RESOLVER LOS SIGUIENTES CONTRASTES DE HIPÓTESIS Y CALCULAR EL VALOR-P CORRESPONDIENTE

1) En una muestra de tamaño 30 hay 18 jóvenes que no tienen hermanos. ¿Corrobora este resultado la hipótesis de que la proporción de hijos solos en la población de jóvenes de donde se ha tomado la muestra es del 50%?

$$\boxed{H_0 : p = 0,5 \,|\, H_a : p \neq 0,5}$$

La región crítica del contraste es

$$R.C.: \left\{ |\, \hat{p} - p_0 \,| > z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}} \right\}$$

- Sea D = Discrepancia entre el valor muestral y el propuesto por H_0.

En este caso $D = \hat{p} - p_0$, siendo

$$\hat{p} \to N\left(p_0, \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}} \right).$$

Entonces,

$$valor - p = \{\text{por ser un test bilateral}\} = P(|\, D \,| > \hat{D}) = P(D > \hat{D}) + P(D < -\hat{D}) =$$

$$= 2P(D > \hat{D}) = 2P(\hat{p} - p_0 > 18/30 - 0,5) =$$

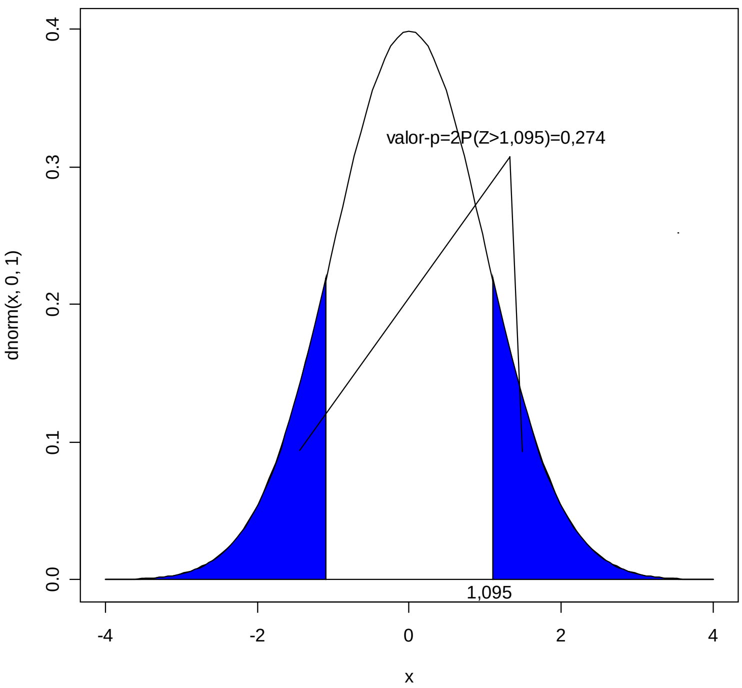
$$= 2P(\hat{p} - p_0 > 0,1) = 2P\left(\frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} > \frac{0,1}{\sqrt{\frac{0,5.0,5}{30}}} \right) = 2P\left(Z > 1,095\right) = 0,274$$

Como el valor-p es grande (>0,1) no hay evidencia suficiente para rechazar H_0 y podemos considerar que la proporción de hijos solos en la población es del 50%.

- Otra forma de resolverlo: Como el valor-p también se define como el mínimo nivel de significación a partir del cual podemos rechazar H_0, se tiene:

$$\hat{p} \to N\left(p_0, \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}} \right) \Rightarrow \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} \to N(0,1)$$

En la muestra, $\dfrac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} = \dfrac{18/30 - 0,5}{\sqrt{\frac{0,5.0,5}{30}}} = 1,095$



2) En un estudio sobre el peso de los recién nacidos en las ciudades A y B se obtuvieron los siguientes resultados (se supone normalidad):

	Tamaño de la muestra	Media muestral	Cuasivarianza muestral
A	**22**	**3,383**	**0,280**
B	**28**	**3,137**	**0,158**

¿Muestran los datos suficiente evidencia como para afirmar que las varianzas poblacionales son distintas?

$$\boxed{H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \mid H_a : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2}$$

La región crítica del contraste es

$$R.C.: \left\{ S_1^2 / S_2^2 \notin \left[F_{n-1,m-1;1-\alpha/2}, F_{n-1,m-1;\alpha/2} \right] \right\}$$

- Sea D = Discrepancia entre el valor muestral y el propuesto por H_0.

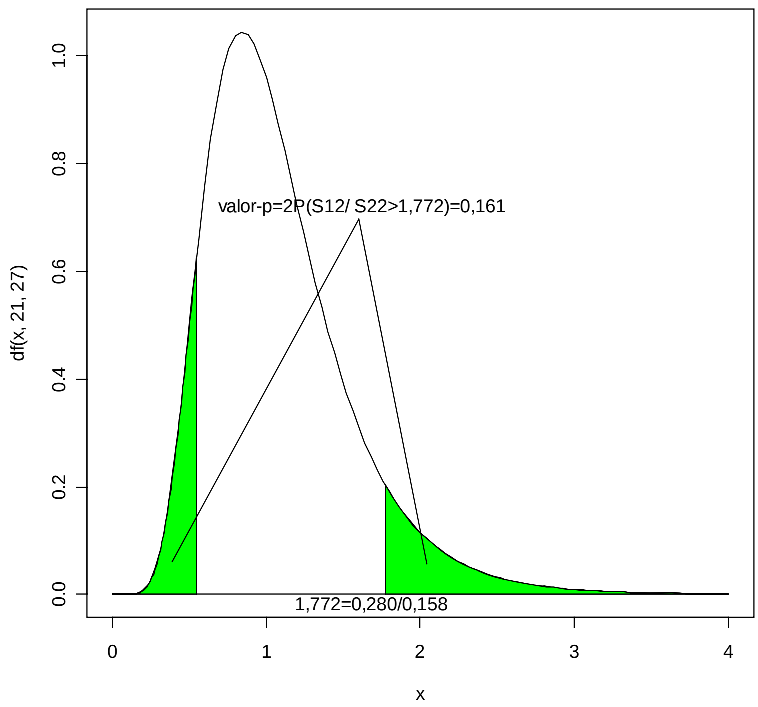
En este caso $D = \dfrac{S_1^2 / S_2^2}{\sigma_1^2 / \sigma_2^2} = \dfrac{S_1^2}{S_2^2}$ pues, para H_0 cierta, $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$, siendo $\dfrac{S_1^2}{S_2^2} \to F_{n-1,m-1}$

$$valor-p=\{\text{por ser un test bilateral}\}=2P(S_1^2/S_2^2>\hat{D})=2P(S_1^2/S_2^2>1,772)=$$
$$=2(1-pf(1.772,21,27))=0,161$$

Como el valor-p es grande (>0,1) se acepta la igualdad de las varianzas poblacionales.

- Otra forma de resolverlo: Calcularemos el mínimo nivel de significación a partir del cual podemos rechazar H_0:

$$\frac{S_1^2}{S_2^2}\to F_{n-1,m-1}\ (\text{si } H_0 \text{ es cierta})$$



3) Con los datos del ejercicio anterior contrastar que el peso medio de los recién nacidos en A es mayor que en B.

$$\boxed{H_0:\mu_1=\mu_2\ |\ H_a:\mu_1>\mu_2}$$

Como en el ejercicio anterior hemos visto que las varianzas poblacionales son iguales, aunque desconocidas, la región crítica del contraste es

$$R.C.:\left\{\overline{x}_1-\overline{x}_2>t_{n+m-2;\alpha/2}S_p\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}\right\}$$

- En este caso la discrepancia es $D=\overline{x}_1-\overline{x}_2$, de modo que si H_0 es cierta se cumple

$$\frac{\overline{x}_1-\overline{x}_2}{S_p\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}}\rightarrow t_{n+m-2}$$

Por tanto,

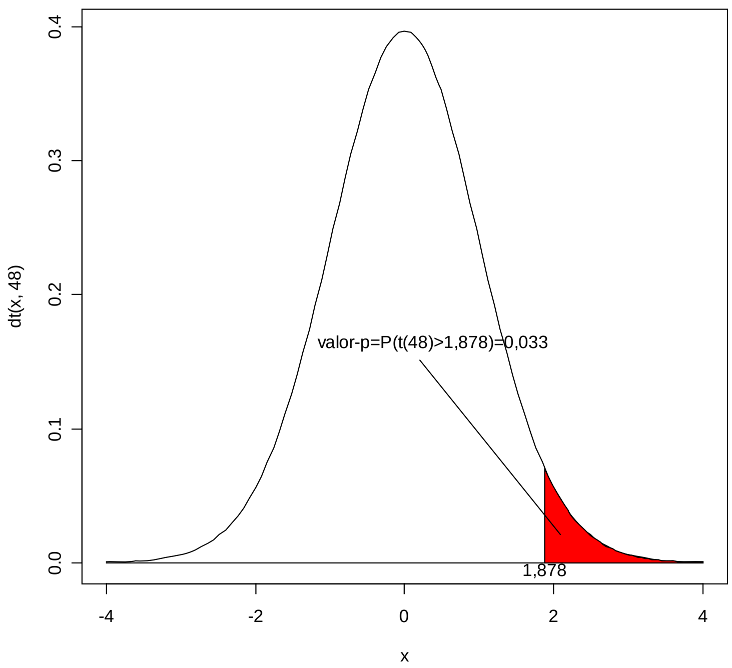
$$valor-p=\{\text{por ser un test unilateral}\}=P(D>\hat{D})=P(\overline{x}_1-\overline{x}_2>3,383-3,137)=$$

$$=P(\overline{x}_1-\overline{x}_2>0,246)=P\left(\frac{\overline{x}_1-\overline{x}_2}{S_p\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}}>\frac{0,246}{S_p\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}}\right)=$$

$$=P\left(\frac{\overline{x}_1-\overline{x}_2}{S_p\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}}>\frac{0,246}{\sqrt{\frac{21.0,28+27.0,158}{22+28-2}}\sqrt{\frac{1}{22}+\frac{1}{28}}}\right)=P(t_{48}>1,878)=1-pt(1.878,48)=0,033$$

Como se ha obtenido un valor-p intermedio entre 0.01 y 0.1, con la muestra extraída no habría argumentos suficientes ni para aceptar ni para rechazar H_0, por lo que sería conveniente repetir el muestreo con tamaños muestrales mayores.

- Otra forma de hacerlo: calculando el mínimo nivel de significación a partir del cual se rechaza H_0:



$$1,878=\frac{3,383-3,137}{\sqrt{\frac{21.0,28+27.0,158}{22+28-2}}\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}}$$