Unicidad para el problema de conductividad inverso en dimensión mayor o igual que 3

J.A. Barceló

November 27, 2008

Curso impartido en la Universidad del Pais Vasco.

Noviembre, 2008.

Cuando emprendas tu viaje hacia Ítaca
debes rogar que el viaje sea largo,
lleno de peripecias, lleno de experiencias.
No has de temer ni los lestrigiones ni a los cíclopes,
ni la cólera del airado Posidón.
Nunca tales mostruos hallarás en tu ruta
si tu pensamiento es elevado, si una exquisita
emoción penetra en tu alma y en tu cuerpo.
Los lestrigones y los cíclopes
y el feroz Posidón no podrán encontrarte
si tú no los llevas ya dentro, en tu alma,
si tu alma no los conjura ante ti.
Debes rogar que el viaje sea largo,

que sean muchos los dias de verano;
que te vean arriba con gozo, alegremente,
a puertos que tu antes ignorabas.
Que puedas detenerte en los mercados de Fenicia,
y comprar unas bellas mercancias:
madreperlas, coral, ébano, y ambar,
y perfumes placenteros de mil clases.
Acude a muchas ciudades de Egipto
para aprender, y aprender de quienes saben.
Conserva siempre en tu alma la idea de Ítaca:
llegar allí, he aquí tu destino.
Mas no hagas con prisa tu camino;
mejor será que dure muchos años,
y que lleges, ya viejo, a la pequeña isla,
rico de cuanto habrías ganado en el camino.
No has de esperar que Ítaca te enriquezca:
Ítaca te ha concedido ya un hermoso viaje.
Sin ellas, jamás habrías partido;
mas no tiene otra cosa que ofrecerte.
Y si lo encuentras pobre, Ítaca no te ha engañado.
Y siendo ya tan viejo, con tanta experiencia,
sin duda sabrás ya qué significan las Ítacas.

Ítaca. Konstantínos Kaváfis.

1 Introdución

En los problemas inversos de frontera, uno espera descubrir propiedades internas de un cuerpo acotado Ω al hacer mediciones en la frontera $\partial\Omega$. Estos problemas surgen en campos tales como medicina (detección de embolia pulmonar, [39]) geología (determinación de depósitos minerales en la Tierra), industria, economía, etc, (puede verse [13], donde se presenta una panorámica de este tipo problemas a distintos campos, especialmente la medicina). El modelo matemático apropiado para estos problemas está dado, normalmente, por una ecuación (o sistema) en derivadas parciales en Ω y las mediciones en la frontera quedan reflejadas por una cierta aplicación entre funciones sobre el contorno. El problema inverso trata de determinar los coeficientes de la ecuación a partir del conocimiento de dicha aplicación sobre el contorno.

Quizás el ejemplo más representativo es el problema de conductividad inverso, también llamado *tomografía de impedencia eléctrica*. Supongamos que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, dominio acotado con frontera suave, representa un cuerpo conductor eléctrico. La conductividad del cuerpo, en un principio puede depender de la dirección (el tejido musculoso del cuerpo humano), la representamos por una matriz simétrica y definida positiva $\gamma = (\gamma^{ij})$ en Ω. Si suponemos que no existen sumideros o fuentes de corriente, por la ley de Ohm la ecuación para el potencial u en Ω está dada por

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\gamma^{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) = 0 \quad \text{en} \quad \Omega. \tag{1}$$

Si conocemos el potencial f en $\partial\Omega$, el potencial inducido u en Ω satisface el problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\gamma^{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) = 0 & \text{en} \quad \Omega, \\ u = f & \text{en} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{2}$$

La aplicación voltaje a corriente o Dirichlet a Neumann Λ_γ, mide el flujo de corriente generado en la frontera por un potencial aplicado sobre la misma. Se define dicha aplicación por

$$\Lambda_\gamma(f) = \sum_{i,j=1}^{n} \gamma^{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\bigg|_{\partial\Omega}, \tag{3}$$

donde u es la solución de (2) y ν_i es la componente n-ésima del vector unitario normal exterior a $\partial\Omega$. *El problema de conductividad inverso trata de la determinación de γ a partir del conocimiento de Λ_γ.* El primero queplanteó este problema fué A. Calderón [11], quien consideró la cuestión para conductividades isótropas, es decir aquellas que no dependen de la dirección.

Si suponemos que $\gamma(x)$ es una función real y no negativa y consideramos la matriz real $\gamma(x)\mathbf{I}$, donde $\mathbf{I}$ es la matriz identidad, (1) se reduce a la ecuación en la forma divergencia

$$\operatorname{div}(\gamma\nabla u) = 0, \qquad x \in \Omega, \tag{4}$$

y la aplicación Dirichlet a Neumann (3) a

$$\Lambda_\gamma(f) = \gamma\frac{\partial u}{\partial \nu}, \tag{5}$$

donde $\frac{\partial}{\partial\nu}$ indica la derivada con respecto al vector normal unitario exterior ν a $\partial\Omega$.

Calderón demuestra que la derivada de Frechet (primera aproximación) en conductividades constantes de la aplicación $\gamma \longmapsto Q_\gamma$, donde Q_γ es la forma cuadrática asociada a Λ_γ, es inyectiva. Utiliza las soluciones complejas de la óptica geométrica asociadas al laplaciano

$$e^{x\cdot\rho}, \qquad x \in \mathbb{R}^n, \qquad \rho \in \mathbb{C}^n, \qquad \rho\cdot\rho = 0,$$

y da un procedimiento para aproximar conductividades "casi constantes" a partir de la aplicación Dirichlet a Neumann (también utilizando este tipo de soluciones especiales).

Muchos de los avances que se han hecho en este problema, han sido consecuencia de la construcción de las soluciones de la óptica geométrica para la ecuación en derivadas parciales que se estudia. En la siguiente sección, daremos un esbozo de la demostración de Calderón y en el resto del curso se presentará cómo se ha generalizado su procedimento, de lo que da idea la amplia literatura aparecida desde este trabajo pionero.

Si γ tiene suficiente regularidad, la ecuación (4) puede reducirse a la ecuación de Schrödinger para un potencial adecuado. Más específicamente, si u es solución de (4) y llamamos $v = \gamma^{1/2}u$ tenemos :

$$\operatorname{div}(\gamma\nabla u) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \operatorname{div}(\gamma\nabla(\gamma^{-1/2}v) = 0$$

$$\operatorname{div}\left(-\frac{1}{2}\gamma^{-1/2}\nabla\gamma v+\gamma^{1/2}\nabla v\right)=0 \quad\iff\quad \gamma^{1/2}\Delta v-v\Delta\gamma^{1/2}=0$$

$$\Delta v-q(x)v=0 \quad \text{con } q(x)=\frac{\Delta\gamma^{\frac{1}{2}}}{\gamma^{\frac{1}{2}}}.$$

Luego a la hora de construir soluciones para la ecuación (4), será suficiente con construirlas para la ecuación de Schrödinger con el potencial indicado.

En términos generales el problema de conductividad inverso está centrado en el estudio de la aplicación

$$\Lambda\,:\,\gamma\longmapsto\,\Lambda_\gamma. \tag{6}$$

La naturaleza del problema inverso de conductividad es diferente según tratemos dominios en el plano, $n=2$, o en dimensión superior. Veremos en las secciones siguientes que el uso de las llamadas soluciones de la óptica geométrica hace que el problema esté sobredeterminado si $n\geq 3$ y formalmente bien determinado en el plano.

Las soluciones de la óptica geométrica vienen dadas por las funciones de la forma (próximas a las exponenciales de Calderón)

$$e^{x\cdot\rho}(1+\psi(x,\rho)), \qquad x\in\mathbb{R}^n, \qquad \rho\in\mathbb{C}^n, \qquad \rho\cdot\rho=0, \tag{7}$$

con $\psi(x,\rho)\longrightarrow 0$ cuando $|\rho|\longrightarrow\infty$ en algún sentido. En el caso de dimensión mayor que dos, los resultados en el problema inverso de conductividad dependen del comportamiento de funciones del tipo (7) en alta frecuencia (es decir, para $|\rho|$ grande), mientras que en $n=2$ es preciso el estudio en toda la gama de frecuencias.

En el curso nos vamos a ocupar solamente de las propiedades de inyectividad de Λ, llamado **problema de unicidad inverso**. Hay, sin embargo, otros aspectos de igual o mayor interes que este, cuya mención no queremos omitir.

Problema de estabilidad, continuidad de la aplicación inversa de Λ.

Problema de caracterización de Λ, es decir, ¿cuál es el rango de Λ?. este es un problema abierto, su solución sería muy útil para el tratamieno de datos numéricos reales que son aproximaciones discretas de valores en el rango de Λ.

Problema de reconstrucción de γ a partir de Λ_γ. Es de mucho interés y casi todos los resultaos positivos están basados en las soluciones complejas de la óptica geométrica [37], [40].

Por último está el **problema de reconstrucción numérica**: Dar un algoritmo para encontrar una aproximación de la conductividad a partir de un número finito de medidas de voltaje y corriente [13], [28], [24].

Sobre la **unicidad**, esto es, inyectividad de la aplicación Λ, en el caso isotrópico el primer resultado fué obtenido por Kohn y Vogelius [26], [27] para conductividades reales y analíticas a trozos. El resultado es parcial, en el sentido de que el conocimiento de Λ_γ determina γ y $\frac{\partial \gamma}{\partial \nu}$ pero solo en $\partial\Omega$.

Para $n \geq 3$, Sylvester y Uhlmann generalizan la idea de Calderón [47], [48] y prueban unicidad para conductividades en $\mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$.Este trabajo será analizado en la tercera sección del curso. Relajar la regularidad es uno de los objetivos fundamentales de modelos reales, ya que, por ejemplo, en el cuerpo humano la conductividad sufre cambios muy bruscos al pasar de un tejido interno a otro. Afinando las técnicas de Silvester y Uhlmann, R. Brown [8] obtiene unicidad ($n \geq 3$) para conductividades en $\mathcal{C}^{\frac{3}{2}+\epsilon}(\overline{\Omega})$ y, Päivärinta, Panchenco y Uhlmann [41] en $\mathcal{C}^{\frac{3}{2}}(\overline{\Omega})$. En dimensión mayor o igual que tres se ha utilizado la ecuación de Schrödinger asociada a la conductividad y hasta la fecha, no se ha avanzado más.

En dimensión 2 y con técnicas diferentes a las usadas en $n \geq 3$, aunque sigue utilizando la ecuación de Schrödinger, Nachman [38] obtiene unicidad para conductividades en $W^{2,p}(\Omega)$ para algún $p > 1$. La reducción de la ecuación (4) a un sistema de orden 1:

$$u \text{ solución de } \quad \operatorname{div}(\gamma \nabla u) = 0 \quad \text{en } \Omega,$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \gamma^{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} \partial u \\ \bar{\partial} u \end{pmatrix} \quad \text{solución de} \quad \begin{pmatrix} \bar{\partial} & 0 \\ 0 & \partial \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & q \\ \bar{q} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix},$$

$$q = -\frac{1}{2}\partial \log \gamma, \qquad \partial = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_1} + i\frac{\partial}{\partial x_2}\right) \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2;$$

permite a Brown y Uhlmann [9] obtener el resultado de unicidad para conductividades en $W^{1,p}(\Omega)$ y $p > 2$. La conjetura de Calderón, unicidad para conductividades en $L^\infty(\Omega)$, ha sido resuelta en $n = 2$ por Astala y Päivärinta [4] utilizando técnicas de variable compleja (aplicaiones quasiconformes).

En el caso anisótropo, donde la conductividad depende de la dirección, el problema de conducividad en el plano está resuelto para conductividades suficientemente suaves, al poder ser reducido, usando coordenadas isotermales, al caso isotrópico [46]. Aparte de que este tipo de coordenadas no existen en $n \geq 3$, hay que observar que si $\Psi : \overline{\Omega} \longrightarrow \overline{\Omega}$ es un difeomorfismo de clase $\mathcal{C}^\infty$ tal que $\Psi|_{\partial\Omega} = I_d$ (matriz identidad) y

$$\tilde{\gamma} = \frac{((D\Psi)^t \cdot \gamma(D\Psi)) \circ \Psi^{-1}}{|DetD\Psi|},$$

donde $D\Psi$ designa la diferencial de Ψ y $(D\Psi)^t$ su traspuesta, entonces $\tilde{\gamma} \neq \gamma$ y $\Lambda_{\tilde{\gamma}} = \Lambda_\gamma$, véase [25]. Esto supone una obstrucción a la unicidad, que es la existencia del difeomorfismo Ψ con la condición en $\partial\Omega$ antes indicada. Se conjetura que hay unicidad salvo este difeomerfismo. Esta conjetura es equivalente al problema de determinar una métrica riemanniana a partir de la aplicación Dirichlet a Neumann asociada a su operador de Laplace-Beltrami [33].

En todos los resultados mencionados hasta ahora, la imagen de la aplicación Dirichlet a Neumann Λ_γ la hemos supuesto conocida en toda la frontera de Ω. Sin embargo, en la gran mayoria de los modelos reales, solamente podemos medir esta en parte de de la frontera. Desde hace unos 5 años este problema ha sido estudiado, y con respecto a la unicidad con exito. Dedicaremos la cuarta sección del curso al estudio de este problema.

En dimensión $n \geq 3$ Bukhgeim y Uhlmann [10] prueban unicidad global para la ecuación de Schrödinger con potencial acotado, con datos Dirichlet en toda la frontera y datos Neumann en "la mitad de la frontera". La demostración descansa en el uso de una estimación de Carleman con función peso lineal, para la construcción de las soluciones complejas de la óptica geométrica asociadas a la correspondiente ecuación de Schrödinger. Este resultado implica el análogo para la ecuación de conductividad, con esta en $\mathcal{C}^2$. Knudsen [31] prueba este resultado para conductividades en $\mathcal{C}^{\frac{3}{2}+\epsilon}$, $\epsilon > 0$. Kening, Sjöstrand y Uhlmann [23] extiende el resultado de Bukhgeim y Uhlmann [10] al hacer uso de estimaciones de Carleman con funciones peso no lineales.

En dimensión 2 el primer resultado es de Imanuvilov, Uhlmann y Yamamoto [19] donde se demuestra el resultado de Kening, Sjöstrand y Uhlmann [23]. Otra vez, la demostración descansa en la construcción de las soluciones complejas de la óptica geométrica haciendo uso de estimaciones de Carleman con función peso degenerada. En [20], los mismos autores dan el primer resultado, también en dimensión 2, de unicidad donde tanto los datos Dirichlet como Neumann están medidos solo en una parte de la frontera.

Sobre **estabilidad**, el primer resultado significativo de estabilidad interior es debido a Alessandrini, [2] y [3], para $n \geq 3$. Utilizando las técnicas desarrolladas por Sylvester y Uhlmann (reducción de la ecuación en forma divergencia a la ecuación de Schrödinger de energía cero y uso de las soluciones complejas de la óptica geométrica de "alta frecuencia"), obtiene el siguiente resultado de estabilidad logarítmica:

$$\|\gamma_1 - \gamma_2\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C\omega\left(\|\Lambda_{\gamma_1} - \Lambda_{\gamma_2}\|_{H^{1/2} \longrightarrow H^{-1/2}}\right),$$

donde lafunción $\omega(t)$ satisface, si t es pequeño, $\omega(t) \leq C|\log t|^{-\alpha}$, para algún α tal que $0 < \alpha < 1$. Le exige a las conductividades que estén en $W^{2,2+s}(\overline{\Omega})$, $s > \frac{n}{2}$.

Alessandrini también demuestra que si las conductividades γ_i no son continuas, no hay estabilidad ($n \geq 2$).Si designamos por $B_r = \{x \in \mathbb{R}^n \;:\; |x| < r\}$ la bola centrada en el origen y de radio r, tomando como $\Omega = B_1$, $\gamma_1 = 1$ y $\gamma_2 = 1 + \chi_{B_r}$, entonces $\|\gamma_1 - \gamma_2\|_{L^\infty(\Omega)} = 1$ pero $\|\Lambda_{\gamma_1} - \Lambda_{\gamma_2}\|_{H^{1/2} \longrightarrow H^{-1/2}} \geq 2r \longrightarrow 0$ si $r \longrightarrow 0$. Los detalles pueden encontrarse en [2] y [44].

Para $n = 2$ será necesario obtener toda la información de la aplicación Dirichlet a Neumann. Nachman en [37] y [38] da un procedimiento de reconstrucción de la conductividad γ a partir de Λ_γ. Utilizando este procedimiento de reconstrución, Liu [34] obtiene un resultado de estabilidad como el de Alessandrini, pero en $\mathbb{R}^2$ y para conductividades en $W^{2,p}(\Omega)$, $1 < p < 2$, (estudia el problema en la escuación de Schrödinger asociada). El resultado de Liu es extendido en [6] para conductividades en $\mathcal{C}^{1+\epsilon}(\Omega)$, $\epsilon > 0$. Profundizando en las tecnicas del trabajo de Astala y Päivärinta [4], Tomeu Barcelo, Faraco y Ruiz obtienen estabildad para conductividades en $\mathcal{C}^{\epsilon}(\Omega)$, $\epsilon > 0$. Recientemente, este resultado es extendido, en el sentido de medir la estabilidad en $\|.\|_{L^2(\Omega)}$, por Clop, Faraco y Ruiz [14].

Estabilidad para datos Dirichlet Neumann parciales en la frontera ha sido estudiado por Heck y Wang en $n \geq 3$. En $n = 2$, este problema todavía no ha sido tratado.

Todos lo resultados de estabilidad comentados son del tipo estabilidad logarítmica, como el obtenido por Alessandrini y que hemos comentado. Mandache [32] demuestra que para el problema de conductividad inverso, la mejor estabilidad que se puede obtener es del tipo logarítmico

Se han hecho muchos esfuerzos para diseñar un **algoritmo numérico** que permita recuperar la conductividad γ de Λ_γ. En [7] y [36] se da una panorámica del problema numérico.

Los métodos numéricos que se han utilizado hasta la fecha son del tipo:

1. Methods solving the linearized problem.

2. Iterative methods, such as regularized output least squares algorithms.

3. Statical inversion.

4. Layer stripping.

5. $\bar{\partial}-$methods using exponentially growing solutions.

Nos encontramos con un primer problema abierto y es la caracterización de Λ, es decir: ¿cuál es el rango de la aplicación $\gamma \longmapsto \Lambda_\gamma$?. Su solución sería muy útil para el tratamiento de datos numéricos reales que son aproximaciones discretas de valores del rango de Λ. Su conocimiento permitiría entender mejor cuáles son los experimentos más relevantes.

Es cierto que hay algoritmos que producen útiles reconstrucciones, pero solo algunos de ellos están matemáticamente justificados. Más precisamente, de los algoritmos resolviendo el problema no lineal completa, (excluyendo los métodos que linealizan el problema),hasta ahora sólo los de la clase 5 nos permiten un análisis matemático riguroso y una cierta fiabilidad en los resultados.

Los problemas inverso de conductividad se presenta en la práctica, de una manera más natural en dimensión 3. Pero en este caso, hay un problema para obtener un algoritmo numérico del método de reconstrucción dado por Nachman [37] (y Novikov, de manera independiente). La razón es la siguiente, para $n \geq 3$ las soluciones complejas de la óptica geométrica solamente se puede garantizar su existencia si el parámetro $|\rho|$ es grande. Como estas soluciones se comportan como $e^{ix\cdot\rho}$ para $|\rho|$ grande, deben de oscilar mucho en $\partial\Omega$, y desde un punto de vista numérico, obtener información de algo que oscila mucho es bastante malo.

Este problema si está resuelto en dimensin dos por Knudsen, [29] y [30]. Aquí se utiliza el método de reconstrucción de Brown y Uhlmann [9], pero se evita utilizar las frecuencias altas, usando el resultado de Barceló, Barceló y Ruiz [6], que recupera la conductividad, con fórmula explícita, en $\rho = 0$:

$$\gamma^{1/2}(x) = m_{11}(-Q^t, x, 0) - \overline{m_{21}(-Q^t, x, 0)}.$$

¿Hay algun progreso en dimensión mayor o igual a 3?.

Cornean, Knudsen y Siltanen [15], demuestran que en dimensión tres, soluciones complejas de la óptica geométrica para la ecuación de conductividad existen para frecuencias complejas suficientemente pequeñas, sin imponer ninguna suposición de regularidad en la conductividad. Demuestran que la conductividad puede ser recuperada como un limite , cuando el módulo de la frecuencia tiende a cero, de las soluciones complejas de la óptica geométrica. Usando el $\bar{\partial}-$metodo de scattering inverso y argumentando como en el caso bidimensional, dan un algoritmo para reconstruir conductividades cercanas a constantes y con al menos una derivada.

1.1 Notación.

- Ω dominio acotado en $\mathbb{R}^n$ con frontera $\partial\Omega$ suave.
- $\nu(x) \equiv \nu$ vector unitario normal exterior a $\partial\Omega$ en $x \in \partial\Omega$.
- $\partial_\xi = \xi \cdot \nabla u$, $\xi \in \mathbb{S}^{n-1}$.
- $\mathcal{C}^k(\Omega)$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$: espacio de las funciones contunuas con derivadas contiuas hasta el orden k en Ω.
- $\mathcal{C}^k(\overline{\Omega})$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$: restrcciones a $\overline{\Omega}$ de funciones de $\mathcal{C}^k(\mathbb{R}^n)$.
- $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$: espacio de las funciones infinitamente derivables con soporte en Ω.
- $D^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial_{x_1}^{\alpha_1}} .... \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial_{x_n}^{\alpha_n}}$, con $\alpha = (\alpha_1, .., \alpha_j, ..., \alpha_n)$, α_j enteros no negativos $j = 1, 2, .., n$.
- $\mathcal{D}(\Omega)$ (también designado $\mathcal{D}'(\Omega)$): espacio de las distribuciones T en Ω, dual de $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$, es decir, para cualquier compacto $K \subset \Omega$ existe $C(K)$ y un entero $m(K) \geq 0$ con $| < T, \psi > | \leq C(K) \sup_{|\alpha| \leq m(K)} \|D^\alpha \psi\||_\infty$ para todo $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$.
- $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$: espacio de las funciones de Schwartz. $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ con $x^\alpha D^\beta u$ acotada para todos los multiindeces α, β con α_j y β_j enteros no negativos, $j = 1, 2, ..n$.

- $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$: espacio de las distribuciones temperadas, dual de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, es decir, $T \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ tal que existe C y un entero $m \geq 0$ con $| < T, \psi > | \leq C \sup_{|\alpha|,|\beta| \leq m} \|x^\alpha D^\beta \psi\|_\infty$ para todo $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

- $H^s(\mathbb{R}^n)$, $s \in \mathbb{R}$: espacio de Sobolev de las distribuciones temperadas $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, o funciones $L^2(\mathbb{R}^n)$ si $s \geq 0$, tal que $(1 + |\xi|^2)^{s/2} \in L^2(\mathbb{R}^n)$. $H^0(\mathbb{R}^n) = L^2(\mathbb{R}^n)$.

- $H^s(\Omega)$ $s \geq 0$: espacio de las restricciones a Ω de las funciones de $H^s(\mathbb{R}^n)$.

- $H_0^s(\Omega)$ $s \geq 0$: clausura de $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ en $H^s(\Omega)$.

- $H^{-s}(\Omega)$ $s \geq 0$: dual de $H_0^s(\mathbb{R}^n)$.

- $W^{m,p}(\Omega)$, m un entero no negativo: espacio de Sobolev de las funciones en $L^p(\Omega)$ cuyas derivadas, en el sentido de las distribuciones, de orden $\leq m$ estan en $L^p(\Omega)$. $W^{s,p}(\mathbb{R}^n) = H^s(\mathbb{R}^n)$ $s \geq 0$.

- La aplicación (operador traza) $\gamma_0 u = u|_{\partial\Omega}$ definido en $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ tiene una extensión continua a $H^s(\Omega)$ si $s > \frac{1}{2}$. Si designamos a esta extensión también por γ_0, definimos $H^{s-\frac{1}{2}}(\partial\Omega) = \gamma_0\left(H^s(\Omega)\right)$ si $s > \frac{1}{2}$. En particular $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) = \gamma_0\left(H^1(\Omega)\right)$ y $H^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega) = \gamma_0\left(H^2(\Omega)\right)$.

- $H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ es el dual de $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$. $H^{-\frac{3}{2}}(\partial\Omega)$ es el dual de $H^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega)$.

2 Resultado de Calderón.

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $n \geq 2$ un dominio acotado con frontera suave. Los resultados que vamos a comentar en este curso son casi todos válidos para $\partial\Omega$ Lipschitz. $\gamma(x)$ es una función real, positiva y acotada en Ω.

Dado el problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\gamma \nabla u) = 0 & x \in \Omega \\ u = f & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{8}$$

Se considera la integral de Dirichlet asociada a (8)

$$Q_\gamma(f) = \int_\Omega \gamma(x) |\nabla u(x)|^2 dx.$$

$Q_\gamma(f)$ mide la potencia necesaria para mantener el potencial f en la frontera. Se polariza la forma cuadrática Q_γ, para obtener la forma bilineal, que seguimos designando por Q_γ,

$$Q_\gamma(f,g) = \int_\Omega \gamma(x)\nabla u(x)\nabla \bar{v}(x)dx = \int_{\partial\Omega} g(x)\Lambda_\gamma(f)(x)d\sigma(x),$$

donde u y v son las soluciones de (8) con dato en la frontera f y g respectívamente.

Conocer Q_γ es equivalente a conocer la aplicación Dirichlet a Neumann Λ_γ. Calderón estudia la aplicación

$$Q \ : \ \gamma \longmapsto Q_\gamma$$

y demuestra que la derivada de Frechet de esta aplicación, su aproximación lineal, en conductividades constantes es inyectiva. Más especícicamente, considerando $\gamma = 1$, la derivada de Frechet está dada por

$$dQ_{\gamma=1} \ : \ \varphi \longmapsto dQ_{\gamma=1}\varphi,$$

donde

$$dQ_{\gamma=1}\varphi(f,g) = \int_\Omega \varphi(x)\nabla u(x)\nabla \bar{v}(x)dx$$

y, como antes, u y v son las soluciones de (8), con dato f y g respectívamente.

Demostrar que esta aplicación es inyectiva es equivalente a demostrar que los productos de los gradientes de las funciones armónicas son densos en $L^2(\Omega)$, o lo que es lo mismo, si $\int_\Omega \varphi(x)\nabla u(x)\nabla \bar{v}(x)dx = 0$ para funciones armónicas u y v con datos en $\partial\Omega$ f y g respectívamente, entonces $\varphi = 0$.

Calderón considera las soluciones exponenciales complejas

$$u = e^{x\cdot\rho}, \qquad = e^{-x\cdot\rho}, \qquad \rho \in \mathbb{C}^n, \qquad \rho\cdot\rho = 0.$$

Si $\rho = m + ik$, donde $m, k \in \mathbb{R}^n$ con $m \cdot k = 0$ y $|m| = |k|$, enonces $\rho\cdot\rho = 0$ y

$$\int_\Omega \varphi(x)\nabla u(x)\nabla \bar{v}(x)dx = -2|k|^2 \int_\Omega e^{2ix\cdot k}\varphi(x)dx = 0,$$

lo que nos muestra que $\widehat{\varphi\chi_\Omega}(k) = 0$ y por lo tanto $\varphi = 0$.

3 Unicidad para el problema de conductividad inverso en dimensión mayor o igual que 3.

Sea Ω un dominio acotado, que suponemos con frontera suave, en cuyo interior existe un material descrito por un potencial q, supondremos que $q \in L^r(\mathbb{R}^n)$ para algún $r \geq 1$. Intentamos recuperar q de mediciones en la frontera de Ω. Estas mediciones están dadas por la aplicación Dirichlet a Neumann (D-N). Para un dato de frontera Dirichlet $f \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ su imagen por la aplicación D-N está definida por

$$\Lambda_q(f) = \frac{\partial}{\partial \nu} u, \tag{9}$$

donde u es la única solución del problema

$$\begin{cases} (\Delta - q)u = 0 & \text{en } \Omega \\ u = f & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \tag{10}$$

Ya que cero puede ser un autovalor del operador de Dirichlet, la unicidad del problema (10) no puede ser en general probada. Para evitar la posible no definición de la aplicación D-N, vamos a sustituir la aplicación D-N por el *conjunto de datos Cauchy* definido por

$$\mathcal{C}_q = \left\{ \left(u|_{\partial\Omega}, \frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\partial\Omega} \right) \quad : \quad u \in H^1(\Omega), \;\; (\Delta - q)u = 0 \right\}. \tag{11}$$

Antes de continuar, vamos a indicar qué se entiende por una solución $u \in H^1(\Omega)$ de $(\Delta - q)u = 0$, y nos vamos a reducir, por simplicidad, a $q \in L^\infty(\Omega)$, y darle significado a los datos de Cauchy asociados al potencial q.

Necesitaremos recordar el Teorema de la traza.

Lemma 1 . Teorema de la traza.

1. *Sea $s > \frac{1}{2}$. La aplcación $\gamma_0 u = u|_{\partial\Omega}$ definida en $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ tiene una extensión continua y suprayectiva*

$$\begin{aligned} \gamma_0 : H^s(\Omega) &\longmapsto H^{s-\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \\ u &\longrightarrow u|_{\partial\Omega}, \end{aligned}$$

$$\|\gamma_0 u\|_{H^{s-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} \leq C\|u\|_{H^s(\Omega)}.$$

2. *Si* $s > \frac{3}{2}$, *la aplcación* $\gamma u = \left(\gamma_0 u = u|_{\partial\Omega}, \gamma_1 u = \frac{\partial u}{\partial \nu}\big|_{\partial\Omega}\right)$ *definida en* $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ *tiene una extensión continua y suprayectiva*

$$\begin{array}{rcl}\gamma : H^s(\Omega) & \longmapsto & H^{s-\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \times H^{s-\frac{3}{2}}(\partial\Omega) \\ u & \longrightarrow & \left(u|_{\partial\Omega}, \frac{\partial u}{\partial \nu}\big|_{\partial\Omega}\right),\end{array}$$

$$\|\gamma_0 u\|_{H^{s-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} + \|\gamma_1 u\|_{H^{s-\frac{3}{2}}(\partial\Omega)} \leq C\|u\|_{H^s(\Omega)}.$$

Sea

$$ker\gamma = \left\{u \in H^2(\Omega) \ : \ \ \gamma u = (\gamma_0 u, \gamma_1 u) = (0,0).\right\}.$$

Los elementos de $H^s(\Omega)\diagup ker\gamma$ *son clases de equivanencia* $[u]$. $[u_1] = [u_2]$, $\iff$ $\gamma u_1 = \gamma u_2$. *En* $H^s(\Omega)\diagup ker\gamma$ *podemos definir la norma*

$$\|[u]\| = \inf_{v\in[u]} \|v\|_{H^s(\Omega)}.$$

La aplicación

$$\begin{array}{rcl}\gamma : H^s(\Omega)\diagup ker\gamma & \longmapsto & H^{s-\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \times H^{s-\frac{3}{2}}(\partial\Omega) \\ [u] & \longrightarrow & \gamma[u] = \left(v|_{\partial\Omega}, \frac{\partial v}{\partial \nu}\big|_{\partial\Omega}\right),\end{array}$$

siendo $v \in [u]$ *es una biyección continua que admite una inversa continua.*

3. *Podemos asegurar,* <u>*"inverso del operador traza"*</u>*:*

   - *Dada* $f \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ *existe* $v_f \in H^1(\Omega)$ *tal que* $\gamma_0 v_f = f$ *y*

$$\|v_f\|_{H^1(\Omega)} \leq C\|\gamma_0 v_f\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}. \tag{12}$$

   - *Dadas* $f \in H^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega)$ *y* $g \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ *existe* $v_{fg} \in H^2(\Omega)$ *tal que* $\gamma v_{fg} = (f,g)$ *y*

$$\|v_{fg}\|_{H^2(\Omega)} \leq C\min\left\{\|f\|_{H^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega)}, \|g\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}\right\}. \tag{13}$$

Para su demostración, véase [49], [1] página 216 o [17] página 37..

Definition 2 *Sea $q \in L^\infty(\Omega)$ y consideramos el problema de Dirichlet para la ecuación de Schrödinger (10) con $f \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$. Decimos que $u \in H^1(\Omega)$ es una solución débil de (10), si $u|_{\partial\Omega} = f$, y si para todo $\psi \in H_0^1(\Omega)$ tenemos*

$$\int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla \psi + q u \psi) dx = 0. \tag{14}$$

Si $u \in H^1(\Omega)$, el Teorema de la traza 1 da significado a $u|_{\partial\Omega}$ como un elemento de $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$. Definimos, para $u \in H^1(\Omega)$ una solución débil de (10), $\frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{\partial\Omega}$ en el sentido débil por: si $g \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$, por Lema 1, sea $v \in H^1(\Omega)$ tal que $v|_{\partial\Omega} = g$, entonces

$$< \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{\partial\Omega}, g >= \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v + q u v)\, dx. \tag{15}$$

La definición (15) no depende de la extensión $v \in H^1(\Omega)$. Puesto que u es solución en el sentido débil, en (15) puedo poner en vez de v, $v+\phi$ cualquiera que sea $\phi \in H_0^1(\Omega)$. Si $\tilde{v} \in H^1(\Omega)$ es otra extensión de $g \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$, entonces $v - \tilde{v} \in H_0^1(\Omega)$ y

$$\int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla (v - \tilde{v}) + q u (v - \tilde{v}))\, dx = 0.$$

Definition 3 *Diremos que el problema (10) está bien propuesto, si las tres condiciones siguientes resultan:*

1. *<u>Existencia</u> Existe una solución débil $u \in H^1(\Omega)$ para cualquier valor de frontera $f \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$.*

2. *<u>Unicidad</u> La solución es única.*

3. *<u>Estabilidad</u> El operador solución $f \longmapsto u$ es continuo de $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \longmapsto H^1(\Omega)$, esto es,*

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|f\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}$$

para una constante absoluta $C > 0$.

Proposition 4 *Sea $q \in L^\infty(\Omega)$ entonces*

$$\mathcal{C}_q \subset H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \times H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega). \tag{16}$$

Proof. Sea $u \in H^1(\Omega)$ solución débil de (10). Ya que $u|_{\partial\Omega} \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$, tendremos que demostrar $\frac{\partial u}{\partial \nu}\big|_{\partial\Omega}$, definido por (15), define un funcional lineal y acotado en $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$.

Si utilizamos Hölder y "el inverso del teorema de la traza", (Lema 1), dada $g \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ sea $v_g \in H^1(\Omega)$ con $\|v_g\|_{H^1(\Omega)} \leq C\|g\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}$, entonces

$$\left| < \frac{\partial u}{\partial \nu}\bigg|_{\partial\Omega}, g > \right| = \left| \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v_g + quv_g)\, dx \right|$$

$$\leq C(q)\|u\|_{H^1(\Omega)}\|v_g\|_{H^1(\Omega)} \leq C(q)\|u\|_{H^1(\Omega)}\|g\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}.$$

Remark 5 *Proposición 4 es válida para potenciales $q \in L^r(\Omega)$, $r > \frac{n}{2}$,*

Véase [43].

Ahora establecemos el principal resultado de esta sección, *la unicidad para el problema de conductividad inverso.* Vamos a dar, si admitimos Remark 5, la L^r-versión del trabajo pionero de Sylvester y Uhlmann [47], debida a Jerinson, Kenig y Chanillo [12]

Theorem 6 *Sean $q_1, q_2 \in L^r(\Omega)$, $r > \frac{n}{2}$, $n \geq 3$. Si $\mathcal{C}_{q_1} = \mathcal{C}_{q_2}$ entonces $q_1 = q_2$.*

La demostración está basada en la existencia de las soluciones apróximadas de Calderon:

Proposition 7 *(Soluciones de Sylvester y Uhlmann). Sea $\rho \in \mathbb{C}^n$ tal que $\rho\cdot\rho = 0$ y $q = q_1\chi_\Omega$ con $q_1 \in L^r(\Omega)$, $r > \frac{n}{2}$. Entonces para $|\rho|$ suficientemente grande existe una solución de $(\Delta - q)u = 0$ en $H^1(\mathbb{R}^n) \cap L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ la cual puede ser escrita como*

$$u(x) = e^{x\cdot\rho}(1 + \psi(\rho, x)), \tag{17}$$

y

$$\||\psi(\rho, .)\||_{p'} \longrightarrow 0 \ \ cuando \ |\rho| \longrightarrow \infty, \tag{18}$$

donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, $\frac{1}{r} = \frac{1}{p'} - \frac{1}{p}$ y $\frac{2}{n} \geq \frac{1}{p'} - \frac{1}{p} \geq \frac{2}{n+1}$.

Proof.

Encontrar una solución u de $(\Delta - q)u = 0$ de la forma (17) es equivalente a encontrar una solución ψ de la ecuación de Faddeev

$$(\Delta + 2\rho \cdot \nabla)\psi = q\psi + q. \tag{19}$$

Designamos a la transformada de Fourier por $\mathcal{F}$. Aplicando esta a (19):

$$(-|\xi|^2 + 2i\rho \cdot \xi)\mathcal{F}\psi(\xi) = \mathcal{F}(q\psi)(\xi) + \mathcal{F}(q)(\xi),$$

$$\mathcal{F}\psi(\xi) = (2i\rho \cdot \xi - |\xi|^2)^{-1}\mathcal{F}(q\psi)(\xi) + (2i\rho \cdot \xi - |\xi|^2)^{-1}\mathcal{F}(q)(\xi),$$

$$(I - T_\rho)\psi = T_\rho(1),$$

donde

$$T_\rho(f) = \mathcal{F}^{-1}(2i\rho \cdot \xi - |\xi|^2)^{-1}\mathcal{F}(q\psi), \tag{20}$$

e I es el operador identidad.

Encontrar una solución de la ecuación (19) en $L^{p'}$ será equivalente a resolver la ecuación de Fredholm

$$(I - T_\rho)\psi = T_\rho(1) \tag{21}$$

en $L^{p'}$ y esto, a su vez es equivalente a demostras que el operador $(I - T_\rho)$ lo podemos invertir.

La existencia en $L^{p'}$ quedaría asegurada si demosatramos

1. $T_\rho(1) \in L^{p'}$.
2. $|||T_\rho|||_{L^{p'} \longrightarrow L^{p'}} < 1$.

Si usamos el siguiente Teorema, cuya demostración puede verse [22] o [43]

Theorem 8 *Sea $\rho \in \mathbb{C}^n$ tal que $\rho \cdot \rho = 0$. Asumimos que $\frac{2}{n} \geq \frac{1}{p} - \frac{1}{p'} \geq \frac{2}{n+1}$, $n > 2$, donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Entonces existe una constante independiente de ρ y f tal que*

$$|||T_\rho(f)|||_{p'} \leq C|\rho|^{n\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p'}\right) - 2} |||qf|||_p.$$

y Höder con $\frac{1}{p} = \frac{1}{r} + \frac{1}{p'}$, obtenemos

$$|||T_\rho(\psi)|||_{p'} \leq C|\rho|^{n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p'}\right)-2}|||q\psi|||_p \leq C|\rho|^{n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p'}\right)-2}|||q|||_r|||\psi|||_{p'} \tag{22}$$

Cómo $\frac{1}{r} = \frac{1}{p'} - \frac{1}{p}$ y $r > \frac{n}{2}$, entonces

$$n\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p'}\right) - 2 < 0$$

y si $|\rho|$ es suficientemente grande, $|||T_\rho|||_{L^{p'}\longrightarrow L^{p'}} < 1$ obteniendo 2.

De (22)

$$|||T_\rho(1)|||_{p'} \leq C(n,\rho)|||q|||_r|||\chi_\Omega|||_{p'}$$

Luego para $|\rho|$ suficientemente grande, queda demostrada la existencia de solución en $L^{p'}(\mathbb{R}^n)$

$$\psi(\rho,.) = (I - T_\rho)^{-1}(T_\rho(1)).$$

Supongamos que hemos tomado un M tal que $|\rho| > M$ entonces $\|T_\rho\|_{L^{p'}\longrightarrow L^{p'}} \leq \frac{1}{2}$,

$$\|(I-T_\rho)^{-1}\|_{L^{p'}\longrightarrow L^{p'}} = \frac{1}{\|(I-T_\rho)\|_{L^{p'}\longrightarrow L^{p'}}} \leq \frac{1}{1-\|T_\rho\|_{L^{p'}\longrightarrow L^{p'}}} \leq 2 \qquad |\rho| > M,$$

y

$$\begin{aligned}\|\psi(\rho,.)\|_{L^{p'}} &= \|(I-T_\rho)^{-1}(T_\rho(1))\|_{L^{p'}} \leq 2\|T_\rho(1)\|_{L^{p'}} \\ &\leq 2C|\rho|^{\frac{n}{r}-2}\|q\chi_\Omega\|_{L^p} \leq 2C|\rho|^{\frac{n}{r}-2}|\Omega|^{\frac{1}{p'}}\|q\|_{L^r},\end{aligned}$$

y esto demuestra que

$$|||\psi(\rho,.)|||_{p'} \longrightarrow 0 \text{ cuando } |\rho| \longrightarrow \infty.$$

Que $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$ sigue de estimaciones apriori para el operador de Laplace, ya que $\Delta u = qu \in L^p(\mathbb{R}^n)$ tiene soporte compacto. Véase [43].

Establecemos ahora otro ingrediente de la demostración de Teorema 6

Proposition 9 *Sea $q_i \in L^\infty(\Omega)$, $i = 1,2$, tal que $\mathcal{C}_{q_1} = \mathcal{C}_{q_2}$. Supungamos que $u_i \in H^1(\Omega)$ son soluciones de $(\Delta + q_i)u_i = 0$ en Ω, entonces*

$$\int_\Omega (q_1(x) - q_2(x))u_1(x)u_2(x)dx = 0. \tag{23}$$

Proof.

$$u_1 \text{ solución de } \Delta u_1 - q_1 u_1 = 0 \text{ con } u_1|_{\partial\Omega} = f_1 \text{ y } \left.\frac{\partial u_1}{\partial \nu}\right|_{\partial\Omega} = g_1,$$

$$u_2 \text{ solución de } \Delta u_2 - q_2 u_2 = 0 \text{ con } u_2|_{\partial\Omega} = f_2 \text{ y } \left.\frac{\partial u_2}{\partial \nu}\right|_{\partial\Omega} = g_2.$$

$(f_2, g_2) \in \mathcal{C}_{q_2} = \mathcal{C}_{q_1}$, entonces existe

$$v_1 \text{ solución de } \Delta v_1 - q_1 v_1 = 0 \text{ con } v_1|_{\partial\Omega} = f_2 \text{ y } \left.\frac{\partial v_1}{\partial \nu}\right|_{\partial\Omega} = g_2.$$

$$\int_\Omega (q_1 - q_2) u_1 u_2 = \int_\Omega q_1 u_1 u_2 - \int_\Omega q_2 u_1 u_2$$
$$= \int_\Omega q_1 u_1 u_2 + \int_\Omega \nabla u_1 \cdot \nabla u_2 - \int_\Omega q_2 u_1 u_2 - \int_\Omega \nabla u_1 \cdot \nabla u_2$$
$$= \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u_1}{\partial \nu} u_2 - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u_2}{\partial \nu} u_1 = \int_{\partial\Omega} g_1 f_2 - \int_{\partial\Omega} g_2 f_1 = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u_1}{\partial \nu} v_1 - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial v_1}{\partial \nu} u_1$$
$$= \int_\Omega q_1 u_1 v_1 + \int_\omega \nabla u_1 \cdot \nabla v_1 - \int_\Omega q_1 v_1 u_1 - \int_\omega \nabla u_1 \cdot \nabla v_1 = 0.$$

Demostración de Teorema 6.

Sea $\xi \in \mathbb{R}^n$. Elegimos $l, m \in \mathbb{R}^n$, tales que ξ, l, m son ortogonales y $|l|^2 = |\xi|^2 + |m|^2$. **Obérvese que la existencia de l y m solamente la podemos asegurar si $n \geq 3$.**

Definimos $\rho_1 = l + i(\xi + m)$ y $\rho_2 = -l + i(\xi - m)$.

$$\rho_1 \cdot \rho_1 = \sum_{j=1}^{n} (l_j + i(\xi_j + m_j))^2 = \sum_{j=1}^{n} \left(l_j^2 - (\xi_j + m_j)^2 + 2il_j(\xi_j + m_j) \right)$$
$$= |l|^2 - |\xi + m|^2 + 2il \cdot (\xi + m) = |l|^2 - |\xi|^2 - |m|^2 = 0.$$

Análogamente reríamos que $\rho_2 \cdot \rho_2 = 0$.

Por Proposición 7 podemos asegurar la existencia de soluciones u_1 y u_2 de $(\Delta - q_1)u = 0$ y $(\Delta - q_2)u = 0$ respectivamente tales que para $i = 1, 2$

$$u_i(x) = e^{\rho_i \cdot x}(1 + \psi_{q_i}(\rho_i, x)), \quad \text{con} \quad \|\psi_{q_i}(\rho_i, .)\|_{L^{p'}} \longrightarrow 0 \ \ |\rho_i| \longrightarrow \infty.$$

Despues de Proposición 9

$$
\begin{aligned}
0 = \int_\Omega (q_1 - q_2) u_1 u_2 &= \int_\Omega (q_1 - q_2) e^{\rho_1 \cdot x} (1 + \psi_{q_1}(\rho_1, x)) e^{\rho_2 \cdot x} (1 + \psi_{q_2}(\rho_2, x)) dx \\
&= \int_\Omega (q_1 - q_2) e^{2i\xi \cdot x} dx + \int_\Omega (q_1 - q_2) e^{2i\xi \cdot x} \psi_{q_2}(\rho_2, x) dx \\
&\quad + \int_\Omega (q_1 - q_2) e^{2i\xi \cdot x} \psi_{q_1}(\rho_1, x))(1 + \psi_{q_2}(\rho_2, x)) dx.
\end{aligned}
$$

Las dos últimos integrales van a tender a 0 cuando $|\rho| \longrightarrow \infty$. Veámoslo por ejemplo con la última integral.

Ya que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ y $\frac{1}{p} = \frac{1}{p'} + \frac{1}{r}$, tenemos

$$
\begin{aligned}
&\left| \int_\Omega q_i e^{2i\xi \cdot x} \psi_{q_1}(\rho_1, x))(1 + \psi_{q_2}(\rho_2, x)) dx \right| \\
&\leq \|q_i \psi_{q_1}\|_{L^p} \|1 + \psi_{q_2}\|_{L^{p'}} \leq \|q_i\|_{L^r} \|\psi_{q_1}\|_{L^{p'}} \|1 + \psi_{q_2}\|_{L^{p'}},
\end{aligned}
$$

y si hacemos $|l| \longrightarrow \infty$ con ξ fijo, como $|l| \leq |\rho_\pm|$, $|\rho_\pm| \longrightarrow \infty$, Proposición 7 nos asegura que

$$
\widehat{q_1 - q_2} = 0 \implies q_1 = q_2.
$$

Terminamos esta sección demostrando el Teorema

Theorem 10 *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio acotado con frontera suave y $n \geq$. Si γ_1 y γ_2 son dos funciones positivas en $\mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ tal que $\Lambda_{\gamma_1} = \Lambda_{\gamma_2}$, entonces $\gamma_1 = \gamma_2$.*

Antes de dar la demostración, recordamos que dado el problema de Dirichlet

$$
\begin{cases} \operatorname{div}(\gamma \nabla u) = 0 & \text{en } \Omega \\ u = f & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \tag{24}
$$

si γ es positiva, existe una única solución débil $u \in H^1(\Omega)$ para cualquier dato frontera $f \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$. Laaplicación Dirichlet a Neumann asociada a γ la definimos en el sentido débil como

$$
< \Lambda_\gamma f, g >= \int_\Omega \gamma \nabla u \cdot \nabla v dx, \qquad f, g \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega),
$$

donde u es la solución débil, en el sentido de Definición 2, de (24), y v es cualquier función en $H^1(\Omega)$ con $v|_{\partial\Omega} = g$.

Como vimos al principiuo de esta sección y siguendo Proposición 4, si $\gamma \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$, la definición de $\Lambda_\gamma f$ es independiente de la función v tal que $v|_{\partial\Omega} = g$, y $\Lambda_\gamma f \in H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ para $f \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$.

Proof. Teorema 10

Teorema 10 será una consecuencia de Teorema 6.

En la demostración utilizaremos:

- El primer resultado sobre unicidad, después de la conjetura de Calderón, fue debido a Kohn y Vogelius [26], quienes demuestran que dado un subconjunto abierto $\Gamma \subset \partial\Omega$ (Γ puede ser $\partial\Omega$) y γ_1 y γ_2 dos funciones positivas en $\mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$:

$$\text{Si} \quad \Lambda_{\gamma_1}(f)|_\Gamma = \Lambda_{\gamma_2}(f)|_\Gamma \quad \forall\, f \implies \begin{cases} \gamma_1 = \gamma_2 \\ \frac{\partial\gamma_1}{\partial\nu} = \frac{\partial\gamma_2}{\partial\nu} \end{cases} \quad \text{en } \Gamma. \tag{25}$$

- Si $\gamma \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ y $u \in H^1(\Omega)$, entonces

$$\operatorname{div}\left(\gamma\nabla\left(\gamma^{-1/2}u\right)\right) = \gamma^{1/2}(\Delta - q)u \tag{26}$$

en el sentido débil, donde

$$q = \frac{\Delta\sqrt{\gamma}}{\sqrt{\gamma}}.$$

Proof.

La demostración es un calculo directo: Si $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$, entonces

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\gamma\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{1}{\sqrt{\gamma}}u\right)\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sqrt{\gamma}\frac{\partial}{\partial x_j}u\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}(\sqrt{\gamma})u\right)$$

$$= \sqrt{\gamma}\frac{\partial^2}{\partial {x_j}^2}u + \frac{\partial}{\partial x_j}(\sqrt{\gamma})\frac{\partial}{\partial x_j}u - \frac{\partial}{\partial x_j}(\sqrt{\gamma})\frac{\partial}{\partial x_j}u + \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}(\sqrt{\gamma})u.$$

(26) sigue tomando sumatorio en j.

El caso de $u \in H^1(\Omega)$ sigue por densidad.

Sea $\{u_k\} \subset \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ una sucesión con $u_k \longrightarrow u$ en $u \in H^1(\Omega)$. Tenemos

$$\nabla \cdot \gamma \nabla \left(\gamma^{-1/2} u_k\right) = \gamma^{1/2}(\Delta - q) u_k.$$

Si $a \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}))$ entonces $u \to au$ es una aplicación continua en $H^1(\Omega)$, ya que

$$\begin{aligned} \|au\|_{H^1(\Omega)} &= \|au\|_{L^2(\Omega)} + \|(\nabla a)u + a\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq 2\left(\|a\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\nabla a\|_{L^\infty(\Omega)}\right)\|u\|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Usando que γ está en $\mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ y que $\nabla : H^m(\Omega) \to H^{m-1}(\Omega)$ es una aplicación continua, tenemos

$$\begin{aligned} & u_k \longrightarrow u \qquad \text{en } H^1(\Omega), \\ \Longrightarrow \quad & \gamma^{-1/2}u_k \longrightarrow \gamma^{-1/2}u \qquad \text{en } H^1(\Omega), \\ \Longrightarrow \quad & \nabla\left(\gamma^{-1/2}u_k\right) \longrightarrow \left(\gamma^{-1/2}u\right) \qquad \text{en } L^2(\Omega), \\ \Longrightarrow \quad & \gamma\nabla\left(\gamma^{-1/2}u_k\right) \longrightarrow \gamma\left(\gamma^{-1/2}u\right) \qquad \text{en } L^2(\Omega), \\ \Longrightarrow \quad & \nabla\cdot\gamma\nabla\left(\gamma^{-1/2}u_k\right) \longrightarrow \nabla\cdot\gamma\left(\gamma^{-1/2}u\right) \qquad \text{en } H^{-1}(\Omega). \end{aligned}$$

Similarmente, $\gamma^{\frac{1}{2}}(\Delta - q)u_k \longrightarrow \gamma^{\frac{1}{2}}(\Delta - q)u$ en $H^{-1}(\Omega)$, lo cual demuestra que (26) resulta en el sentido de $H^{-1}(\Omega)$.

Sea $q_i = \frac{\Delta\sqrt{\gamma_i}}{\sqrt{\gamma_i}} \in L^\infty(\Omega)$, $i = 1, 2$.

1 paso Demostrar que

$\Lambda_{\gamma_1} = \Lambda_{\gamma_2} \implies \mathcal{C}_{q_1} = \mathcal{C}_{q_2}$.
Sea $(f, g) \in \mathcal{C}_{q_1}$, esto significa que existe u_1 solución débil en $H^1(\Omega)$ de

$$\begin{cases} (\Delta - q_1)u_1 = 0 & \text{en } \Omega \\ u_1 = f & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

tal que $\frac{\partial u_1}{\partial \nu}\Big|_{\partial\Omega} = g$.
Por (26), $v_1 = \gamma_1^{-1/2}u_1$ es solución débil de

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\gamma_1 \nabla v_1) = 0 & \text{en } \Omega \\ v_1 = \gamma_1^{-1/2} f & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

Ya que $\Lambda_{\gamma_1}\left(\gamma_1^{-1/2}f\right) = \Lambda_{\gamma_2}\left(\gamma_1^{-1/2}f\right)$, existe v_2 solución débil de

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\gamma_2 \nabla v_2) = 0 & \text{en } \Omega \\ v_2 = \gamma_1^{-1/2} f & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

con

$$\gamma_1 \frac{\partial}{\partial \nu}\left(\gamma_1^{-1/2} u_1\right) = \gamma_2 \frac{\partial v_2}{\partial \nu} \quad \text{en } \partial\Omega. \tag{27}$$

Sea $u_2 = \gamma_2^{1/2} v_2$, por (25) y (26), u_2 es solución del problema

$$\begin{cases} (\Delta - q_2) u_2 = 0 & \text{en } \Omega \\ u_2 = f & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

Vamos a calcular $\frac{\partial u_2}{\partial \nu}$ en $\partial\Omega$ utilizando (25) y (27).

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_2}{\partial \nu} &= \frac{\partial \gamma_2^{1/2}}{\partial \nu} v_2 + \gamma_2^{1/2} \frac{\partial v_2}{\partial \nu} = \frac{\partial \gamma_2^{1/2}}{\partial \nu} v_2 + \gamma_2^{1/2} \frac{\partial}{\partial \nu}\left(\gamma_1^{-1/2} u_1\right) \\ &= \frac{\partial \gamma_2^{1/2}}{\partial \nu} v_2 + \gamma_2^{1/2} \frac{\partial}{\partial \nu}\left(\gamma_1^{-1/2}\right) u_1 + \gamma_2^{1/2} \gamma_1^{-1/2} \frac{\partial u_1}{\partial \nu} \\ &= \frac{1}{2} \gamma_2^{-1/2} \frac{\partial \gamma_2}{\partial \nu} \gamma_1^{-1/2} f - \frac{1}{2} \gamma_2^{1/2} \gamma_1^{-3/2} \frac{\partial \gamma_1}{\partial \nu} \gamma_1^{1/2} f + g = g, \end{aligned}$$

luego $\mathcal{C}_{q_1} \subset \mathcal{C}_{q_2}$. Análogamente, demostraríamos la otra inclusíon. Por Teorema 6 tenemos que $q_1 = q_2$.

2 Paso Demostrar qie si $q_1 = q_2 \implies \gamma_1 = \gamma_2$.

Empezamos observando que

$$\Delta(\log \sqrt{\gamma}) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{\partial \sqrt{\gamma}}{\partial x_j}\right) = \frac{\Delta \sqrt{\gamma}}{\sqrt{\gamma}} - |\nabla(\log \sqrt{\gamma})|^2.$$

De esto y que $q_1 = q_2$ deducimos que

$$\Delta(\log \sqrt{\gamma_1} - \log \sqrt{\gamma_1}) + |\nabla(\log \sqrt{\gamma_1})|^2 - |\nabla(\log \sqrt{\gamma_2})|^2 = 0.$$

Si reescribimos esta última expresión, obtenemos

$$\Delta\left(\log \frac{\sqrt{\gamma_1}}{\sqrt{\gamma_2}}\right) + \nabla a \cdot \nabla\left(\log \frac{\sqrt{\gamma_1}}{\sqrt{\gamma_2}}\right) = 0,$$

donde $a = \log\sqrt{\gamma_1\gamma_2}$. Esta es una ecuación lineal para la función de $\mathcal{C}^2$ $v = \log\frac{\sqrt{\gamma_1}}{\sqrt{\gamma_2}}$. Si usamos la identidad

$$\nabla\cdot(e^a\nabla v) = e^a(\Delta v + \nabla a\cdot\nabla v),$$

y usando el hecho, por (25), que $\gamma_1 = \gamma_2$ en $\partial\Omega$, vemos que v es solución del problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \operatorname{div}\big((\gamma_1\gamma_2)^{1/2}\nabla v\big) & \text{en } \Omega, \\ v = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

Este problema está bien propuesto en el sentido de Definición 3, entonces $v = 0 \implies \gamma_1 = \gamma_2$.

4 Unicidad del problema de conductividad inverso con datos de Cauchy en parte de la frontera

En la sección anterior, demostramos que si mediciones en la frontera para dos conductividades $\mathcal{C}^2$ coinciden en toda la frontera, entonces las conductividades son iguales. Ahora vamos a considerar el caso donde las mediciones son hechas solo en una parte de la frontera.

El primer resultado en esta dirección, como ya indicamos en la introducción, fue probado por Bukhgein y Uhlmann. En su trabajo se utiliza un $\xi \in \mathbb{S}^{n-1}$ fijo y el subconjuno de la frontera

$$\partial\Omega_{-,\epsilon}(\xi) = \{x \in \partial\Omega,\ \xi\cdot\nu(x) < \epsilon\}.$$

El resultado que demestran, y que nosotros presentaremos en esta sección, es

Theorem 11 *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio acotado con frontera suave, $n \geq 3$ y γ_1 y γ_2 dos funciones positivas en $\mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$. Dado $\xi \in \mathbb{S}^{n-1}$ y $\epsilon > 0$, asumimos que*

$$\Lambda_{\gamma_1}(f)|_{\partial\Omega_{-,\epsilon}(\xi)} = \Lambda_{\gamma_2}(f)|_{\partial\Omega_{-,\epsilon}(\xi)} \quad \textit{para toda } f \in H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega),$$

entonces $\gamma_1 = \gamma_2$.

La demostración está basada en las soluciones complejas de la óptica geométrica, pero vamos a necesitar una nueva herramienta, ya que necesitamos algún control de las soluciones en parte de la frontera. La principal herramienta será una estimación en norma con pesos, conocida como una *estimación de Carleman*. Esta estimación da una manera nueva de construir las soluciones complejas de la óptica geométrica, que no va a requerir de análisis de Fourier.

Remark 12 *En [44] se da la siguiente modificación del resultado de Bukhgeim y Uhlmann.*

Theorem 13 *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio acotado con frontera suave, $n \geq 3$ y γ_1 y γ_2 dos funciones positicas en $\mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$. Dado $\xi \in \mathbb{S}^{n-1}$ y $\epsilon > 0$,si asumimos que*

$$\begin{array}{l} \gamma_1|_{\partial\Omega} = \gamma_2|_{\partial\Omega} \\ y \\ \Lambda_{\gamma_1}(f)|_{\partial\Omega_{-,\epsilon}(\xi)} = \Lambda_{\gamma_2}(f)|_{\partial\Omega_{-,\epsilon}(\xi)} \quad \textit{para toda } \ f \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega), \end{array}$$

entonces $\gamma_1 = \gamma_2$.

Vamos a introducir alguna notación. Sea

$$H_{\triangle}(\Omega) = \left\{ u \in \mathcal{D}(\Omega) \ : \ u \in L^2(\Omega) \ , \ \Delta u \in L^2(\Omega) \right\}.$$

$H_{\triangle}(\Omega)$ es un espacio de Hilbert con la norma

$$\|u\|^2_{H_{\triangle}(\Omega)} = \|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\Delta u\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Definition 14 *Decimos que $u \in H_{\triangle}(\Omega)$ es una solución de*

$$(\Delta - q)u = 0 \qquad \textit{en } \ \Omega,$$

con $q \in L\infty(\Omega)$, si dada $v \in H^2_0(\Omega) = \{u \in H^2(\Omega) \ : \ \gamma_0 u = 0, \ \ \gamma_1 u = 0\}$ se verifica

$$\int_{\Omega} (u\Delta\bar{v} - qu\bar{v})dx = \int_{\Omega} (u\Delta\bar{v} - \bar{v}\Delta u)dx = 0. \tag{28}$$

Definimos el conjunto de datos de Cauchy para $q \in L^\infty(\Omega)$ por

$$\mathcal{C}_q = \left\{ \left(u|_{\partial\Omega}, \frac{\partial u}{\partial \nu}\bigg|_{\partial\Omega} \right) \ : \ (\Delta - q)u = 0 \text{ en } \Omega, \quad u \in H_\triangle(\Omega) \right\}.$$

Sea $u \in H_\triangle(\Omega)$ solución de $(\Delta - q)u = 0$. Definimos $u|_{\partial\Omega}$ por

$$\langle u|_\partial, f\rangle = \int_\Omega (u\Delta\bar{v} - \bar{v}\Delta u)dx, \qquad f \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega), \tag{29}$$

donde $v \in H^2(\Omega)$ es tal que $\gamma_0 v = 0$ y $\gamma_1 v = f$.

(29) no depende de la elección de $v \in H^2(\Omega)$. En efecto, si $\tilde{v} \in H^2(\Omega)$ es tal que $\gamma_0\tilde{v} = 0$ y $\gamma_1\tilde{v} = f$, entonces $v - \tilde{v} \in H_0^2(\Omega)$ y por ser $u \in H_\triangle(\Omega)$ solución de $(\Delta - q)u = 0$ tenemos que

$$\int_\Omega (u\Delta\bar{v} - \bar{v}\Delta u)dx = \int_\Omega (u\Delta\bar{\tilde{v}} - \bar{\tilde{v}}\Delta u)dx.$$

Para $u \in H_\triangle(\Omega)$ solución de $(\Delta - q)u = 0$. Definimos $\frac{\partial u}{\partial\nu}\big|_{\partial\Omega}$ por

$$\langle \frac{\partial u}{\partial \nu}\bigg|_{\partial\Omega}, f\rangle = \int_\Omega (u\Delta\bar{v} - \bar{v}\Delta u)dx, \qquad f \in H^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega), \tag{30}$$

donde $v \in H^2(\Omega)$ es tal que $\gamma_0 v = f$ y $\gamma_1 v = 0$.

Puede demostrarse que (30) no depende de la elección de $v \in H^2(\Omega)$.

En subsección 4.1 veremos que $\mathcal{C}_q \subset H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \times H^{-\frac{3}{2}}(\partial\Omega)$.

Remark 15 *Si 0 no es un autovalor Dirichlet de $\Delta - q$ en Ω, entonces $\mathcal{C}_q$ contiene la gráfica de la aplicación Dirichlet a Neumann Λ_q convenientemente definida en $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ por $\Lambda_q(f) = \frac{\partial u}{\partial\nu}\big|_{\partial\Omega}$, donde $u \in H^1(\Omega)$ es una solución del problema*

$$(\Delta - q)u = 0 \quad \text{en } \Omega, \qquad u|_{\partial\Omega} = f;$$

es decir

$$\left\{ (f, \Lambda_q(f)) \ : \ f \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \right\} \subset \mathcal{C}_q.$$

Para $\xi \in \mathbb{S}^{n-1}$, definimos

$$\partial\Omega_+(\xi) = \{x \in \partial\Omega \ : \ \langle \nu(x), \xi\rangle > 0\},$$

$$\partial\Omega_-(\xi) = \{x \in \partial\Omega \;:\; \langle \nu(x), \xi\rangle < 0\}$$

y para $\epsilon > 0$

$$\partial\Omega_{+,\epsilon}(\xi) = \{x \in \partial\Omega \;:\; \langle \nu(x), \xi\rangle > \epsilon\},$$
$$\partial\Omega_{-,\epsilon}(\xi) = \{x \in \partial\Omega \;:\; \langle \nu(x), \xi\rangle < \epsilon\},$$

siendo $\langle a, b\rangle = \sum_{i=1}^n a_i b_i$ para $a, b \in \mathbb{C}^n$.

Definimos el conjunto de datos de Cauchy restringidos por

$$\mathcal{C}_{q,\epsilon} = \left\{ \left(u|_{\partial\Omega}, \left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\partial\Omega_{-,\epsilon}(\xi)} \right) \;:\; (\Delta - q)u = 0 \text{ en } \Omega, \quad u \in H_\triangle(\Omega) \right\}.$$

Siguiendo la demostración de Teorema 10, la demostración de Teorema 11 será una consecuencia de

Theorem 16 *Sea $n \geq 3$, q_1, $q_2 \in L^\infty(\Omega)$, $\xi \in \mathbb{S}^{n-1}$ y $\epsilon > 0$. Si $\mathcal{C}_{q_1,\epsilon} = \mathcal{C}_{q_2,\epsilon}$, entonces $q_1 = q_2$.*

que demostraremos en la última subsección.

4.1 Traza de funciones en el espacio $H_\triangle(\Omega)$ y fórmula de Green.

En esta subsección perseguimos una fórmula de Grenn para el espacio $H_\triangle(\Omega)$.

$H^2(\Omega) \subset H_\triangle(\Omega)$, de aquí el teorema de la traza para el espacio $H_\triangle(\Omega)$ debe ser más débil que para $H^2(\Omega)$.

Theorem 17 *1. Supongamos que $\partial\Omega \subset \mathcal{C}^2$, entonces las aplicaciones:*

- *$\gamma_0 u = u|_{\partial\Omega}$ definida en $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ tiene una extensión continua, que seguiremos designando por γ_0,*

$$\begin{array}{rcl} \gamma_0 : H_\triangle(\Omega) & \longmapsto & H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \\ u & \longrightarrow & \gamma_0 u = u|_{\partial\Omega}, \end{array} \tag{31}$$
$$\|\gamma_0 u\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} \leq C\|u\|_{H_\triangle(\Omega)}.$$

- $\gamma_1 u = \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{\partial\Omega}$ *definida en* $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ *tiene una extensión continua, que seguiremos designando por* γ_1,

$$\begin{array}{rcl} \gamma_1 : H_\triangle(\Omega) & \longmapsto & H^{-\frac{3}{2}}(\partial\Omega) \\ u & \longrightarrow & \gamma_1 u = \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{\partial\Omega}, \end{array} \tag{32}$$

$$\|\gamma_1 u\|_{H^{-\frac{3}{2}}(\partial\Omega)} \leq C\|u\|_{H_\triangle(\Omega)}.$$

2. Si asumimos que $\gamma_0 u \in H^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega)$, *entonces*

$$u \in H^2(\Omega) \ \ y \ \ \|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C\left(\|u\|_{H_\triangle(\Omega)} + \|\gamma_0 u\|_{H^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega)}\right), \tag{33}$$

$$\gamma_1 u \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \ \ y \ \ \|\gamma_1 u\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} \leq C\left(\|u\|_{H_\triangle(\Omega)} + \|\gamma_0 u\|_{H^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega)}\right). \tag{34}$$

para alguna constante $C > 0$.

Proof.

1. Sea $u \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$. Para $w \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$, por el "inverso del Teorema de la traza" (Lema 1), existe una función $v_w \in H^2(\Omega)$ tal que

$$\gamma_0 v_w = v_w|_{\partial\Omega} = 0 \qquad \gamma_1 v_w = \frac{\partial v_w}{\partial \nu}\bigg|_{\partial\Omega} = w$$

y

$$\|v_w\|_{H^2(\Omega)} \leq C\|w\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}.$$

$$\langle u|_\partial, w\rangle = \int_\Omega (u\Delta\overline{v_w} - \overline{v_w}\Delta u)dx,$$

y de aqu

$$|\langle u|_\partial, w\rangle| \leq C\|u\|_{H_\triangle(\Omega)}\|v_w\|_{H^2(\Omega)} \leq C\|u\|_{H_\triangle(\Omega)}\|w\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)},$$

lo cual prueba que $\gamma_0 u = u|_{\partial\Omega} \in H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ y que la aplicación

$$\gamma_0 : u \longrightarrow \gamma_0 u \in H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$$

es acotada en $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ con la norma $\|.\|_{H_\triangle(\Omega)}$. Ya que $(\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}), \|.\|_{H_\triangle(\Omega)})$ es denso en $(H_\triangle(\Omega), \|.\|_{H_\triangle(\Omega)})$, γ_0 puede ser extendida a una aplicación lineal y continua de $H_\triangle(\Omega)$ a $H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ con

$$\|\gamma_0 u\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} \leq C\|u\|_{H_\triangle(\Omega)}.$$

Análogamente estudiaríamos la aplicación γ_1.

2. Empezamos considerando el caso $\gamma_0 u = 0$.

   Tomamos $u \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ con $\gamma_0 u = 0$. De la fórmula de Green

$$\int_{\partial\Omega} \left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|^2 d\sigma \leq \int_\Omega |\Delta u|^2 dx, \tag{35}$$

$$2\int_\Omega |\nabla u|^2 dx = -2\int_\Omega u\Delta dx \leq \int_\Omega \left(|u|^2 + |\Delta u|^2\right) dx = \|u\|^2_{H_\triangle(\Omega)}. \tag{36}$$

   Ya que $\partial\Omega \in \mathcal{C}^2$, la fórmula de Kadlec, véase [50] página 340, nos dice

$$\sum_{|\alpha|=2} |\partial^\alpha u|^2 \leq \int_\Omega |\Delta u|^2 dx + C\int_{\partial\Omega} \left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|^2 d\sigma \tag{37}$$

   para alguna $C > 0$.

   De (36)-(37) tenemos

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C\|v\|_{H_\triangle(\Omega)}, \qquad u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega}) \quad \gamma_0 u = 0,$$

   para otra constante $C > 0$.

   Usando argumentos estandar de densidad, obtenemos

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C\|v\|_{H_\triangle(\Omega)}, \qquad u \in H_\triangle(\Omega) \cap \{u :\ \gamma_0 u = 0\}.$$

   Cómo $u \in H^2(\Omega)$, el Teorema de la traza nos dice que $\gamma_1 \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ y

$$\|\gamma_1\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} \leq \|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C\|v\|_{H_\triangle(\Omega)}.$$

   Hemos probado entonces 2) en el caso de que $\gamma_0 u = 0$. Para tratar el caso general, sea $\gamma_0 u \in H^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega)$, por el Teorema dela traza, existe $v \in H^2(\Omega)$ tal que $\gamma_0 v = \gamma_0 u$ y la función $w = u - v \in H_\triangle(\Omega)$ con $\gamma_0 w = 0$. Esto prueba que nos podemos reducir al caso $\gamma_0 = 0$.

Del Teorema 17, es fácil obtener la siguiente fórmula de Green generalizada:

Corollary 18 *1. Para $u \in H_\triangle(\Omega)$ y $v \in H^2(\Omega)$, tenemos la fórmula de Green generalizada*

$$\int_\Omega (\Delta - q)u\bar{v}dx = \int_\Omega u\overline{(\Delta - \bar{q})v}dx + \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\bar{v} - u\overline{\frac{\partial v}{\partial \nu}} \right) d\sigma, \qquad (38)$$

donde $q \in L^\infty(\Omega)$, $\partial\Omega \in \mathcal{C}^2$, $\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu}\bar{v}d\sigma$ designa la dualidad entre $H^{-\frac{3}{2}}(\Omega)$ y $H^{\frac{3}{2}}(\Omega)$ y $\int_{\partial\Omega} u\overline{\frac{\partial v}{\partial \nu}}d\sigma$ designa la dualidad entre $H^{-\frac{1}{2}}(\Omega)$ y $H^{\frac{1}{2}}(\Omega)$.

2. Si definimos

$$\widetilde{H}_\triangle(\Omega) = \{u \in H_\triangle(\Omega) \ : \ \gamma_0 u = 0, \ \gamma_1 u = 0\},$$

entonces, ya que $H^2(\Omega)$ es denso en $H_\triangle(\Omega)$, tenemos

$$\int_\Omega (\Delta - q)u\bar{v}dx = \int_\Omega u\overline{(\Delta - \bar{q})v}dx$$

para todo $u \in \tilde{H}_\triangle(\Omega)$ y $v \in H_\triangle(\Omega)$.

4.2 Estimación de Carleman.

En la estimación de Carleman que vamos a demostrar, haremos uso de la desigualdad de Poincaré, que puede encontrarse en [16] páginas 125-126.

Lemma 19 Desigualdad de Poincaré. *Sea $\xi \in \mathbb{S}^{n-1}$ fijo y Ω un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ incluido en la banda*

$$\{x \in \mathbb{R}^n \ : \ a < x \cdot \xi < b\},$$

$a, \ b \in \mathbb{R}^n$, $a < b$. Para toda $u \in H^2(\Omega) \cap \{u \ : \ u|_{\partial\Omega} = 0\}$, se verifica

$$\int_\Omega |u|^2 dx \leq \frac{d^2}{2} \int_\Omega |\partial_\xi u|^2 dx, \qquad (39)$$

donde $d = b - a$.

y del Teorema de la divergencia, que puede encontrarse en [35].

Theorem 20 Teorema de la divergencia. *Sea Ω un dominio acotado con frontera suave y $\overrightarrow{F}$ un campo vectorial suave definido en Ω. Entonces*

$$\int_{\Omega} div\overrightarrow{F}dx = \int_{\partial\Omega} \overrightarrow{F} \cdot \nu(x) d\sigma(x).$$

Theorem 21 .Estimación de Carleman. *Sea $\xi \in \mathbb{S}^{n-1}$ fijo y Ω un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ incluido en la banda*

$$\{x \in \mathbb{R}^n \ : \ \ a < x \cdot \xi < b\},$$

$a,\ b \in \mathbb{R}^n$, $a < b$. Para $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ con $u|_{\partial\Omega} = 0$, tenemos para todo $\tau > 0$

$$\begin{aligned} &\tfrac{8\tau^2}{d^2} \textstyle\int_{\Omega} e^{-2\tau\xi\cdot x}|u|^2 dx + \int_{\partial\Omega_+(\xi)} 2\tau\xi \cdot \nu(x) e^{-2\tau\xi\cdot x}|\partial_\nu u|^2 d\sigma \\ &\leq \textstyle\int_{\Omega} e^{-2\tau\xi\cdot x}|\Delta u|^2 dx - \int_{\partial\Omega_-(\xi)} 2\tau\xi \cdot \nu(x) e^{-2\tau\xi\cdot x}|\partial_\nu u|^2 d\sigma. \end{aligned} \tag{40}$$

Proof.
1 paso

$$\int_{\Omega} e^{-2\tau x\cdot\xi}|\Delta u|^2 dx = \int_{\Omega} \left|e^{-\tau x\cdot\xi}\Delta\left(e^{\tau x\cdot\xi}v\right)\right|^2 dx,$$

donde $v = e^{-\tau x\cdot\xi}u$.

Sea P el operador

$$P = e^{-\tau x\cdot\xi}\Delta e^{\tau x\cdot\xi} = \Delta + 2\tau\partial_\xi + \tau^2.$$

Tenemos

$$P = P_+ + P_-,$$

con

$$P_+ = \Delta + \tau^2 \ \text{(parte elíptica)} \qquad P_- = 2\tau\partial_\xi,$$

y

$$\int_{\Omega} e^{-2\tau x\cdot\xi}|\Delta u|^2 dx = \int_{\Omega} |P_+v|^2 dx + \int_{\Omega} |P_-v|^2 dx + \int_{\Omega} 2\Re\left(P_+v\overline{P_-v}\right) dx.$$

2 paso

Demostraremos que

$$2\Re\left(P_+ v\overline{P_- v}\right) = div\left(4\tau\Re(\partial_\xi \bar{v}\nabla v) - 2\tau|\nabla v|^2\xi + 2\tau^3|v|^2\xi\right). \tag{41}$$

Si aplicamos el Teorema de la divergencia

$$\int_\Omega 2\Re\left(P_+ v\overline{P_- v}\right)dx = 4\tau\int_{\partial\Omega}\Re(\partial_\xi\bar{v}\partial_\nu v)d\sigma - 2\tau\int_{\partial\Omega}|\nabla v|^2\xi\cdot\nu d\sigma + 2\tau^3\int_{\partial\Omega}|v|^2\xi\cdot\nu d\sigma.$$

$$v = 0 \text{ en } \partial\Omega \implies \begin{cases} \int_{\partial\Omega}|v|^2\xi\cdot\nu d\sigma = 0, \\ \begin{array}{l}\text{no hay componente}\\ \text{tangencial del gradiente}\end{array} \implies \begin{cases}|\nabla v|^2 = |\partial_\nu v|^2, \\ \partial_\xi v = \xi\cdot\nu\partial_\nu v,\end{cases} \\ \frac{\partial v}{\partial x_j} = e^{-\tau\xi\cdot x}\left(\frac{\partial u}{\partial x_j} - \tau\xi_j u\right) = e^{-\tau\xi\cdot x}\frac{\partial u}{\partial x_j} \text{ en } \partial\Omega. \end{cases}$$

y

$$\int_\Omega 2\Re\left(P_+ v\overline{P_- v}\right)dx = 2\tau\int_{\partial\Omega}e^{-2\tau\xi\cdot x}\xi\cdot\nu|\partial_\nu u|^2 d\sigma.$$

Obtención de la estimación de Carleman

Utilizando la desigualdad de Poincaré

$$\int_\Omega |P_- v|^2 dx = 4\tau^2\int_\Omega|\partial_\xi v|^2 dx \geq \frac{8\tau^2}{d^2}\int_\Omega|v|^2dx = \frac{8\tau^2}{d^2}\int_\Omega e^{-2\tau\xi\cdot x}|u|^2dx,$$

$$\Downarrow$$

$$\int_\Omega e^{-2\tau\xi\cdot x}|\Delta u|^2dx \geq \int_\Omega|P_- v|^2dx + \int_\Omega 2\Re\left(P_+ v\overline{P_- v}\right)dx$$

$$\geq \frac{8\tau^2}{d^2}\int_\Omega e^{-2\tau\xi\cdot x}|u|^2dx + 2\tau\int_{\partial\Omega_+(\xi)}e^{-2\tau\xi\cdot x}\xi\cdot\nu|\partial_\nu u|^2d\sigma + 2\tau\int_{\partial\Omega_-(\xi)}e^{-2\tau\xi\cdot x}\xi\cdot\nu|\partial_\nu u|^2d\sigma,$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{8\tau^2}{d^2}\int_\Omega e^{-2\tau\xi\cdot x}|u|^2dx + \int_{\partial\Omega_+(\xi)}2\tau\xi\cdot\nu e^{-2\tau\xi\cdot x}|\partial_\nu u|^2d\sigma$$
$$\leq \int_\Omega e^{-2\tau\xi\cdot x}|\Delta u|^2dx - \int_{\partial\Omega_-(\xi)}2\tau\xi\cdot\nu e^{-2\tau\xi\cdot x}|\partial_\nu u|^2d\sigma.$$

Demostración del primer paso.

Sea $v = e^{-\tau x\cdot\xi}$.

$$\int_\Omega e^{-2\tau x\cdot\xi}|\Delta u|^2 dx = \int_\Omega |e^{-\tau x\cdot\xi}\Delta\left(e^{\tau x\cdot\xi}v\right)|^2 dx$$

$$= \int_\Omega |e^{-\tau x\cdot\xi}\left(v\Delta e^{\tau x\cdot\xi} + 2\nabla e^{\tau x\cdot\xi}\cdot\nabla v + e^{\tau x\cdot\xi}\Delta v\right)|^2 dx$$

$$= \int_\Omega |e^{-\tau x\cdot\xi}\left(\tau^2 v e^{\tau x\cdot\xi} + 2\tau e^{\tau x\cdot\xi}\xi\cdot\nabla v + e^{\tau x\cdot\xi}\Delta v\right)|^2 dx$$

$$= \int_\Omega \left|\tau^2 v + 2\tau\xi\cdot\nabla v + \Delta v\right|^2 dx = \int_\Omega |P_+v + P_-v|^2 dx$$

$$= \int_\Omega |P_+v|^2 dx + \int_\Omega |P_-v|^2 dx + \int_\Omega 2\Re(P_+v\overline{P_-v})dx.$$

Demostración de 41

$$2\Re(P_+v\overline{P_-v}) = 2\Re\left((\Delta+\tau^2)v2\tau\partial_\xi\bar{v}\right) = 4\tau\Re(\Delta v\partial_\xi) + 4\tau^3\Re(v\partial_\xi\bar{v}). \quad (42)$$

De

$$\partial_\xi|v|^2 = \partial_\xi v\bar{v} = v\partial_\xi\bar{v} + \bar{v}\partial_\xi v = v\partial_\xi\bar{v} + \overline{v\partial_\xi\bar{v}} = 2\Re(v\partial_\xi\bar{v}),$$

obtenemos

$$4\tau^3\Re(v\partial_\xi\bar{v}) = 2\tau^3\partial_\xi|v|^2 = 2\tau^3\sum_{j=1}^n \xi_j\frac{\partial}{\partial x_j}|v|^2 = \operatorname{div}\left(2\tau^3\xi|v|^2\right). \quad (43)$$

Para tratar el otro término en (42), haremos uso de

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial v}{\partial x_k}\frac{\partial\bar{v}}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial^2 v}{\partial x_k^2}\frac{\partial\bar{v}}{\partial x_j} + \frac{\partial v}{\partial x_k}\frac{\partial^2\bar{v}}{\partial x_j x_k}, \implies$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_k^2}\frac{\partial\bar{v}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial v}{\partial x_k}\frac{\partial\bar{v}}{\partial x_j}\right) - \frac{\partial v}{\partial x_k}\frac{\partial^2\bar{v}}{\partial x_j x_k}. \quad (44)$$

y

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\left|\frac{\partial v}{\partial x_k}\right|^2\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial v}{\partial x_k}\frac{\partial\bar{v}}{\partial x_k}\right) = 2\Re\left(\frac{\partial v}{\partial x_k}\frac{\partial^2\bar{v}}{\partial x_j x_k}\right). \quad (45)$$

Tenemos

$$4\tau\Re(\Delta v\partial_\xi) = 4\tau\Re\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 v}{\partial x_k^2}\cdot\sum_{j=1}^{n}\xi_j\frac{\partial\bar{v}}{\partial x_j}\right) = 4\tau\Re\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\xi_j\frac{\partial^2 v}{\partial x_k^2}\frac{\partial\bar{v}}{\partial x_j}\right)$$

$$= 4\tau\Re\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\xi_j\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial v}{\partial x_k}\frac{\partial\bar{v}}{\partial x_j}\right)\right) - 4\tau\Re\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\xi_j\frac{\partial v}{\partial x_k}\frac{\partial^2\bar{v}}{\partial x_k x_j}\right)$$

$$= 4\tau\Re\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\sum_{j=1}^{n}\xi_j\frac{\partial v}{\partial x_k}\frac{\partial\bar{v}}{\partial x_j}\right) - 2\tau\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\xi_j 2\Re\left(\frac{\partial v}{\partial x_k}\frac{\partial^2\bar{v}}{\partial x_k x_j}\right)$$

$$= 4\tau\Re\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial v}{\partial x_k}\partial_\xi\bar{v}\right) - 2\tau\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\xi_j\frac{\partial}{\partial x_j}\left|\frac{\partial v}{\partial x_k}\right|^2$$

$$= 4\tau\Re\mathrm{div}(\partial_\xi\bar{v}\nabla v) - 2\tau\sum_{j=1}^{n}\xi_j\frac{\partial}{\partial x_j}|\nabla v|^2 = 4\tau\Re\mathrm{div}(\partial_\xi\bar{v}\nabla v) - 2\tau\mathrm{div}\left(\xi|\nabla v|^2\right).$$

De esta expresión y (43) obtenemos (41).

4.3 Existencia de las soluciones complejas de la óptica geométrica.

Necesitaremos un resultado clásico del Análisis Funcional. el Teorema de Hahn-Banach.

Theorem 22 Teorema de Hahn-Banach. *Sea M un subespacio de un espacio normado y f un funcional lineal y acotado en M, entonces f puede ser extendido a un funcional lineal y acotado F en X tal que $\|F\| = \|f\|$.*

Su demostración puede encontrarse en [42], página 111.

Proposition 23 *Sea $n \geq 2$, $\tau > 0$ y $\rho = \tau(\xi + i\eta) \in \mathbb{C}^n$ con ξ, $\eta \in \mathbb{R}^n$ verificando que $\rho \cdot \rho = 0$. Si $q \in L^\infty(\Omega)$, existen soluciones de*

$$(\Delta - q)u = 0 \quad en\ \Omega$$

en $H_{\triangle}(\Omega)$ *de la forma*

$$u(x,\rho) = e^{x\cdot\rho}(1+\psi(x,\rho)), \quad \psi|_{\partial\Omega_-(\xi)} = 0, \tag{46}$$

verificando

$$\|\psi(.,\rho)\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{C}{\tau}, \quad \tau \geq \tau_0 \tag{47}$$

para alguna constante $C > 0$ *y algun* $\tau_0 > 0$*.*

Proof.
Consideramos

$$\mathcal{D} = \left\{ v \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega}) \ : \ v|_{\partial\Omega} = 0 \ \text{ y } \ \left.\frac{\partial v}{\partial \nu}\right|_{\Omega_+(\xi)} = 0 \right\}.$$

Para $\tau \in \mathbb{R}$ definimos

$$L^2_\tau(\Omega) = \left\{ f \ : \ \int_\Omega e^{2\tau\xi\cdot x}|f(x)|^2 dx < \infty \right\}.$$

$L^2_\tau(\Omega)$ es un espacio de Hilbert con el producto escalar

$$< f, g >_\tau = \int_\Omega e^{2\tau\xi\cdot x} f(x)\bar{g}(x)dx.$$

$L^2_\tau(\Omega)$ y $L^2_{-\tau}(\Omega)$ son duales con respecto al producto escalar usual

$$< f, g >_0 = \int_\Omega e^{2\tau\xi\cdot x} f(x)\bar{g}(x)dx.$$

Sea

$$M = \{(\Delta - \bar{q})v \ : \ v \in \mathcal{D}\}.$$

M es un subespacio de $L^2_\tau(\Omega)$. Dado $f \in L^2_{-\tau}(\Omega)$, definimos el operaor lineal l en M por

$$l((\Delta - \bar{q})v) = < v, f >_0$$

Veremos al final de la demostración, que de la estimación de Carleman podemos deducir

$$\|v\|_\tau \leq \frac{C}{\tau}\|(\Delta - \bar{q})v\|_\tau, \quad v \in \mathcal{D} \ \text{ y } \ \tau \geq \tau_0 > 0. \tag{48}$$

Esta desigualdad nos va a permitir demostrar que l es un funcional lineal y acotado en $(M, \|.\|_\tau)$, para $\tau \geq \tau_0 > 0$, con norma menor o igual que $\frac{C}{\tau}$.

$$|l((\Delta - \bar{q})v)| = |< v, f >_0| \leq ||v||_\tau \|f\|_{-\tau} \leq \frac{C}{\tau} \|(\Delta - \bar{q})v\|_\tau \|f\|_{-\tau},$$

para $\tau \geq \tau_0 > 0$. Por el Teorema de Hahn-Banach, l puede ser extendido a un operador lineal y acotado

$$\begin{aligned} l^* : L^2_\tau(\Omega) &\longmapsto \mathbb{C} \\ v &\longrightarrow l^*(v) =< v, g >_0 \qquad \text{para alguna } g \in L^2_{-\tau}(\Omega), \end{aligned}$$

verificando

$$< v, f >_0 = l((\Delta - \bar{q})v) = l^*((\Delta - \bar{q})v) =< ((\Delta - \bar{q})v, g >, \quad v \in \mathcal{D} \tag{49}$$

$$\|g\|_{-\tau} = \|l^*\| = \|l\| \leq \frac{C}{\tau} \|f\|_{-\tau} \qquad \tau \geq \tau_0 > 0. \tag{50}$$

(49) nos dice que g es una solución $L^2_\tau(\Omega)$ de $(\Delta - q)g = f$. Supuesto que $f \in L^2(\Omega)$ y $q \in L^\infty(\Omega)$ deducimos que $\Delta g \in L^2(\Omega)$ y de esto que $g \in H_\triangle(\Omega)$.

Si $v \in \mathcal{D}$, la fórmula de Green generalizada (38) nos asegura que

$$\int_{\partial\Omega} g \frac{\partial \bar{v}}{\partial \nu} d\sigma = \int_{\partial\Omega_-(\xi)} g \frac{\partial \bar{v}}{\partial \nu} d\sigma = 0,$$

lo que significa que $g|_{\partial\Omega_-(\xi)} = 0$.

Resumiendo, hemos demostrado

Lemma 24 *Dada $f \in L^2_{-\tau}(\Omega)$, existe τ_0 y $g \in H_\triangle(\Omega)$ tal que si $\tau \geq \tau_0 > 0$, g satisface*

$$(\Delta - q)g = f \quad \text{en } \Omega, \qquad g|_{\partial\Omega_-(\xi)} = 0,$$

y

$$\|g\|_{-\tau} \leq \frac{C}{\tau} \|f\|_{-\tau} \qquad \tau \geq \tau_0 > 0,$$

para alguna constante $C > 0$.

Nuestro objetivo es encontrar una solución u de

$$(\Delta - q)u = 0$$

de la forma

$$u = e^{x\cdot\rho}(1+\psi) \qquad \psi|_{\partial\Omega_-(\xi)} = 0,$$

y

$$\|\psi\|_{L^2(\Omega)} \le \frac{C}{\tau}.$$

Que u saisfaga $(\Delta - q)u = 0$ es equivalente a que ψ satisfaga

$$(\Delta - q)e^{x\cdot\rho}\psi = qe^{x\cdot\rho}.$$

Sea $f = qe^{x\cdot\rho} \in L^2_{-\tau}(\Omega)$. Por Lema 24, existe τ_0 y $v \in H_\triangle(\Omega)$ solución de

$$(\Delta - q)v = qe^{x\cdot\rho}, \qquad v|_{\partial\Omega_-(\xi)} = 0,$$

y

$$\|v\|_{-\tau} \le \frac{C}{\tau}\|qe^{x\cdot\rho}\|_{-\tau} \equiv \frac{C}{\tau} \qquad \tau \ge \tau_0 > 0.$$

Definimos $\psi = e^{-x\cdot\rho}v$ y

$$u(x,\rho) = e^{x\cdot\rho}(1+\psi(x)),$$

entonces u es solución de $(\Delta - q)u = 0$ en Ω, $\psi|_{\partial\Omega_-(\xi)} = 0$ y

$$\|\psi\|_{L^2(\Omega)} = \|v\|_{-\tau} \le \frac{C}{\tau}, \qquad \tau \ge \tau_0 > 0,$$

y queda demostrada la Proposición.

Demostración de (48)

Utilizamos la estimación de Carleman (40) para $u \in \mathcal{D}$ y ξ reemplazado por $-\xi$:

$$\begin{aligned}&\tfrac{8\tau^2}{d^2}\textstyle\int_\Omega e^{2\tau\xi\cdot x}|u|^2dx + \int_{\partial\Omega_+(-\xi)} 2\tau(-\xi)\cdot\nu e^{2\tau\xi\cdot x}|\partial_\nu u|^2 d\sigma\\ &\le \textstyle\int_\Omega e^{2\tau\xi\cdot x}|\Delta u|^2dx - \int_{\partial\Omega_-(-\xi)} 2\tau\xi\cdot\nu e^{2\tau\xi\cdot x}|\partial_\nu u|^2 d\sigma.\end{aligned} \tag{51}$$

Observando que

- Ya que en $\partial\Omega_+(-\xi)$ se tiene $(-\xi)\cdot\nu(x) > 0$, entonces

$$\int_{\partial\Omega_+(-\xi)} 2\tau(-\xi)\cdot\nu e^{2\tau\xi\cdot x}|\partial_\nu u|^2 d\sigma > 0.$$

- Supuesto que $\partial\Omega_-(-\xi) = \partial\Omega_+(\xi)$ y $\frac{\partial v}{\partial \nu} = 0$ en $\partial\Omega_+(\xi)$, entonces

$$\int_{\partial\Omega_-(-\xi)} 2\tau\xi \cdot \nu e^{2\tau\xi\cdot x}|\partial_\nu u|^2 d\sigma = 0.$$

deducimos de (51)

$$\frac{8\tau^2}{d^2}\int_\Omega e^{2\tau\xi\cdot x}|u|^2 dx \leq \int_\Omega e^{2\tau\xi\cdot x}|\Delta u|^2 dx \tag{52}$$

$$\int_\Omega e^{2\tau\xi\cdot x}|\Delta u|^2 dx = \int_\Omega e^{2\tau\xi\cdot x}|\Delta u - \bar{q}u + \bar{q}u|^2 dx$$

$$\leq \frac{1}{2}\int_\Omega e^{2\tau\xi\cdot x}|\Delta u - \bar{q}u|^2 dx + \frac{1}{2}\int_\Omega e^{2\tau\xi\cdot x}|\bar{q}u|^2 dx$$

$$\leq \frac{1}{2}\int_\Omega e^{2\tau\xi\cdot x}|\Delta u - \bar{q}u|^2 dx + \frac{||q||_\infty}{2}\int_\Omega e^{2\tau\xi\cdot x}|u|^2 dx.$$

Sea τ_0 tal que si $\tau \geq \tau_0$ se verifica

$$\frac{4\tau^2}{d^2} - \frac{||q||_\infty}{2} \geq 0 \iff \tau \geq \tau_0 = d\sqrt{\frac{||q||_\infty}{8}}.$$

De la desigualdad de encima y de (52)

$$\frac{4\tau^2}{d^2}\int_\Omega e^{2\tau\xi\cdot x}|u|^2 dx + \frac{4\tau^2}{d^2}\int_\Omega e^{2\tau\xi\cdot x}|u|^2 dx$$

$$\leq \frac{1}{2}\int_\Omega e^{2\tau\xi\cdot x}|\Delta u - \bar{q}u|^2 dx + \frac{||q||_\infty}{2}\int_\Omega e^{2\tau\xi\cdot x}|u|^2 dx,$$

Si $\tau \geq \tau_0$ tenemos

$$\int_\Omega e^{2\tau\xi\cdot x}|u|^2 dx \leq \frac{d^2}{8\tau^2}\int_\Omega e^{2\tau\xi\cdot x}|\Delta u - \bar{q}u|^2 dx.$$

El mismo argumento que hemos utilizado para demostrar (48)puede ser usado para demostrar el siguiente corolario que utilizaremos en la próxima subsección.

Corollary 25 *Para $q \in L^\infty(\Omega)$ existe $\tau_0 > 0$ y $C > 0$ tal que para toda $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$, $u|_{\partial\Omega} = 0$ y $\tau \geq \tau_0$, tenemos la estimación*

$$\begin{aligned} &\tau^2 \int_\Omega e^{-2\tau\xi\cdot x}|u|^2dx + \tau \int_{\partial\Omega_+(\xi)} \xi\cdot\nu e^{-2\tau\xi\cdot x}|\partial_\nu u|^2 d\sigma \\ &\leq C\int_\Omega e^{-2\tau\xi\cdot x}|(\Delta - q)u|^2dx - \tau C\int_{\partial\Omega_-(\xi)} \xi\cdot\nu e^{-2\tau\xi\cdot x}|\partial_\nu u|^2 d\sigma. \end{aligned} \tag{53}$$

4.4 Demostración de Teorema 16.

En la demostración haremos uso de las soluciones complejas de la óptica geométrica obtenidas por Sylvester y Uhlmann en [47]. Más específicamente, sea $q \in L^\infty(\Omega)$ y $\rho \in \mathbb{C}^n$ con $\rho\cdot\rho = 0$. Si $|\rho|$ es suficientemente grande, existen soluciones de

$$(\Delta - q)u = 0 \qquad \text{en } \Omega,$$

de la forma

$$u(x,\rho) = e^{x\cdot\rho}\left(1 + \psi_q(x,\rho)\right), \tag{54}$$

con

$$\|\psi_q(.,\rho)\|_{H^s(\Omega)} \leq \frac{C}{|\rho|^{1-s}} \qquad 0 \leq s \leq 2, \tag{55}$$

y como consecuencia

$$\|\psi_q(.,\rho)\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C, \tag{56}$$

para alguna constante $C > 0$ independiente de ρ.

Fórmula de Green.

Sea u_i solución de $(\Delta - q_i)u_i = 0$, $i = 1,2$, en $H_\triangle(\Omega)$ con $u_1|_{\partial\Omega} = u_2|_{\partial\Omega}$ y $\frac{\partial u_1}{\partial\nu}\big|_{\partial\Omega_{-,\epsilon}(\xi)} = \frac{\partial u_2}{\partial\nu}\big|_{\partial\Omega_{-,\epsilon}(\xi)}$ y $v_1 \in H_\triangle(\Omega)$ una solución de $(\Delta - q_1)v_1 = 0$.

Definimos $u = u_1 - u_2$. u satisface la ecuación

$$(\Delta - q_1)u = (q_1 - q_2)u_2 \qquad \text{en } \Omega.$$

Como $\gamma_0 u = 0$, de (33) $u \in H^2(\Omega)$. Si aplicamos la identidad de encima y la fórmula de Green generalizada (38) a u y v_1 tenemos

$$\int_\Omega (q_1 - q_2)u_2 v_1 dx = \int_{\partial\Omega_{+,\epsilon}(\xi)} \frac{\partial u}{\partial\nu} v_1 d\sigma. \tag{57}$$

Elección de u_1, u_2 y v_1.

Sea $\xi \in \mathbb{S}^{n-1}$ y $k \in \mathbb{R}^n$ fijos y ortogonales. Para τ suficiéntemente grande, definimos

$$\rho_2 = \tau\xi - i\frac{k+l}{2},$$

donde l es ortogonal a ξ y k y $|k|^2+|l|^2 = 4\tau^2$. Esto lo podemos hacer si $n \geq 3$. Con esta elección, $\rho_2 \cdot \rho_2 = 0$.

$u_2(x,\rho_2) = e^{x\cdot\rho_2}\left((1+\psi_{q_2}(x,\rho_2)\right)$ es una solución de $(\Delta - q_2)u_2 = 0$ en $H_\triangle(\Omega)$ dada por Proposición 23.

Ya que $\mathcal{C}_{q_1,\epsilon} = \mathcal{C}_{q_2,\epsilon}$, existe u_1 solución de $(\Delta - q_1)u_1 = 0$ en $H_\triangle(\Omega)$ con $u_1|_{\partial\Omega} = u_2|_{\partial\Omega}$ y $\frac{\partial u_1}{\partial\nu}\big|_{\partial\Omega_{-,\epsilon}(\xi)} = \frac{\partial u_2}{\partial\nu}\big|_{\partial\Omega_{-,\epsilon}(\xi)}$. Definimos $u = u_1 - u_2 \in H_\triangle(\Omega)$. Puesto que $\gamma_0 u = 0$, entonces $u \in H^2(\Omega)$.

Si $\rho_1 = -\tau\xi - i\frac{k-l}{2}$, sea

$$v_1(x,\rho_1) = e^{x\cdot\rho_1}\left(1+\psi_{q_1}(x,\rho)\right)$$

la solución obtenida en [47] satisfaciendo (55) y (56).

Aplicamos (57) a estas u_1, u_2 y v_1.

Demostración de:

$$\left|\int_{\partial\Omega_{+,\epsilon}(\xi)} \frac{\partial u}{\partial\nu} v_1 d\sigma\right| \longrightarrow 0 \quad \tau \longrightarrow \infty. \tag{58}$$

$$\int_\Omega (q_1 - q_2)u_2 v_1 dx \longrightarrow (q_1 \widehat{- q_2)}\chi_\Omega(k) \quad \tau \longrightarrow \infty. \tag{59}$$

Empezamos demostrando (58). Utilizando Hölder y (56)

$$\left|\int_{\partial\Omega_{+,\epsilon}(\xi)} \frac{\partial u}{\partial\nu} v_1 d\sigma\right| = \int_{\partial\Omega_{+,\epsilon}(\xi)} \left|e^{-\tau\xi\cdot x}\frac{\partial u}{\partial\nu}\right| |1+\psi_{q_1}(x,\rho_1)| d\sigma$$

$$\leq \left(\int_{\partial\Omega_{+,\epsilon}(\xi)} |1+\psi_{q_1}(x,\rho_1)|^2 d\sigma\right)^{1/2} \left(\int_{\partial\Omega_{+,\epsilon}(\xi)} \left|e^{-\tau\xi\cdot x}\frac{\partial u}{\partial\nu}\right|^2 d\sigma\right)^{1/2} \tag{60}$$

$$\leq C\left(\int_{\partial\Omega_{+,\epsilon}(\xi)} \left|e^{-\tau\xi\cdot x}\frac{\partial u}{\partial\nu}\right|^2 d\sigma\right)^{1/2}.$$

De (53) y el hecho de que $(\Delta - q_1)u = (q_1 - q_2)u_2$ obtenemos

$$\begin{aligned}
\tau\epsilon \int_{\partial\Omega_{+,\epsilon}(\xi)} \left| e^{-\tau\xi\cdot x} \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|^2 d\sigma &\leq \tau \int_{\partial\Omega_{+}(\xi)} \xi\cdot\nu(x) \left| e^{-\tau\xi\cdot x} \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|^2 d\sigma \\
&\leq \int_\Omega \left| e^{-\tau\xi\cdot x}(\Delta - q_1)u \right|^2 dx = \int_\Omega \left| e^{-\tau\xi\cdot x}(q_1 - q_2)u_2 \right|^2 dx \qquad (61) \\
&\leq C\left(\|q_1\|_{L^\infty(\Omega)} + \|q_2\|_{L^\infty(\Omega)}\right)^2 \left(1 + \|\psi_2\|^2_{L^2(\Omega)}\right).
\end{aligned}$$

Si hacemos uso de (60) y (61) obtenemos

$$\left| \int_{\partial\Omega_{+,\epsilon}(\xi)} \frac{\partial u}{\partial \nu} v_1 d\sigma \right| \leq \frac{C}{\tau^{1/2}} \longrightarrow 0, \quad \tau \longrightarrow \infty.$$

Demostramos ahora (59).

$$\int_\Omega (q_1 - q_2)u_2 v_1 dx = \int_\Omega (q_1 - q_2)e^{-ik\cdot x}\left(1 + \psi_{q_2}(x,\rho_2)\right)\left(1 + \psi_{q_1}(x,\rho_1)\right) dx$$

$$\begin{aligned}
&= (\widehat{q_1 - q_2)\chi_\Omega}(k) + \int_\Omega (q_1 - q_2)e^{-ik\cdot x}\psi_{q_1}(x,\rho_1) dx \\
&+ \int_\Omega (q_1 - q_2)e^{-ik\cdot x}\psi_{q_2}(x,\rho_2)\left(1 + \psi_{q_1}(x,\rho_1)\right) dx.
\end{aligned}$$

Vamos a demostrar que las dos últimas integrales tienden a 0 cuando $\tau \to \infty$. Lo vemos con la última, y para esto, usaremos (47) y (55).

$$\left| \int_\Omega (q_1 - q_2)e^{-ik\cdot x}\psi_{q_2}(x,\rho_2)\left(1 + \psi_{q_1}(x,\rho_1)\right) dx \right|$$

$$\leq C\left(\|q_1\|_{L^\infty(\Omega)} + \|q_1\|_{L^\infty(\Omega)}\right) \|\psi_{q_2}\|_{L^2(\Omega)} \|1 + \psi_{q_1}\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{C}{\tau} \to 0, \quad \tau \to \infty.$$

Luego hemos demostrado que $(\widehat{q_1 - q_2)\chi_\Omega}(k) = 0$ cuando k es ortogonal a ξ. Eligiendo ξ en un entorno cónico pequeño y usando el hecho de que $\widehat{q_1 - q_2}$ es analítica (su transformada de Fourier tiene soporte compacto), obtenemos que $q_1 = q_2$.

References

[1] R. A. Adams, Sobolev spaces. Academic Press, (1975 Appl Anal. **27** (1988), 153-172.

[2] G. Alessandrini, Stable determination of conductivity by boundary measurements, Appl Anal. **27** (1988), 153-172.

[3] G. Alessandrini, Singular solutions of elliptic equations and the determination of conductivity by boundary measurements , J. Diff. Eq. **84** (1990), 252-272.

[4] K. Astala y L. Päivärinta, Calderón Inverse Conductivity problem in plane , Ann. of Math. **2** (2006), 265-299.

[5] T. Barceló, D. Faraco y A. Ruiz. Stability of the inverse conductivity problen in the plane. J. Math. Pur. Appli **88** (2007), 522-556.

[6] J. A. Barceló, T. Barceló y A. Ruiz. Stability of Calderón the inverse conductivity problen in the plane for lees regular conductivities , J. Diff. Eq. **173** (2001), 231-270.

[7] Borcea, L. Electrical impedance tomografia. Inverse Problem 18 ,R99-R136, 2002. Addendum Inverse Problems 19 997-998.

[8] R. Brown, Global uniqueness in the impedance imaging problem for less regular conduvtivities, SIAN J. Math. Anal.. **27** (1996), 1049-1056.

[9] R. Brown y G. Uhlmann, Uniqueness in the inverse conductivity problem for nonsmooth condutivities in two dimensions, Comm. Part. Diff Equ. **22** (1997), 1009-1027.

[10] A. Bukhgein y G. Uhlmann, Recovering a potential from partial Cauchy data, Comm. Part. Diff Equ. **27** (2002), 653-668.

[11] A. Calderón, On an inverse boundary value problem, en **Seminar on Numerical Analysis and its Application to Continuum Physic** (Rio de Janeiro, 1980), Soc. Brasil Mat., Rio de Janeiro (1980), 65-73.

[12] S. Chanillo, A problem in electrical prospecion and a n-dimensional Borg-Levinmson theorem, Proc AMS. **108** (1990), 761-767.

[13] M. Cheney, D. Isaacson y J. C. Negwell, Electrical impedance tomography, SIAM Review **41**(1999), 85-101.

[14] A. Clop, D. Faraco y A. Ruiz, Integral stability of Calderón inverse conductivity problem intheplane, preprin (2008).

[15] H. Cornean, K. Knudsen and S. Siltanen. Toward a d-bar reconstruction method for three-dimensional EIT. Preprint (2008).

[16] Dautrat y J. L. Lions , Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology. Vol 2, Springer-Verlag, 1993.

[17] P. Grisvard, Elliptic problems in nonsmooth domains. Pitman (1985).

[18] H. Heck y J. N. Wang, Stability estimates for the inverse boundary problem by partial Cauchy data, Inverse Problem **22**(2006), 1787-1796.

[19] O. Imanuvilov, G. Uhlmann y M. Yamamto, Global uniqueness from partial Cauchy data in two dimensions, preprint: arXi:0809.3037 (2008).

[20] O. Imanuvilov, G. Uhlmann y M. Yamamto, Partial data for the Calderon problem in two dimension, preprint: arXi:0810.2286 (2008).

[21] V. Isakov,On uniqueness in the inverse conducivity problem with local data. Journal of Inverse Problems and Imaging **1** (2008), 95-105.

[22] C. Kening, A. Ruiz y Sogge,Uniform Sobolev inequalities and unique continuation for second order constant coefficients differential operatoros, Duke Math. J. **55** (1987), 329-347.

[23] C. Kening, J. Sjötrand y G. Uhlmann, The Calderón problem with partia data. Ann. of Math **165** (2007), 565-591.

[24] R. Kohn, A. Mckenney, Numerical implementation of a variational methods for electrical impedance tomography. Inverse problems **6** (1990), 389-414.

[25] R. Kohn, M. Vogelius, Identification of an unknown conductivitu by means of measuraments at the boundary. em Inverse Problems (NY, 1983, D. McLaugli, ed.) Pro. AMS 14, 1884, 113-123.

[26] R. Kohn, M. Vogelius, Determining conductivity by boundary measurement. Comm. Pure Appl. Mathe. **37** (1984), 289-298.

[27] R. Kohn, M. Vogelius, Determining conductivity by boundary measurement II.Interior results Comm. Pure Appl. Mathe. **38** (1985), 644-667.

[28] R. Kress, Numerical methods in inverse acoustic obtacle scattering. Inverse problems in partial differential equations SIAM (1990) 61-72.

[29] K. Knudsen. On the Inverse Conductivity Problem. PhD thesis, Aalborg University, 2002. http://www.math.auc.dk/kim/Papers/thesisKimKnudsen.pdf

[30] K. Knudsen. A new diret methods for reconstructing isotropic conductivities in the plane. Physiological Measurement 24, 391-401. 2003

[31] K. Knudsen, The Calderón problem with data for less smooth conductivities. Comm. Part. Diff. Equa. **31** (2006), 57-71.

[32] N. Mandache. Exponential instability in an inverse problem for de Schödinger equation. InverseProblem 17, 2001. 1435-1444.

[33] J. Lee y G. Uhlmann, Determining anisotropic real-analytic conductivities by boundary meauraments, Comm. Pure App. Math. **42** (1989), 1097-1112 .

[34] L. Liu, Stability estimates for the two-dimensional inverse conductivity problem, Ph. D. Thesis, Dep. of Mathematical, University of Rochester, New York, (1997).

[35] J. E. Marsden y A. J. Tromba. Cálculo vectorial. Adison-Wesley Iberoamericana. 1991.

[36] Mueller, J. L. and Siltanen, S. Direct reconstructions of conductivities from boundary measurements. SIAN Journal of Scientific Computation 24, 1232-1266. 2003.

[37] A. Nachman, Reconstructions from boundary meauraments, Annals of Math. **128** (1988), 531-587.

[38] A. Nachman, Global uniqueness for a two-dimensional inverse boundary value problem. **143** (1995), 71-96.

[39] National Research Council Instituten of Medicine, *Mathematics and physics if emerging biomedical imaging* National Academy Press, 1986.

[40] R. Novikov, Multidimensional inverse spectral problems for the equation $-\Delta\psi + (v(x) - Eu(x))\psi = 0$ (en ruso), Funktsional Anal. i Prilozhen.. **22** (1988), 11-22.Traducción al ingles: Funct. Anal. Appli. **22** (1987) 531-587.

[41] L. Päivärinta, A. Pachenko y G. Uhlmaann, Complex geometrical optical solutions for Lipschitz conductivities, Rev. Mateática Iberoamericana. **19** (2003), 57-72.

[42] W. Rudin, Real and Complex Analysis , McGraw-Hill, 1974.

[43] A. Ruiz, Harmonic analysis amd inverse problems..2008. http://www.uam.es/gruposinv/inversos/publicaciones/index.html

[44] M. Salo. Calderon problem. Lecture notes. 2008. http://www.rni.helsinki.fi/ msa/teaching/calderon/calderon-lectures.pdf.

[45] E. Stein, Singular Integrals an Differentiability Properties o Functions, Prinveton University Press. 1970.

[46] J. Sylvester , An anisotropic inverse boundary value problem, Comm Pure Appl. Math. **431** (1990), 202-232.

[47] J. Sylvester y G. Uhlmaann, A global uniqueness theorem for an inverse boundary value problem, Annals of Math. **125** (1987), 153-169.

[48] J. Sylvester y G. Uhlmaann, Inverse boundary value problem at the boundary-continuous dependence, Comm Pure Appl. Math. **41** (1988), 197-221.

[49] L. Tartar, An Introduction to Sobolev Spaces and Interpolation Spaces, Lectures Notes of the Unione Matematica Italiana. Springer. 2007.

[50] M. Taylor, Partial Differential Equations. Vol 1, Springer-Verlag, 1996.