Una Ecuación de Fisher-Kolmogorov con Velocidad de Propoagación Finita..

J. M. Mazón

Dept. de Análisis Matemático, Universitat de Valencia.

La más simple de las ecuaciones de Fisher-Kolmogorov unidimensional es la ecuación de reacción-difusión

$$u_t = Du_{xx} + ku(1-u), \tag{1}$$

que describe un modelo simple para la evolución de la densidad $u(t,x)$ de una población. El trabajo original de Fisher de 1937 considera esta ecuación como modelo para la propagación de un gen favorable.

La ecuación (1) tiene dos estados estacionarios, $u \equiv 0$, $u \equiv 1$. Estas soluciones corresponden, respectivamente, a la ausencia y a la saturación de la población. El modelo también soporta soluciones que describen poblaciones localmente saturadas que se expanden en regiones vacías. Estas soluciones poseen frentes que conectan las regiones donde $u = 1$ con las que $u = 0$ y tienen forma de ondas viajeras que se mueven a velocidad constante y que no cambian la forma cuando se propagan, i.e., son soluciones de la forma $u(t,x) = v(x - \sigma t)$. Es bien conocido que la velocidad σ a la que la onda se propaga se puede determinar en función del coeficiente de difusión D y de la tasa de crecimiento k, exactamente como $\sigma = \sqrt{4Dk}$. Esto tiene la desventaja de proporcionar una gran velocidad cuando k es muy grande, pudiendo exceder la tasa máxima del proceso de transporte. Esta contradicción física requiere la modificación del proceso de transporte descrito por la clásica difusión Fickiana Du_{xx} que da lugar a una velocidad infinita de propagación. Por tanto es deseable tener una teoría de propagación no lineal en la cual se tenga en cuenta la acotación del proceso de transporte. Una de estas teorías fue propuesta por Ph. Rosenau in 1992 e independientemenet por Y. Brenier en 2003, por medio de ecuaciones de difusión con flujo limitado. En los últimos años hemos estudiado este tipo de ecuaciones, en particular la denominada por Brenier ecuación relativista del calor. Nuestro propósito es cambiar en la parte difusiva la ecuación lineal de difusión por esta ecuación. Más presisamente, estudiar el problema

$$\begin{cases} u_t = \nu \operatorname{div}\left(\dfrac{uDu}{\sqrt{u^2 + \frac{\nu^2}{c^2}|Du|^2}} \right) + ku(1-u) & \text{en} \quad Q_T = (0,T) \times \mathbb{R}^N \\ \\ u(0,x) = u_0(x) & \text{en} \quad x \in \mathbb{R}^N. \end{cases} \tag{2}$$

Probamos que para cada dato inicial $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^N)$ con $0 \leq u_0 \leq 1$, el problema (2) tiene una única solución de entropía $u(t)$ satisfaciendo

$$\operatorname{supp}(u(t)) \subset \{x \in \mathbb{R}^N \ : \ d(x, \operatorname{supp}(u_0)) \leq ct\} \quad \text{para todo } t \geq 0. \tag{3}$$

Cuando $\nu \to \infty$ en (2) llegamos a la la ecuación

$$\begin{cases} u_t = c \operatorname{div}\left(u \dfrac{Du}{|Du|} \right) + ku(1-u) & \text{en} \quad Q_T = (0,T) \times \mathbb{R}^N \\ \\ u(0,x) = u_0(x) & \text{en} \quad x \in \mathbb{R}^N. \end{cases} \tag{4}$$

para la que obtenemos soluciones explícitas.