Unicidad en el problema inverso de conductividad

Juan A. Barceló

Universidad Politécnica de Madrid

El objetivo de este curso es presentar cómo distintas técnicas del análisis armónico son utilizadas en la teoría de problemas inversos. Para este fín, hemos escogido el problema de conductividad inverso, también llamado tomografía de impedancia eléctrica.

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio acotado en cuyo interior existe un material descrito por una función no negativa $\gamma(x)$, (conductividad). El problema de conductividad inverso trata de recuperar γ a partir de mediciones en $\partial\Omega$. Estas mediciones están dadas por la aplicación Dirichlet a Neumann Λ_γ. Para un dato de frontera Dirichlet f

$$\Lambda_\gamma(f) = \left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\partial\Omega},$$

donde u es la solución del problema

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\gamma \nabla u) = 0 & \text{en} \quad \Omega \\ u = f & \text{en} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

y ν es el vector normal exterior a $\partial\Omega$.

El curso está dedicado al estudio de la unicidad asociada al problema, es decir

$$\text{Si} \quad \Lambda_{\gamma_1} = \Lambda_{\gamma_2} \implies \gamma_1 = \gamma_2?.$$

Las técnicas que utilizaremos serán principalmente de análisis armónico. En nuestro estudio, será importante entender en $\mathbb{R}^2$ las soluciones de las $\bar{\partial}-$ecuaciones

$$\bar{\partial} u = a(x)u + b(x)\bar{u},$$

donde $\bar{\partial} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_1} + i\frac{\partial}{\partial x_2}\right)$ y haremos uso de estimaciones de Carleman.