Nuestro trabajo

Marta Macho Stadler

UPV/EHU

Valencia, 12 y 13 de junio de 2006

Índice

Índice

Clasificante de un grupoide

Dada una variedad foliada, $(M, \mathcal{F})$, si G es su grupoide de holonomía, un teorema debido a Buffet-Lor prueba que existe un espacio topológico BG (único salvo equivalencias de homotopía) y una aplicación continua $i\colon BG \longrightarrow M/\mathcal{F}$, con la propiedad universal de que para cada X y $f\colon X \longrightarrow M/\mathcal{F}$, existe $g\colon X \longrightarrow BG$ definida salvo homotopía y tal que $f = i \circ g$.

Clasificante de un grupoide

Dada una variedad foliada, $(M, \mathcal{F})$, si G es su grupoide de holonomía, un teorema debido a Buffet-Lor prueba que existe un espacio topológico BG (único salvo equivalencias de homotopía) y una aplicación continua $i\colon BG \longrightarrow M/\mathcal{F}$, con la propiedad universal de que para cada X y $f\colon X \longrightarrow M/\mathcal{F}$, existe $g\colon X \longrightarrow BG$ definida salvo homotopía y tal que $f = i \circ g$.

BG es un CW-complejo y existe un G-fibrado principal EG (contráctil) sobre BG con la siguiente propiedad universal: para cada X y G-fibrado principal E sobre X, existe $f\colon X \longrightarrow BG$ tal que $E = f^*(EG)$.

Clasificante de un grupoide

Dada una variedad foliada, $(M, \mathcal{F})$, si G es su grupoide de holonomía, un teorema debido a Buffet-Lor prueba que existe un espacio topológico BG (único salvo equivalencias de homotopía) y una aplicación continua $i \colon BG \longrightarrow M/\mathcal{F}$, con la propiedad universal de que para cada X y $f \colon X \longrightarrow M/\mathcal{F}$, existe $g \colon X \longrightarrow BG$ definida salvo homotopía y tal que $f = i \circ g$.

BG es un CW-complejo y existe un G-fibrado principal EG (contráctil) sobre BG con la siguiente propiedad universal: para cada X y G-fibrado principal E sobre X, existe $f \colon X \longrightarrow BG$ tal que $E = f^*(EG)$.

Se puede pensar en BG (objeto transverso) como un espacio foliado $(W, \mathcal{F}_W)$, con hojas contráctiles y cuyos grupoides de holonomía transversos son localmente isomorfos a G.

K-orientación

La K-teoría es una teoría compleja, con soporte compacto. Al trabajar con fibrados reales (fibrados tangentes, fibrados tangentes a espacios foliados, ...), se precisa de una estructura adicional para complexificarlos .

K-orientación

La K-teoría es una teoría compleja, con soporte compacto. Al trabajar con fibrados reales (fibrados tangentes, fibrados tangentes a espacios foliados, ...), se precisa de una estructura adicional para complexificarlos .

La K-orientación, definida a través de estructuras *spin*^{c}, es la orientación natural que garantiza la existencia de teoremas del índice, de dualidad, de isomorfismo de Thom, ..., para esta teoría de cohomología.

K-orientación

Sea $\mathrm{Ml}_\mathrm{n}^\mathrm{c}$ el grupo $\mathrm{Ml}_\mathrm{n}(\mathbb{R}) \times_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} \mathrm{U}(1)$, donde $\mathrm{Ml}_\mathrm{n}(\mathbb{R})$ es el grupo metalineal, es decir, el revestimiento no trivial de dos hojas del grupo de las matrices reales con determinante positivo $\mathrm{Gl}_\mathrm{n}^+(\mathbb{R})$. El compacto maximal de $\mathrm{Ml}_\mathrm{n}^\mathrm{c}$ es $spin^c(n)$.

K-orientación

Sea $\mathrm{Ml}_\mathrm{n}^\mathrm{c}$ el grupo $\mathrm{Ml}_\mathrm{n}(\mathbb{R}) \times_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} \mathrm{U}(1)$, donde $\mathrm{Ml}_\mathrm{n}(\mathbb{R})$ es el grupo metalineal, es decir, el revestimiento no trivial de dos hojas del grupo de las matrices reales con determinante positivo $\mathrm{Gl}_\mathrm{n}^+(\mathbb{R})$. El compacto maximal de $\mathrm{Ml}_\mathrm{n}^\mathrm{c}$ es $spin^c(n)$.

Una estructura *spin*^{c} es el análogo complejo de estructura *spin* en variedades (una estructura *spin*^{c} sobre un fibrado vectorial real E es una orientación para E con un poco más de estructura extra).

K-orientación

Una variedad M se dice *spin*^{c}, si TM tiene una estructura *spin*^{c}.

K-orientación

Una variedad M se dice *spin*^{c}, si TM tiene una estructura *spin*^{c}.

Si $(M, \mathcal{F})$ es una variedad foliada, $Hol(\mathcal{F})$ es *K-orientado*, si el grupo estructural del fibrado tangente a la foliación $T(\mathcal{F})$, se reduce a *spin*^{c}.

K-orientación

Una variedad M se dice *spin*^{c}, si TM tiene una estructura *spin*^{c}.

Si $(M, \mathcal{F})$ es una variedad foliada, $Hol(\mathcal{F})$ es *K-orientado*, si el grupo estructural del fibrado tangente a la foliación $T(\mathcal{F})$, se reduce a *spin*^{c}.

Si X es una G-variedad y $\nu(\mathcal{F})$ es el fibrado normal a la foliación, una aplicación $f : X \longrightarrow BG$ se dice *K-orientable*, si el fibrado $T(X) \oplus f^*(\nu)$ posee una estructura *spin*^{c}. Y cuando se elige una de ellas, se dice que f es *K-orientada*.

Un teorema del índice K-teórico

A. Connes conjetura la existencia de una fórmula del índice entre la K-teoría topológica y analítica de variedades foliadas: puede verse como una generalización del teorema del índice de Atiyah y Singer.

Un teorema del índice K-teórico

A. Connes conjetura la existencia de una fórmula del índice entre la K-teoría topológica y analítica de variedades foliadas: puede verse como una generalización del teorema del índice de Atiyah y Singer.

Se consideran ternas (X, E, f) (*K-ciclos*), donde:

Un teorema del índice K-teórico

A. Connes conjetura la existencia de una fórmula del índice entre la K-teoría topológica y analítica de variedades foliadas: puede verse como una generalización del teorema del índice de Atiyah y Singer.

Se consideran ternas (X, E, f) (*K-ciclos*), donde:

(i) X es una variedad cerrada y E un G-fibrado vectorial complejo sobre X,

Un teorema del índice K-teórico

A. Connes conjetura la existencia de una fórmula del índice entre la K-teoría topológica y analítica de variedades foliadas: puede verse como una generalización del teorema del índice de Atiyah y Singer.

Se consideran ternas (X, E, f) (*K-ciclos*), donde:

(i) X es una variedad cerrada y E un G-fibrado vectorial complejo sobre X,

(ii) $f : X \longrightarrow BG$ es una aplicación K-orientada.

K-teoría topológica

No se supone X conexa y E puede tener distintos rangos sobre distintas componentes conexas de M.

K-teoría topológica

No se supone X conexa y E puede tener distintos rangos sobre distintas componentes conexas de M.

Se define una relación de equivalencia $\sim$ sobre estos K-ciclos (a través de ciertas condiciones de suma disjunta, de bordismo y de modificación de fibrados vectoriales). Y se define $K_{top}(BG)$ como el cociente de los K-ciclos por esta relación de equivalencia.

K-teoría topológica

No se supone X conexa y E puede tener distintos rangos sobre distintas componentes conexas de M.

Se define una relación de equivalencia $\sim$ sobre estos K-ciclos (a través de ciertas condiciones de suma disjunta, de bordismo y de modificación de fibrados vectoriales). Y se define $K_{top}(BG)$ como el cociente de los K-ciclos por esta relación de equivalencia.

• Si $\nu = 0$ (foliación por una única hoja), $K_{top}(BG) \simeq K^*(BG)$.
• Si M está foliado por puntos, BG tiene el tipo de homotopía de M, $\nu \simeq T(M)$ y $K_{top}(BG) \simeq K^*(M)$.

La conjetura de Baum-Connes

El teorema longitudinal del índice ayuda a construir $\mu\colon K_{top}(BG) \longrightarrow K_*(C^*(M,\mathcal{F}))$, y entonces tenemos la conjetura de Baum-Connes:

La conjetura de Baum-Connes

El teorema longitudinal del índice ayuda a construir $\mu\colon K_{top}(BG) \longrightarrow K_*(C^*(M,\mathcal{F}))$, y entonces tenemos la conjetura de Baum-Connes:

Dada una variedad foliada$(M,\mathcal{F})$, la aplicación K-índice $\mu\colon K_{top}(BG) \longrightarrow K_*(C^*(M,\mathcal{F}))$ es un isomorfismo de grupos.

Verificada

La conjetura de Baum-Connes se ha demostrado para:

Verificada

La conjetura de Baum-Connes se ha demostrado para:

• fibraciones localmente triviales $F^p \longrightarrow M \longrightarrow B^q$ (B es el espacio de hojas): $C^*(M,\mathcal{F}) \simeq C_0(B) \otimes \mathcal{K}$ y $K_*(C^*(M,\mathcal{F})) \simeq K^*(B)$.

Verificada

La conjetura de Baum-Connes se ha demostrado para:

• fibraciones localmente triviales $F^p \longrightarrow M \longrightarrow B^q$ (B es el espacio de hojas): $C^*(M,\mathcal{F}) \simeq C_0(B) \otimes \mathcal{K}$ y $K_*(C^*(M,\mathcal{F})) \simeq K^*(B)$.

• Para foliaciones inducidas por acciones libres (isomorfismo de Thom) de $\mathbb{R}^n$: $C^*(M,\mathcal{F}) \simeq C_0(M) \rtimes \mathbb{R}^n$ y su K-teoría es $K^*(M)$ si n par y $K^{*+1}(M)$ si n es impar [A.Connes].

Verificada

La conjetura de Baum-Connes se ha demostrado para:

• fibraciones localmente triviales $F^p \longrightarrow M \longrightarrow B^q$ (B es el espacio de hojas): $C^*(M,\mathcal{F}) \simeq C_0(B) \otimes \mathcal{K}$ y $K_*(C^*(M,\mathcal{F})) \simeq K^*(B)$.

• Para foliaciones inducidas por acciones libres (isomorfismo de Thom) de $\mathbb{R}^n$: $C^*(M,\mathcal{F}) \simeq C_0(M) \rtimes \mathbb{R}^n$ y su K-teoría es $K^*(M)$ si n par y $K^{*+1}(M)$ si n es impar [A.Connes].

• Para foliaciones inducidas por acciones libres de grupos de Lie Γ resolubles simplemente conexos, $K_*(C^*(M,\mathcal{F})) \simeq K^{*+dim(\Gamma)}(M)$.

Verificada

- Para suspensiones ($\pi_1(B)$ es un grupo discreto y se tiene una representación inyectiva $R\colon \Gamma \longrightarrow \mathit{Diff}(F)$), puede tomarse F como una transversal fiel, las hojas son revestimientos de B, el grupoide transverso es $G_F^F \simeq F \times \pi_1(B)$ y $C^*(M, \mathcal{F}) \simeq C_0(F) \rtimes_{red} \pi_1(B)$.

Verificada

- Para suspensiones ($\pi_1(B)$ es un grupo discreto y se tiene una representación inyectiva $R\colon \Gamma \longrightarrow \mathit{Diff}(F)$), puede tomarse F como una transversal fiel, las hojas son revestimientos de B, el grupoide transverso es $G_F^F \simeq F \times \pi_1(B)$ y $C^*(M,\mathcal{F}) \simeq C_0(F) \rtimes_{red} \pi_1(B)$.

- Para foliaciones de Reeb sobre $\mathbb{T}^2$ y $\mathbb{S}^3$ [A.M.Torpe].

Verificada

- Para foliaciones sin holonomía ([T. Natsume] caso C^∞ y [MMS] caso topológico): BG puede verse como un toro $\mathbb{T}^n$ (n orden del grupo de holonomía de la foliación), dotado de una foliación lineal.

Verificada

• Para foliaciones sin holonomía ([T. Natsume] caso C^∞ y [MMS] caso topológico): BG puede verse como un toro $\mathbb{T}^n$ (n orden del grupo de holonomía de la foliación), dotado de una foliación lineal.

• Para foliaciones casi sin holonomía y foliaciones donde es posible hacer funcionar un cierto "esquema en abiertos y cerrados"([G.Hector y MMS] y [MMS]).

Verificada

- Para foliaciones sin holonomía ([T. Natsume] caso C^∞ y [MMS] caso topológico): BG puede verse como un toro $\mathbb{T}^n$ (n orden del grupo de holonomía de la foliación), dotado de una foliación lineal.

- Para foliaciones casi sin holonomía y foliaciones donde es posible hacer funcionar un cierto "esquema en abiertos y cerrados"([G.Hector y MMS] y [MMS]).

- Otros ejemplos no triviales de foliaciones: foliación de Sacksteder, foliación de Hirsch, foliaciones $\mathbb{Z}$-periódicas, etc.

Índice

Espacios foliados

La influencia de la topología de la variedad ambiente sobre la topología y la dinámica transversa de las hojas ha sido una de las cuestiones fundamentales de la teoría de foliaciones desde sus inicios.

Espacios foliados

La influencia de la topología de la variedad ambiente sobre la topología y la dinámica transversa de las hojas ha sido una de las cuestiones fundamentales de la teoría de foliaciones desde sus inicios.

Hoy se aborda de manera diferente: se estudian las propiedades topológicas o dinámicas de las hojas genéricas en sentido topológico o medible, es decir, limitándose a estudiar un conjunto de hojas residual o de medida total.

Laminaciones

El estudio dinámico de las foliaciones puede reducirse al caso minimal (hojas densas), lo que conlleva la pérdida de la regularidad transversa, dando lugar a la noción de laminación: la relación de equivalencia discreta inducida sobre una transversal fiel está dada por la acción del pseudogrupo de holonomía. La elección de un sistema de generadores permite realizar cada órbita como conjunto de vértices de un grafo conexo. Así pues, desde una perspectiva actual, el término foliado no se limita a las variedades, sino que hace referencia a otros sistemas como grupos y pseudogrupos, relaciones de equivalencia y grupoides, laminaciones y espacios foliados más generales, cuyas hojas no son variedades, sino grafos o complejos celulares.

Mosaicos

Un mosaico del plano es una descomposición en polígonos (las teselas) obtenidos por traslación (o por medio de un grupo de movimientos rígidos que contenga a las traslaciones) a partir de un número finito de teselas modelo.

Mosaicos

Un mosaico del plano es una descomposición en polígonos (las teselas) obtenidos por traslación (o por medio de un grupo de movimientos rígidos que contenga a las traslaciones) a partir de un número finito de teselas modelo.

Dos mosaicos son próximos si podemos hacerlos coincidir en una gran bola centrada en el origen mediante pequeñas traslaciones (topología de Gromov).

Mosaicos

La traslación del origen define una laminación cuyas hojas se identifican con los cocientes de los mosaicos por las simetrías. La clausura de un mosaico repetitivo (cualquier motivo posee una copia por traslación contenida en cualquier bola de radio uniforme) es un cerrado saturado minimal.

Mosaicos

La traslación del origen define una laminación cuyas hojas se identifican con los cocientes de los mosaicos por las simetrías. La clausura de un mosaico repetitivo (cualquier motivo posee una copia por traslación contenida en cualquier bola de radio uniforme) es un cerrado saturado minimal.

Si el mosaico es aperiódico (i.e. no coincide con ningún trasladado), la laminación inducida tiene holonomía trivial.

Mosaicos

Los mosaicos sirven de modelo para los patrones de difracción de los sólidos casi-cristalinos, así tiene sentido interesarse por la naturaleza del espectro de una partícula que se mueva en un sólido de ese tipo.

Mosaicos

Los mosaicos sirven de modelo para los patrones de difracción de los sólidos casi-cristalinos, así tiene sentido interesarse por la naturaleza del espectro de una partícula que se mueva en un sólido de ese tipo.

En el caso de un mosaico aperiódico, esto conduce naturalmente al estudio de un espacio no conmutativo, ya que los observables pertenecen a una C*-álgebra asociada al mosaico.

Mosaicos

Los mosaicos sirven de modelo para los patrones de difracción de los sólidos casi-cristalinos, así tiene sentido interesarse por la naturaleza del espectro de una partícula que se mueva en un sólido de ese tipo.

En el caso de un mosaico aperiódico, esto conduce naturalmente al estudio de un espacio no conmutativo, ya que los observables pertenecen a una C*-álgebra asociada al mosaico.

A la laminación inducida sobre la clausura de un mosaico repetitivo y aperiódico se le asocia una C*-álgebra natural, establemente isomorfa a la C*-álgebra de la relación de equivalencia inducida sobre una transversal canónica.

Nuestro estudio

Estudiamos la dinámica topológica y medible de laminaciones que provienen de espacios de mosaicos.

Nuestro estudio

Estudiamos la dinámica topológica y medible de laminaciones que provienen de espacios de mosaicos.

El estudio K-teórico (y de K-teoría ordenada) da información sobre esta dinámica.