MATEMATIKA GEHIPENA – 2001/01/31ko AZTERKETA

Lehenengo zatiak bi ariketa dauzka, eta ariketetako bakoitza aparte egin behar da koaderno batean. ASTIA: 1 o. 45 min.

LEHENGO ARIKETA

A) Ondoriozta ezazu funtzio baten deribatuaren Laplace transformatuaren adierazpena.

(0.5 puntu)

B)

$$\mathfrak{L}\left[\cos(at)\right] = \frac{s}{s^2+a^2} \quad \forall s > 0$$

emanik, eta aurreko ataletik abiatuz, $\mathfrak{L}\left[\sin(at)\right]$ kalkula

(0.5 puntu)

C) $\mathfrak{L}\left[e^{at}\sin(t-a)\right]$ lor ezazu, kalkuluan erabilitako propietateak adieraziz.

(1 puntu)

D) Gauza bera $\mathfrak{L}\left[t^2 \cos t\right]$ kalkulatzeko.

(1 puntu)

E) Aurreko **A)** atala erabiliz, froga ezazu, baldin $\mathfrak{L}\left[f(t)\right] = F(s)$ bada,

$\mathfrak{L}\left[f''(t)\right] = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$ dela.

(1 puntu)

F) Kalkula

$$\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{6s-4}{s^2-4s+20}\right]$$

(1 puntu)

MATEMATIKA GEHIPENA – 2001/01/31ko AZTERKETA

BIGARREN ARIKETA

$$g(t) = \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)\left(H(t) - H(t-2)\right)$$

funtzioa emanda, hurrengoak eskatzen dira:

A) $g(t)$-rekin [0,1] tartean bat datorren **kosinu hutsezko** Fourier serie bat lortzea. n=1 gaira arteko serie horren batura grafikoki adieraztea.

(1.5 puntu)

B) $g(t)$-rekin [0,1] tartean bat datorren Fourier serierik **ahalik eta sinpleena** lortzea. n=1 gaira arteko serie horren batura grafikoki adieraztea.

(1.5 puntu)

C) $g(t)$ ren Fourier transformatua kalkulatzea.

(2 puntu)

OHARRA: PARTE HAU BUKATU ETA GERO 15 MINUTUKO ATSEDEN BAT IZANGO DA ETA JARRAIAN BIGARREN PARTE BAT.

MATEMATIKA GEHIPENA – 2001/01/31ko AZTERKETA

Bigarren zatiak bi ariketa dauzka, eta ariketetako bakoitza aparte egin behar da koaderno batean. ASTIA: 1 o. 30 min.

HIRUGARREN ARIKETA

A) Bitez $f(z)$ plano konplexu osoan analitikoa den funtzio bat, *C* mugalde itxi bakun bat, eta a ***C* mugaldearen gainean ez dagoen zenbaki konplexu bat.** Froga ezazu, **emandako urratsak labur zurituz**, honako berdintza hau:

$$\oint_C \frac{f'(z)}{z-a}\,dz = \oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^2}\,dz$$

(2 puntu)

B) $R: |z-2| \le 1$ eskualdea izanik eta

$$f(z) = (z+2)\cdot(z+3)$$

funzioa, Rko zein/zeintzu puntutan lortzen da $|f(z)|$ren balio maximo eta minimoa?

(1 puntu)

C)

$$f(z) = u(x,y) + i \cdot v(x,y)$$

funtzio bat emanda, z puntuan deribagarria, kartesiarretako Cauchy-Riemann ekuazioak **ondoriozta**.

(2 puntu)

MATEMATIKA GEHIPENA – 2001/01/31ko AZTERKETA

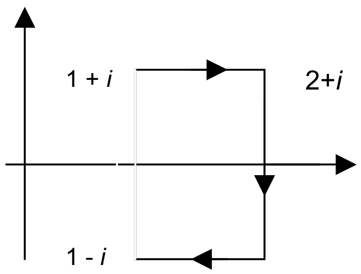
LAUGARREN ARIKETA

A) **i)** α **zenbaki konplexu ez oso** bat izanik ($\alpha \in \mathrm{C}, \alpha \notin \mathrm{Z}$),

$$F(z) = (z-1)^{\alpha}$$

funtzioaren analitikotasun eremurik handiena aurki

ii) *C* irudiko mugaldea izanik:



hurrengo integrala kalkula, **emaitza era binomikotan emanez**:

$$\mathrm{I} = \int_C (z-1)^{i-1} dz$$

Oharra: balio nagusiak har. (2.5 puntu)

B) Arrazoi ezazu non den analitikoa hurrengo funtzio hau:

$$f(z) = 2x^3y + i \cdot 3x^2y^2$$ (1 puntu)

C) $f(z) = u(x,y) + i \cdot v(x,y)$ izanik, polarretarako aldagai aldaketa bat egin eta gero

$$u'_{\rho} = u'_x \cdot \cos(\theta) + u'_y \cdot \sin(\theta)$$
$$v'_{\rho} = v'_x \cdot \cos(\theta) + v'_y \cdot \sin(\theta)$$

lortzen dela jakinik,

$$f'(z) = e^{-i\theta}(u'_{\rho} + i \cdot v'_{\rho})$$

dela **ondoriozta** ezazu.

(1.5 puntu)