrac{sen(\omega T/2)}{\omega}$, calcular : $f(t)=$ F $^{-1}\left[\dfrac{sen^2(\omega)}{\omega^2}\cdot e^{-i\omega}\right]$, especificando la expresión analítica de f.

(3 Puntos)

B) Calcular, aplicando la definición .

$$\mathrm{F}^{-1}\left[\frac{\cos(\omega)}{\omega}\cdot e^{-i\omega}\right]$$

(3.5 Puntos)

C) Calcular F $\left[t\cdot g(t+2)\right]$ siendo $G(\omega)=$ F $\left[g(t)\right]$. Demostrar las propiedades de la transformada de Fourier utilizadas.

(4.5 Puntos)