CONCEPTOS BÁSICOS SOBRE CONTRASTES DE HIPÓTESIS

- **CONTRASTES PARAMÉTRICOS Y NO PARAMÉTRICOS**

Un contraste o test de hipótesis es una prueba estadística referida a una cierta afirmación que se plantea sobre alguna característica desconocida de la población.

Si la afirmación o hipótesis se refiere al valor de un parámetro desconocido de la población (media, varianza, etc.) tendremos un

contraste paramétrico,

Si la hipótesis se refiere a cuál es la distribución de probabilidad de la población en estudio hablaremos de

contraste no paramétrico

Así pues, supongamos una población que sigue una distribución N(15,σ), siendo el parámetro σ desconocido. Supongamos que hacemos una hipótesis acerca del posible valor de la desviación típica, por ejemplo que σ=2; estaríamos ante un contraste paramétrico.

Sin embargo, si no conocemos la forma de la distribución poblacional, la hipótesis que formularíamos sería que esa distribución es, por ejemplo, exponencial. En este caso estamos ante un contraste no paramétrico.

- **HIPÓTESIS NULA E HIPÓTESIS ALTERNATIVA. ESTADÍSTICO DE CONTRASTE**

El planteamiento general del **contraste de hipótesis paramétrico** consiste en lo siguiente:

El punto de partida es una población cuya función de masa o de densidad f(x; θ) depende de un parámetro θ desconocido, que toma valores dentro de un espacio paramétrico Ω. Formulamos una hipótesis sobre el parámetro:

$$\boxed{\begin{array}{c} H_0\text{: } \theta = \theta_0 \\ \textbf{(HIPÓTESIS NULA)} \end{array}}$$

y con la ayuda de una muestra aleatoria simple $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, procedente de la población, obtenemos un **estadístico de contraste** $h(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ que es utilizado para inferir si la hipótesis formulada se acepta, o bien si se rechaza y, en consecuencia, se acepta otra hipótesis:

$$\boxed{\begin{array}{c} H_a\text{: } (\theta \neq \theta_0 \text{, o bien } \theta < \theta_0 \text{, o bien } \theta > \theta_0) \\ \textbf{(HIPÓTESIS ALTERNATIVA)} \end{array}}$$

En un test de hipótesis siempre se acepta, provisionalmente, como verdadera la hipótesis nula H_0. Esta hipótesis es sometida a comprobación experimental frente a la hipótesis alternativa H_a. Como consecuencia de la comprobación experimental, la hipótesis nula podrá seguir siendo aceptada como verdadera o, por el contrario, tendremos que rechazarla y aceptar como verdadera la hipótesis alternativa.

En ocasiones suele haber dificultad a la hora de elegir H_o y H_a. En general, es conveniente seguir la siguiente regla:

- H_0 → *Nada está ocurriendo*
- H_a → *Algo está ocurriendo*

Normalmente H_a representa la hipótesis que hay que demostrar y, para aceptarla, la muestra debe presentar una gran evidencia en contra de H_0.

Ejemplo:

- (Año 1960)

Población de varones vizcaínos de 19 años

Altura media: $\mu = 1{,}75$

$\Downarrow$

- (Año 2010)

¿Ha aumentado la altura?

Muestra aleatoria simple $n = 100$

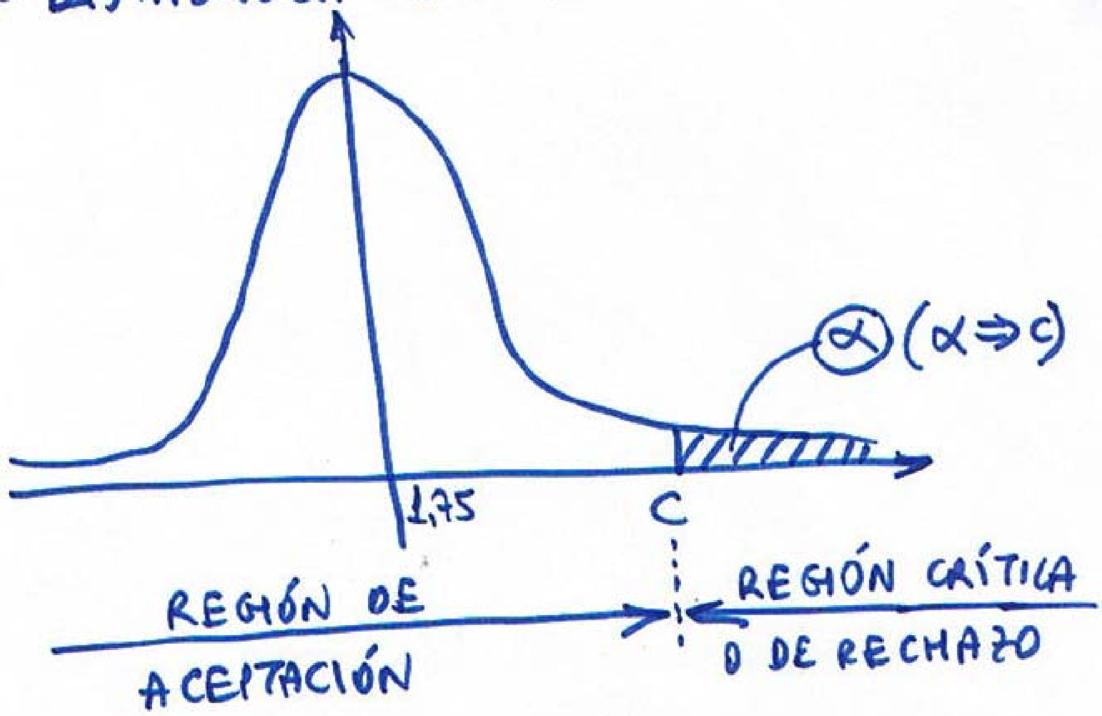
$\bar{x} = 1{,}79$

$\Updownarrow$

$$\boxed{H_0 : \mu = 1{,}75 \text{ frente a } H_a : \mu > 1{,}75}$$

$\bar{x}$ es el estadístico de contraste

• Distribución de $\overline{X}$ si Ho es cierta:



• Regla de decisión:

Si $1{,}79 > C \Rightarrow$ Ha ocurrido algo raro. Se rechaza, por tanto, Ho y se acepta H_a

Si $1{,}79 \leq C \Rightarrow$ No ha ocurrido nada raro. No se puede rechazar Ho

En este ejemplo queda patente la esencia de un contraste de hipótesis: si fuera cierta la hipótesis nula H_0, el estadístico de contraste $h(x_1, x_2, ..., x_n)$ (en el ejemplo $\overline{X}$) debería comportarse de una determinada manera, de acuerdo a su distribución (distribución en el muestreo). Si extraída la muestra acontece un suceso de poca probabilidad para $h(x_1, x_2, ..., x_n)$,

- o bien ha ocurrido algo muy improbable al elegir una muestra “muy rara”,

- o, lo que es más probable, la hipótesis nula es falsa.

- **CONTRASTES BILATERALES Y UNILATERALES**

Los tipos de contrastes que vamos a estudiar son:

I	$H_o: \theta = \theta_0$ frente a $H_a: \theta \neq \theta_0$	Bilateral
II	$H_o: \theta = \theta_0$ frente a $H_a: \theta < \theta_0$	Unilateral por la izquierda
III	$H_o: \theta = \theta_0$ frente a $H_a: \theta > \theta_0$	Unilateral por la derecha

Los contrastes de la forma I son bilaterales y los de las formas II y III son unilaterales, al estar formuladas las correspondientes hipótesis alternativas por ambos lados o por uno solo, respectivamente.

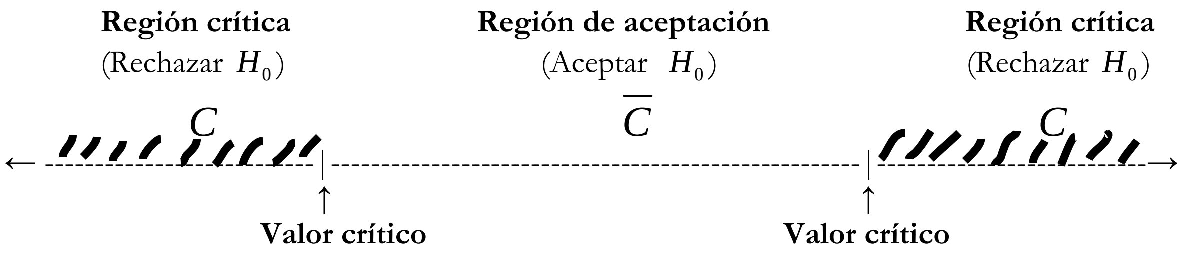
- **REGIÓN CRÍTICA Y REGIÓN DE ACEPTACIÓN. VALOR CRÍTICO**

La **región crítica** o de **rechazo** está constituida por el conjunto de valores que puede tomar el estadístico de contraste $h(x_1, x_2, ..., x_n)$ para los cuales se rechaza la hipótesis nula H_0.

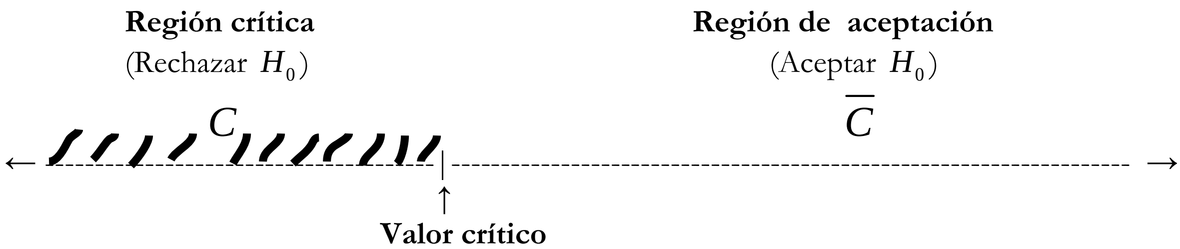
La **región de aceptación** está constituida por el conjunto de valores que puede tomar el estadístico de contraste $h(x_1, x_2, ..., x_n)$ para los cuales se acepta la hipótesis nula H_0.

El valor o valores que separan la región crítica de la región de aceptación reciben el nombre de **valor o valores críticos**.

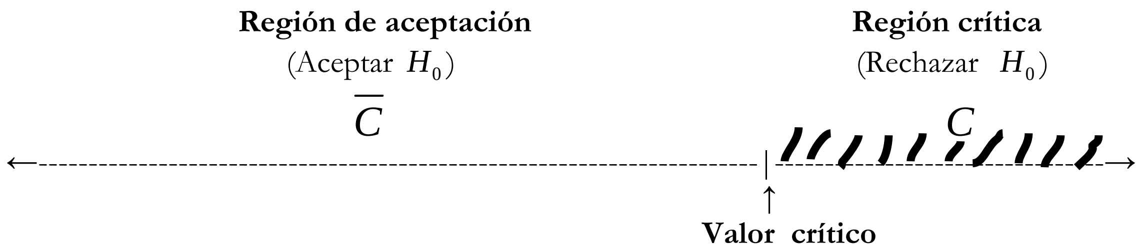
- Cuando el contraste es de la forma I, o sea, bilateral, las regiones crítica y de aceptación son como se indican a continuación:



- Si el contraste es de la forma II, es decir, unilateral por la izquierda, estas regiones serán:



- Si el contraste es de la forma III, es decir, unilateral por la derecha, entonces las regiones de aceptación y crítica son:



Un **contraste o test de hipótesis viene definido por la región crítica *C*.** Definida C, la regla de decisión es la siguiente:

- Si $h(x_1, x_2, ..., x_n) \in C \Rightarrow$ Se rechaza H_0 y se acepta H_a
- Si $h(x_1, x_2, ..., x_n) \in \overline{C} \Rightarrow$ Se acepta H_0 y se rechaza H_a

- **ERROR DE TIPO I, ERROR DE TIPO II, NIVEL DE SIGNIFICACIÓN Y POTENCIA DEL CONTRASTE**

En un test de hipótesis estadístico tenemos que elegir entre dos alternativas o decisiones, existiendo la posibilidad de cometer error. Existen cuatro resultados posibles al tomar la decisión:

		Estados de la naturaleza	
		H_0 es verdadera	**H_0 es falsa**
Decisiones	**Aceptamos H_0 (y rechazamos H_a)**	*Decisión correcta*	***Error de tipo II:*** $\beta\ (\theta)$
	Rechazamos H_0 (y aceptamos H_a)	***Error de tipo I;*** α	*Decisión correcta*

Las definiciones precisas de error de tipo I y error de tipo II, mediante probabilidades condicionadas, son:

- Error de tipo I $=$ P(Rechazar $H_0|H_0$ es verdadera) $= \alpha$
- Error de tipo II $=$ P(Aceptar $H_0|H_0$ es falsa) $= \beta(\theta)$

La probabilidad de cometer error de tipo I se llama **nivel de significación** del test y se representa por $\boldsymbol{\alpha}$ (valor pequeño). Su significado es: si realizamos 100 veces el contraste, o sea si elegimos 100 muestras, en alrededor del $100\alpha\%$ de los casos cometeríamos error de tipo I.

A diferencia de la anterior, la probabilidad de cometer error de tipo II no es fija porque depende del valor del parámetro θ (ya que **H_a es compuesta** en el sentido de que el parámetro puede tomar infinitos valores, al contrario de **H_0**, que es **simple**, porque θ solo toma un valor); por tanto, el error de tipo II se denota por $\beta(\theta)$.

Ambos errores son de naturaleza bien distinta, como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo: Una empresa que fabrica cables de acero, cuya resistencia media a la rotura es 3800 kg/m^2, está interesada en averiguar si un cierto cambio en el proceso de fabricación ha aumentado o no esa resistencia media (se supone que la resistencia de cada cable es una variable aleatoria). Para ello se toma una muestra al azar de n cables para efectuar el siguiente contraste:

$$\boxed{H_0\text{: } \mu=3800 \text{ frente a } H_a\text{: } \mu>3800}$$

(test unilateral por la derecha)

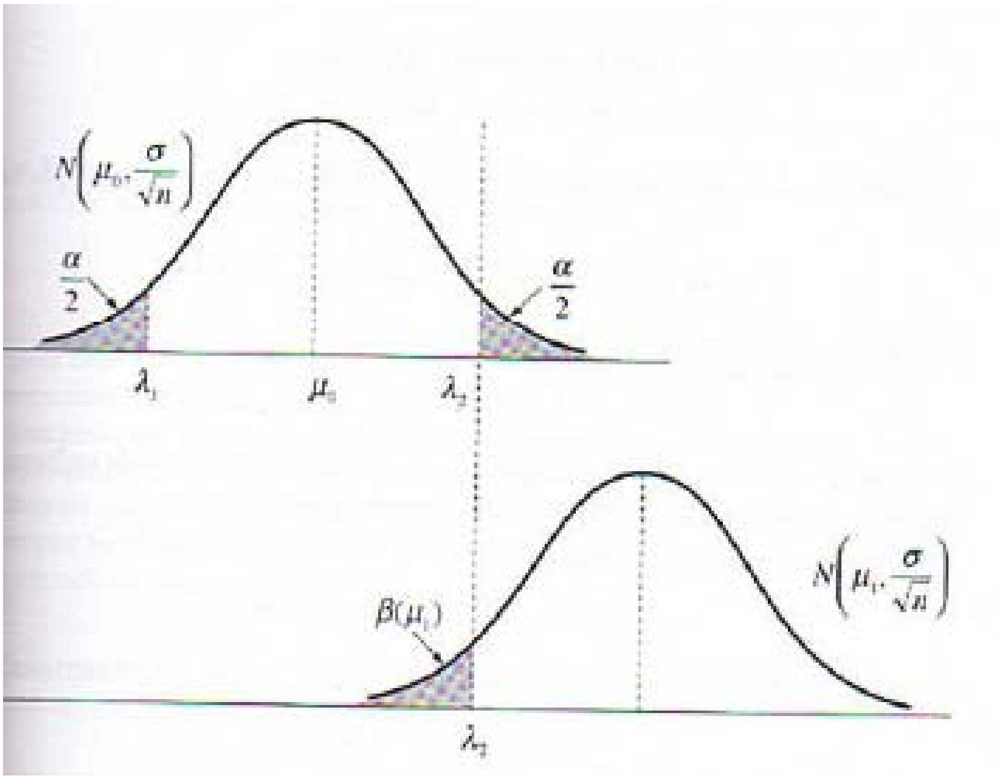
En este caso, si rechazamos H_0 (y aceptamos H_a) cuando H_0 es cierta (error de tipo I) incurriríamos en un grave problema de seguridad al considerar que los cables tienen una resistencia a la rotura superior a la real, mientras que si aceptamos H_0 cuando es falsa (error de tipo II) incurriremos en el coste derivado de no considerar positivo el cambio en el proceso de fabricación, cuando en realidad produce una mejora efectiva, lo que es menos grave.

Otro concepto importante es el de **potencia del contraste.** Se define este valor como la **probabilidad de aceptar H_a cuando H_a es cierta**:

$$\textbf{Potencia del contraste} = \mathrm{P}(\text{Aceptar } H_a | H_a \text{ es cierta}) =$$
$$= \mathrm{P}(\text{Rechazar } H_0 | H_0 \text{ es falsa}) = 1 - \beta(\theta)$$

Este valor expresa la capacidad que tiene el test para tomar como verdadera una hipótesis alternativa cierta y, como es evidente, depende de θ, pues H_a verdadera implica infinitos valores.

Ejemplo: Consideremos el contraste H_0: $\mu = \mu_0$ frente a H_a: $\mu \neq \mu_0$ en una población normal con σ conocida. Sabemos que si la hipótesis nula es cierta, entonces el estimador $\overline{X} \to N(\mu_0, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$. Fijado el nivel de significación α, podemos calcular dos valores z_1 y z_2 tales que $P(z_1 < \overline{X} < z_2) = 1-\alpha$. Si elegida una muestra $\overline{x} \in (z_1, z_2)$ aceptamos H_0 y si $\overline{x} \notin (z_1, z_2)$ rechazamos H_0. Luego la probabilidad de cometer error de tipo I es α, como se indica en la figura. Sin embargo, la probabilidad de cometer error de tipo II no se puede calcular nada más que en función de μ. En la figura se observa este valor en el caso de que μ fuera μ_1, $\beta(\mu_1)$.



En este gráfico se ve claramente que no es posible reducir a la vez los errores de tipo I y de tipo II. De hecho, si disminuimos uno aumenta el otro. La única forma de que disminuyan ambos errores simultáneamente es aumentando el tamaño de la muestra n (o sea aumentando la información).

El criterio más común a la hora de diseñar un test de hipótesis consiste en:

1º) Fijar un nivel de significación α pequeño. De este modo nos aseguramos una probabilidad baja de cometer error de tipo I.

2º) Para ese valor fijo de α, buscar el contraste que haga máxima la potencia; es decir, el que minimice la probabilidad de tipo II.

Los contrastes que estudiaremos más adelante son contrastes de máxima potencia para un determinado nivel de significación α.

- **VALOR-p**

La decisión tomada en un contraste de hipótesis depende, evidentemente, del nivel de significación elegido. En una misma situación se pueden tomar las dos decisiones opuestas si se eligen distintos valores de α, pues al variar α varía la región crítica.

Se denomina **valor-p**, **asociado a una muestra** de un test, a la **probabilidad de que la discrepancia entre el estadístico de contraste y el valor previsto por H_0 sea superior a la discrepancia proporcionada por la muestra**.

Consideremos el ejemplo de los cables de acero:

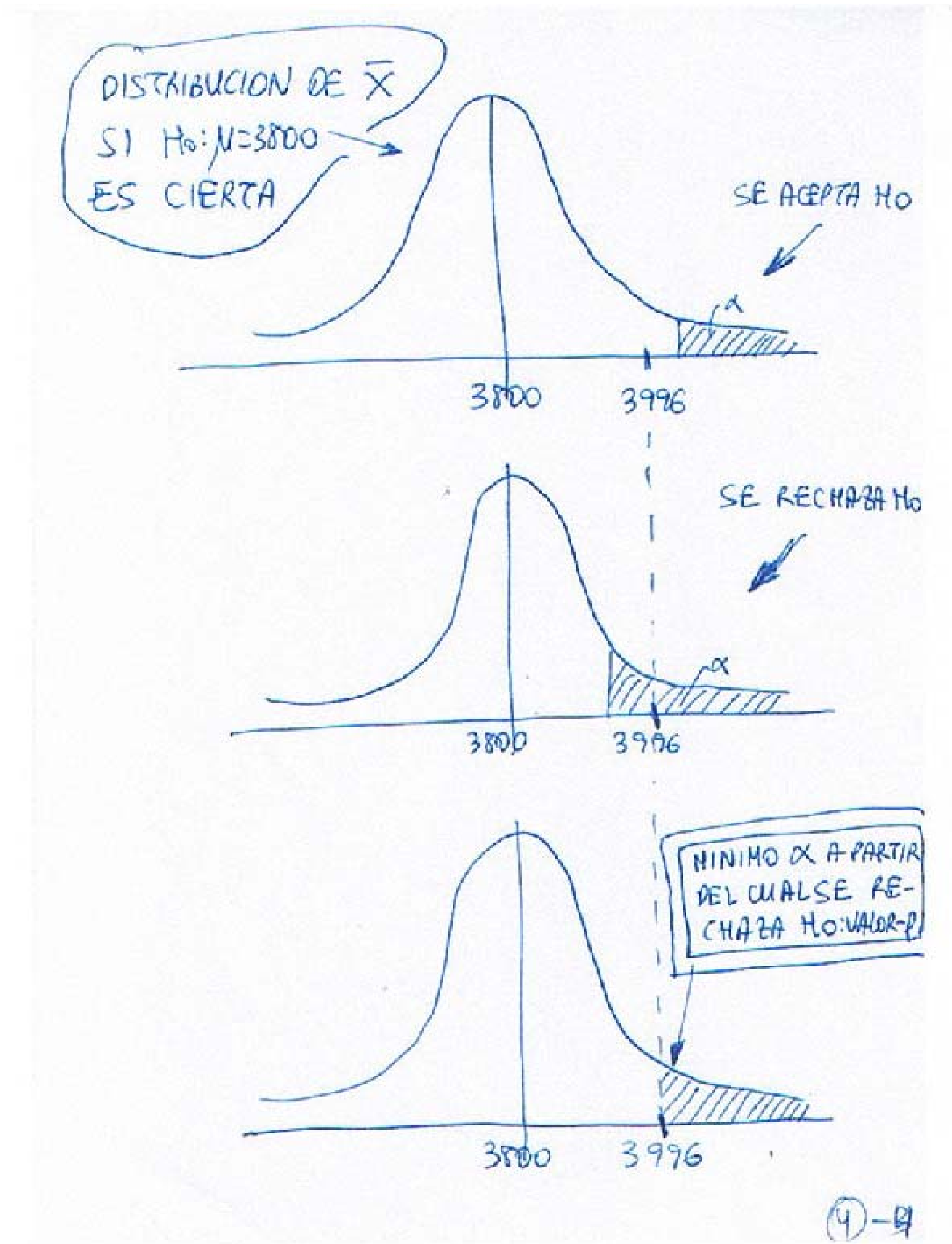
$$H_0: \mu=3800 \text{ frente a } H_a: \mu>3800$$

y supongamos que en la muestra concreta elegida se ha obtenido $\bar{x} = 3996$. Entonces, el valor-p será:

$$P_{H_0}(\bar{X} - 3800 > 3996 - 3800) = P_{H_0}(\bar{X} > 3996),$$

valor que se obtiene a partir de la distribución del estimador $\bar{X}$.

Como se ve en la parte inferior de la figura, el valor-p expresa la probabilidad exacta de cometer error de tipo I; es decir, el riesgo en que se incurre al rechazar la hipótesis nula cuando es cierta, con la muestra obtenida. El valor-p se puede definir también como el **mínimo nivel de significación a partir del cual se empieza a rechazar H_0**.



- Un **valor-p > 0,1** es un riesgo excesivo para rechazar la hipótesis nula, luego **se acepta H_0.**

- Un **valor-p < 0,01** representa un grado de seguridad razonable para **rechazar H_0.**

- **Valores intermedios** implican una situación de ambigüedad y lo conveniente sería extraer una muestra de mayor tamaño.

- **RELACIÓN ENTRE CONTRASTES DE HIPÓTESIS E INTERVALOS DE CONFIANZA**

Como se puede deducir fácilmente, la región de aceptación de un contraste bilateral coincide con el correspondiente intervalo de confianza.