AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS
SEGUNDO EXAMEN PARCIAL – 19 DE MAYO DE 2001

PRIMER EJERCICIO

A) Enunciar el teorema de Laurent.

B) Se considera el desarrollo :

$$\frac{z}{1-\cos(\pi z)} = \sum_{n=-m}^{\infty} c_n z^n \quad , \qquad 0<|z-1|<r$$

Se pide:

i) Obtener razonadamente el valor de m.
ii) “ “ “ “ “ r.
iii) ¿De qué tipo es la serie anterior?
iv) Deducir los valores de c_i , i = 0, ±1, ±2, ±3

C) Hallar todos los posibles desarrollos de Laurent de $f(z) = \dfrac{1}{z^2(z+2)}$ alrededor de z_0 = -2, indicando la región de convergencia.

A partir de los desarrollos anteriores obtener el valor de

$$\oint_C \frac{dz}{z^2(z+2)}$$

cuando C pertenece a:

1º.- $D_1 : \{z / 0<|z+2|<2\}$
2º.- $D_2 : \{z / |z+2|>2\}$

AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS
SEGUNDO EXAMEN PARCIAL – 19 DE MAYO DE 2001

SEGUNDO EJERCICIO

A) Calcular la integral: $\int_{|z|=1/2} \frac{1}{1+z^2} \cdot sen\left(\frac{1}{2z}\right) dz$.

B) Calcular la integral: $\int_0^{\pi} sen^{2n}\theta \, d\theta$.

C) Calcular la integral: $\int_0^{\infty} \frac{sen^2 x}{x^2} dx$.

Nota: Utilizar la función: $f(z) = \frac{1-e^{2iz}}{z^2}$.

D) Sea f(z) una función con un polo simple en z_0, y C_0 un arco de circunferencia de radio r con centro en z_0, y que corresponde a un ángulo α. Demostrar que :

$$\lim_{r\to 0} \int_{C_0} f(z)\, dz = 2\pi i \cdot \left[\frac{\alpha}{2\pi} \cdot \mathrm{Res}\left[f(z), z_0 \right] \right]$$

sabiendo que si g(z) es analítica en un entorno de z_0, entonces,

$$\lim_{r\to 0} \int_{C_0} g(z)\, dz = 0$$