AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS II – 14/SEPTIEMBRE/00

PRIMER EJERCICIO

A) Calcular $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta}{5-4\cos\theta}\,d\theta$

(3.5 puntos)

B) a) Hallar el dominio de analiticidad de la función: $f(z) = \mathrm{Log}\left(1 - z^2\right)$

Nota: Considérense valores principales

b) Obtener el desarrollo en serie de Taylor de la función anterior en un entorno de z=0, indicando dónde es válido dicho desarrollo.

(5 puntos)

Tiempo: 55 minutos

AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS II –14/SEPTIEMBRE/00

SEGUNDO EJERCICIO

A) Dadas las funciones de variable compleja:

$$f(z) = u(x,y) + i\left(x^2y^2 + x^2 + y^2\right)$$
$$g(z) = u(x,y) + i \cdot xy$$

a) Sabiendo que sólo una de ellas puede ser una función entera. Razonar cuál es.

b) Hallar la parte real $u(x,y)$ de la función entera del apartado anterior que toma en z=1 el valor ½.

c) Hallar el valor medio de Gauss de la función real $u(x,y)$, calculada en el apartado anterior , sobre la frontera de $|z-2+i| \le 2$.

(4 puntos)

B) Dadas las funciones:

$$f(z) = \frac{senz}{z^k}, \quad k \in !$$
$$g(z) = \frac{1+senz}{z^k}, \quad k \in !$$

a) Hallar los puntos singulares, determinando el tipo de singularidad.

b) Calcular el residuo de la función $g(z) = \dfrac{1+senz}{z^k}, \quad k \in !$, en los puntos singulares.

c) Utilizando la teoría de residuos y polos, calcular $\oint_C g(z)dz$, siendo C: $|z| = 2$.

(orientación positiva).

(5 puntos)

Tiempo: 50 minutos

15 minutos de DESCANSO (y queda un ejercicio más)

AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS II – 14/SEPTIEMBRE/00

TERCER EJERCICIO

A) Se desea obtener una serie de Fourier, $\varphi(t)$, constituída únicamente por **senos**, que coincida con la función $f(t) = -t + 2\pi$ en el intervalo $[\pi, 2\pi]$.

Plantear (sin resolver las integrales) el cálculo de los coeficientes de dicha serie y representar gráficamente $\varphi(t)$.

(4 puntos)

B) a) Demostrar que $\mathcal{L}\left[H_a(t)\cdot f(t-a)\right] = e^{-as}F(s), \ \forall s > s_0, \ a > 0$

siendo $F(s) = \mathcal{L}\left[f(t)\right] \quad \forall s > s_0$ (Transformada de Laplace) y

$$H_a(t) = \begin{cases} 1 & t \geq a \\ 0 & t < a \end{cases} .$$

b) Calcular la transformada de Laplace de $f(t)$, siendo

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 3 \\ \left(t + e^t\right) sen(t-3) & t \geq 3 \end{cases}$$

sabiendo que

$$☹\left[sen(at)\right] = \frac{a}{s^2 + a^2} \quad (s > 0)$$

(5 puntos)

C) Establecer, mediante la representación integral de Fourier, que:

$$\left\{\begin{matrix} t+2 & -1 < t < 0 \\ 1/2 & t = -1 \\ 0 & t < -1 \end{matrix}\right\} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\left(-\frac{2}{\omega} + \frac{\cos\omega}{\omega} + \frac{sen\,\omega}{\omega^2}\right) sen(\omega t)\, d\omega$$

(3.5 puntos)

Tiempo: 75 minutos