<u>AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS</u>

<u>EXAMEN 4/SEPTIEMBRE/01</u>

NOTA: La nota obtenida en esta parte se corresponde con el 80% de la nota final correspondiente a la asignatura de Ampliación de Matemáticas.

PRIMER EJERCICIO

A) Dada la función:

$$g(t) = H(t-2)\left[H(t-1) - H(t-4)\right]$$

donde

$$H(t-a) = H_a(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < a \\ 1 & \text{si} \quad t \geq a \end{cases}$$

se pide

A) Calcular **mediante la definición** las transformadas de **<u>FOURIER</u>** de $g(t)$ y de $g(2t)$ para todos los valores posibles de ω.

(2.5 puntos)

B) Partiendo de la propiedad de cambio de escala en la tranformada de Fourier,

$$\boxed{\text{Si } a \neq 0 \text{ y } \mathcal{F}\left[f(t)\right] = F(\omega) \rightarrow \mathcal{F}\left[f(at)\right] = \frac{1}{|a|} F\left[\frac{\omega}{a}\right]}$$

comprobarla para el caso anterior con $g(t)$ y $g(2t)$.

(2.5 puntos)

C) Calcular las transformadas de **<u>LAPLACE</u>** de $g(t)$ y de $g(2t)$ para todos los valores posibles de *s*.

(2.5 puntos)

D) Partiendo de la propiedad

$$\boxed{\mathcal{L}\left[H(t-a)f(t-a)\right] = e^{-as}\mathcal{L}\left[f(t)\right]}$$

comprobarla para el caso de $g(t)$ y $a = 2$. **Nota**: hacer cero todas las funciones para los valores negativos.

(2.5 puntos)

Tiempo: 1 h 15 m

AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS

EXAMEN 4/SEPTIEMBRE/01

SEGUNDO EJERCICIO

A) Hallar una función $v(x,y)$ armónica conjugada de la función

$$u(x,y)=\frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

expresando $u(x,y)+i\cdot v(x,y)$ como $f(z)$.

(3 puntos)

B) Demostrar que si $|f(z)|$ es constante en un dominio *D* en el que $f(z)$ es analítica, entonces también $f(z)$ es constante en *D*.

(3 puntos)

C) Deducir la expresión logarítmica de $\omega=\mathrm{argTh}\,z$ y calcular su mayor dominio de analiticidad para la determinación que cumple $-\frac{3\pi}{2}<\mathrm{Arg}\,z<\frac{\pi}{2}$,

(4 puntos)

Tiempo: 1 h

AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS

EXAMEN 4/SEPTIEMBRE/01

TERCER EJERCICIO

A) Dada la función

$$f(z) = \frac{Ch(z-1)}{z(z-1)}$$

Obtener, **justificando la respuesta**, los primeros términos de su desarrollo en potencias de $(z-1)$ hasta la potencia de $(z-1)^2$, válido en puntos próximos a $z_0 = 1$, indicando el dominio en que es válido dicho desarrollo.

(3.5 puntos)

B) Dado un contorno cerrado simple *C* que no pasa por los puntos del plano complejo $z = 0$ y $z = 1$, calcular, **razonadamente, todos los posibles valores** que puede tener la siguiente integral:

$$\oint_C \frac{1}{z \cdot (z-1)} dz$$

(3 puntos)

C) Calcular, **razonadamente** e **indicando las propiedades utilizadas**, la siguiente integral:

$$I = \int_0^{\infty} \frac{1}{\left(x^2+1\right)\cdot\left(x^2-1\right)} dx$$

(3.5 puntos)

Tiempo: 1 h