

EJERCICIOS DE REPASO – TEMAS 7, 8 y 9

1) La cantidad de aire que introduce una máquina que infla globos es una variable aleatoria normal. Un globo explota si el volumen introducido es superior a la media más dos veces la desviación típica. Se pide: 1º) Probabilidad de que al ser inflados 30 globos elegidos al azar explote alguno de ellos. 2º) Probabilidad de que la cuasivarianza muestral sobreestime la varianza poblacional.

2) La duración de un determinado proceso químico sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica igual a 3. En una muestra tomada al azar de diez realizaciones del proceso las duraciones observadas fueron: 2,4,6,6,6,7,7,8,10,14. Se pide: 1º) Coeficiente de variación de la muestra. 2º) Estimador de máxima verosimilitud de la duración media. 3º) Probabilidad de que, en valor absoluto, la diferencia entre la media muestral y la real sea menor que 1.

3) Sabiendo que una variable aleatoria X tiene por función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\theta}{(x + \theta)^2}, & x > 0 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

siendo $\theta > 0$ un parámetro desconocido, se pide: 1º) Función de distribución. 2º) $P(X > 5\theta)$. 3º) Si se extrae una m.a.s. de tamaño 2 de la variable aleatoria X y se obtienen los valores 1 y 2, calcular el estimador de máxima verosimilitud de θ .

4) Los valores que una cierta variable aleatoria toma en una muestra de tamaño 20 de una población normal son: 15-16-18-30-17-20-20-21-22-19-20-21-22-25-26-24-19-18, habiéndose perdido los dos últimos datos. Se pide: 1º) Calcular esos dos datos perdidos sabiendo que la media muestral es 20,9 y la cuasivarianza muestral 13,463. 2º) Obtener un intervalo de confianza al 95% para la media de la población.

5) Con objeto de obtener un intervalo de confianza para la varianza de una variable aleatoria que representa el número de piezas defectuosas por lote, se eligieron al azar 10 lotes y se anotó el número de defectuosas encontradas en cada uno: 12-2-19-41-25-28-20-32-27-31. Suponiendo distribución normal, se pide: 1º) Intervalo de confianza buscado tomando $1-\alpha = 0,95$. 2º) Dar una estimación puntual de σ y de μ .

6) Las diferencias en segundos entre el vencedor y el segundo clasificado, tomadas en 10 carreras sobre el mismo circuito y con los mismos participantes, son: 5,0 – 3,4 – 7,1 – 5,3 – 7,7 – 8,1 – 2,7 – 6,9 – 1,3 – 5,4. Suponiendo normalidad, se pide: 1º) Estimación puntual de la varianza poblacional. 2º) Intervalo de confianza para la media al nivel del 98%. 3º) Probabilidad de que la varianza muestral sea más del doble de la varianza de la población.

7) La envergadura de los individuos de una determinada población de aves es una variable aleatoria normal de varianza 144 cm^2 . a) Calcular el número mínimo de individuos que habrá que seleccionar para que como mínimo sea 0,95 la probabilidad de que la envergadura media de la muestra difiera de la poblacional en menos de 6 cm. b) Con ese tamaño muestral obtener un intervalo de confianza para la media al 95% si la media muestral es 55. c) ¿Cuánto se debe aumentar el tamaño de la muestra para conseguir el mismo intervalo, pero con un coeficiente de confianza del 99%?

8) El tiempo X que transcurre entre dos llegadas consecutivas de clientes a un taller de reparación de automóviles es una variable aleatoria cuya función de densidad es:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{k}{60} e^{-\frac{kx}{60}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

1º) Demostrar que la función anterior es verdaderamente una función de densidad. 2º) Con objeto de estimar el parámetro k se ha tomado una m.a.s. de tamaño 5, obteniéndose los siguientes valores en minutos: 3, 15, 15, 20 y 7. Estimar k por el método de máxima verosimilitud.

9) Sea una muestra aleatoria simple X_1, X_2, \dots, X_n proveniente de una población normal de media 2 y varianza 1. Calcular: 1º) Distribuciones de probabilidad de los estadísticos $T = \sum_{i=1}^n X_i$ y $(n-1)S^2$, donde S^2 es la cuasivarianza muestral. 2º) $P(T > 12)$ y $P(S < 1)$ si el tamaño de la muestra es 5.

10) Consideremos una población normal tal que $\sigma^2 = 100$. Tomamos una muestra aleatoria simple de tamaño 100 de la que sabemos que la media muestral es 120. Se pide: a) Con estos datos construir, si es posible, un intervalo de confianza para la media de la población al nivel de confianza $1-\alpha = 0,99$. b) Calcular el mínimo tamaño muestral necesario para que al mismo nivel de confianza el valor de la media muestral y el de la media poblacional no difieran en más de una unidad.

11) El número de tubos de ensayo defectuosos por remesa sigue una distribución normal de media μ , asegurando el fabricante que μ nunca es mayor que 12. Un cliente se ha quejado de que en los nueve últimos envíos el número medio de tubos defectuosos por remesa ha sido 17,792 con una cuasivarianza muestral de 36. Se pide: 1º) Contrastar si la hipótesis del fabricante es o no aceptable al nivel 0,05. 2º) Calcular el valor-p.

12) Dada una m.a.s. de tamaño 10 correspondiente a una población $N(\mu, 1)$ se desea contrastar $H_0: \mu = 5$ frente a $H_a: \mu < 5$, para lo que se adopta una región crítica del tipo $\{\text{Media muestral} < c\}$. Se pide: a) Obtener c para un nivel de significación $\alpha = 0,05$. b) Probabilidad de cometer error de tipo II cuando $\mu = 4$.

13) Para efectuar el envío de una cierta mercancía a un punto distante de la factoría 42 km, el encargado de logística de la empresa *XZX* puede optar entre dos recorridos. Durante 35 días controla el tiempo que se tarda por el camino A: 38,6 minutos de media y 9,39 minutos de desviación típica; durante 30 días controla el tiempo por el camino B, obteniendo una media de 35,1 minutos y una desviación típica de 4,47 minutos. ¿Se puede concluir que se tarda menos por el camino B? Razonar la respuesta.

14) La vida media (variable aleatoria normal) de unas pilas de níquel y cadmio es 8,5 horas. Tras realizar un cambio en el método de producción se toma una muestra de 10 pilas y se observa que la media muestral es 8,62 horas y la desviación típica muestral 0,15 horas. Un ingeniero de la empresa cree que el cambio debe aumentar la duración media de las pilas. ¿Está en lo cierto? Tomar $\alpha = 0,05$. Calcular el valor-p del contraste.

15) Se sabe que la proporción de artículos defectuosos en un proceso de manufactura es 0.05. El proceso se vigila de forma periódica tomando muestras aleatorias de tamaño 20 e inspeccionando las unidades. Si se encuentran dos o más unidades defectuosas en la muestra, el proceso se detiene y se considera como “fuera de control”. a) Enunciar las hipótesis nula y alternativa correspondientes a la situación descrita. b) Obtener la probabilidad de cometer error de tipo I. c) Calcular la probabilidad de cometer error de tipo II si la proporción de artículos defectuosos es 0.2.