AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS – PRIMER EXAMEN PARCIAL
27 DE ENERO DE 2003

PRIMERA PARTE (TOTAL 1h 25 min.)

- ***EJERCICIO 1***

A) Calcular (mediante giros) el vértice de mayor componente imaginaria del triángulo circunscrito a la circunferencia que pasa por las raíces de la ecuación $z^3+\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i=0$, siendo los lados del triángulo tangentes a la circunferencia en las raíces anteriores.

(5 puntos)

B) La expresión general de la serie de Fourier correspondiente a una función $f_T(t)$ periódica de periodo T es:

$$f_T(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\left(\frac{2n\pi}{T}t\right)+b_n\,\mathrm{sen}\left(\frac{2n\pi}{T}t\right)$$

Dada la función $f(t)=t-H_1(t)(t-1)$, se pide representar gráficamente (representando más de un periodo) cuatro extensiones de la función $f(t)$ que coincidan con ella en el intervalo (0,2) y que verifiquen que su desarrollo en serie de Fourier sea

1. En senos y cosenos.
2. Únicamente en senos.
3. Únicamente en cosenos (en este caso, plantear sin resolver las integrales los coeficientes de la serie en función de $f(t)$).
4. En senos impares (es decir, n impar en la expresión de la serie).

(7 puntos)

Tiempo: 50 min.

- ***EJERCICIO 2***

A) Partiendo de la propiedad de la función Delta de Dirac ($\delta_a(t)=\delta(t-a)$):

Propiedad: Siendo *f* cualquier función continua en *a*,

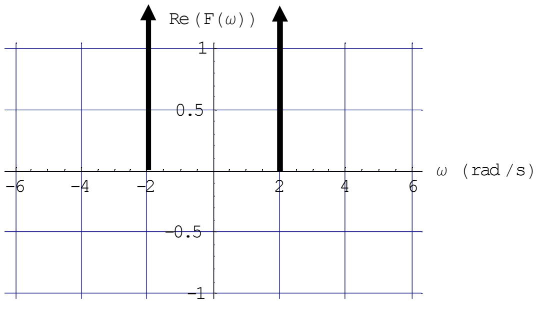
$$\int_c^d\delta(t-a)\cdot f(t)\cdot dt=\begin{cases}f(a) & c\le a\le d\\ 0 & \text{en caso contrario}\end{cases}$$

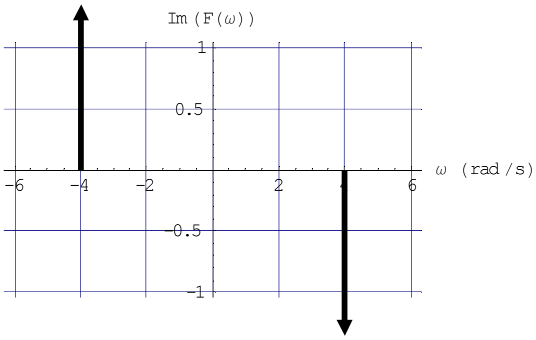
y la propiedad de simetría de la transformada de Fourier, obtener las transformadas de las siguientes dos funciones

$$f_1(t)=\delta(t-a);\ f_2(t)=e^{-iat}$$

B) Dadas estas dos gráficas:

AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS – PRIMER EXAMEN PARCIAL
27 DE ENERO DE 2003





correspondientes a la parte real e imaginaria, respectivamente, de una función $F(\omega)$, Obtener, razonadamente, su transformada inversa de Fourier.

(8 puntos)

Tiempo: 35 min.

DESCANSO DE 10 MINUTOS

AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS – PRIMER EXAMEN PARCIAL
27 DE ENERO DE 2003

SEGUNDA PARTE (TOTAL 1 h 30 min.)

- ***EJERCICIO 3***

A1) Hallar la transformada de Laplace de $g(t) = H(t-2) \cdot sen^2(t-4)$

(3,5 puntos)

A2) Hallar la transformada de Laplace de $f(t) = t \cdot Sh(t) \cdot sen(t)$

(3 puntos)

Nota: indicar las propiedades utilizadas.

A3) Hallar la transformada inversa de Laplace de $F(s) = \dfrac{1}{e^{as}(s^2 + 2bs + b^2)s}$ $\begin{cases} b \in \Re \\ a > 0 \end{cases}$

(3,5 puntos)

NOTA: tabla de transformadas de Laplace:

$f(t)$	t^n	$\text{Sh}(at)$	$\text{Ch}(at)$	e^{at}	$\text{sen}(at)$	$\cos(at)$
$F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$	$\dfrac{a}{s^2-a^2}$	$\dfrac{s}{s^2-a^2}$	$\dfrac{1}{s-a}$	$\dfrac{a}{s^2+a^2}$	$\dfrac{s}{s^2+a^2}$

Tiempo: 45 min.

- ***EJERCICIO 4***

A) ¿ Es posible encontrar una función $f(z)$, analítica en todo el plano complejo menos en el eje real negativo y z=0, cuya parte real sea $u(x,y) = L\sqrt{x^2+y^2}$? Justificar la respuesta. Si fuera posible, hallar $f'(z)$ en función de z, y en función de x e y. Calcular, asimismo la función $f(z)$.

(2 puntos)

B) 1º) Deducir la parte real e imaginaria de $\cos(z) = \cos(x+iy)$. (2 puntos)

2º) A partir del apartado anterior determinar en qué puntos del plano complejo es analítica la determinación principal de la función $f(z) = \left[\cos\left(\dfrac{\pi}{z}\right)\right]^{\frac{1}{2}}$ (6 puntos)

Tiempo: 45 min.