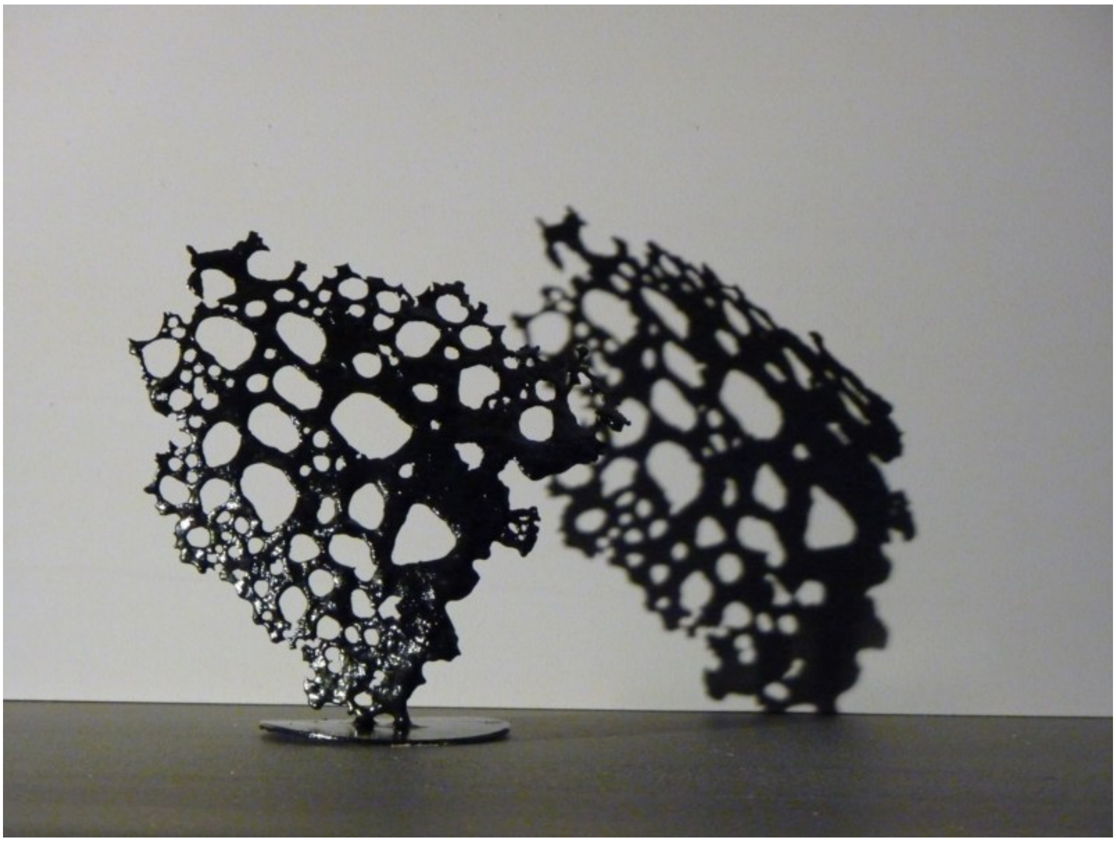
TOPOLOGÍA

Curso 2013/2014



Prof. Marta Macho Stadler

Facultad de Ciencia y Tecnología-Zientzia eta Teknologia Fakultatea

Universidad del País Vasco-Euskal Herriko Unibertsitatea

Marta Macho Stadler
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencia y Tecnología
Universidad del País Vasco–Euskal Herriko Unibertsitatea
Barrio Sarriena s/n, 48940 Leioa
e-mail: marta.macho@ehu.es
http://www.ehu.es/∼mtwmastm
Tlf: 946015352 Fax: 946012516

Portada: Escultura de la serie **El microcosmos**
Mikel Varas, http://www.mikelvaras.com

Desde hace muchos, muchos años hay un instante del día donde el crepúsculo es apoderado por el momento. El tiempo.
Mezclándose la sombra con la luz.
En diálogo íntimo es difícilmente distinguible la oscuridad de la claridad. Y es entonces cuando nada es realmente oscuro, ni realmente claro. Es en ese instante de mezcla cuando yo me apoyo en la pureza del material.
Es en ese instante cuando el planeta entra y está en equilibrio. Cuando la obra en tinieblas, se forma y cobra sentido.

“El microcosmos”
Mikel Varas

Índice general

Introducción

LOS TRONCOS que contienen cuartetos de cuerda
llevan siglos esperando a alguien
que sepa pulsar las cuerdas desde el interior
de la corteza.

"Las flores de alcohol"
Sofía Rhei

0.1. ¿Qué es la topología?

... Además de aquella parte de la geometría que trata sobre cantidades y que se ha estudiado en todo tiempo con gran dedicación, el primero que mencionó la otra parte, hasta entonces desconocida, fue G. Leibniz, el cual la llamó geometría de la posición. Leibniz determinó que esta parte se tenía que ocupar de la sola posición y de las propiedades provenientes de la posición en todo lo cual no se ha de tener en cuenta las cantidades, ni su cálculo... Por ello, cuando recientemente se mencionó cierto problema que parecía realmente pertenecer a la geometría, pero estaba dispuesto de tal manera que ni precisaba la determinación de cantidades ni admitía solución mediante el cálculo de ellas, no dudé en referirlo a la geometría de la posición... **L. Euler**

En contraste con el álgebra, la geometría y la teoría de los números, cuyas genealogías datan de tiempos antiguos, la topología aparece en el siglo XVII, con el nombre de *analysis situs*, es decir, *análisis de la posición*.

La topología se ocupa de aquellas propiedades de las figuras que permanecen invariantes, cuando son plegadas, dilatadas, contraídas o deformadas, de modo que no aparezcan nuevos puntos o se hagan coincidir puntos diferentes. Así, la transformación permitida presupone que hay una correspondencia biunívoca entre los puntos de la figura original y los de la transformada, y que la deformación hace corresponder *puntos próximos* a *puntos próximos*. Esta última propiedad se llama *continuidad*, y lo que se requiere es que la transformación y su inversa sean ambas continuas: trabajamos con *homeomorfismos*.

En topología se trabaja con los mismos objetos que en geometría, pero de modo distinto: las distancias o los ángulos no son importantes, ni siquiera la alineación de los puntos. En topología, un círculo es equivalente a una elipse; una bola no se distingue de un cubo: se dice que la bola y el cubo son objetos *topológicamente equivalentes*, porque se pasa de una al otro mediante una transformación continua y reversible.

0.2. Un poco de historia

En 1679, G. Leibniz (1646–1716) publica su famoso libro *Characteristica Geometrica*, en el que –en términos modernos– intenta estudiar más las propiedades topológicas que las puramente métricas de las figuras. Insiste en que, aparte de la representación coordenada de figuras, "*se necesita de otro análisis, puramente geométrico o lineal, que también defina la posición (situs), como el álgebra define la magnitud*".

Los matemáticos en el siglo XVIII muestran poco interés en la topología, con la excepción de L. Euler (1707–1783) cuyo genio comprende todas las matemáticas. En 1736, Euler publica un artículo con la solución al famoso *Problema de los puentes de Königsberg*, titulado *"Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis"*. El título ya indica que Euler es consciente de que está trabajando con una clase diferente de matemática, en la que la geometría ya no es importante.

El siguiente paso en esta *liberación* de la matemática también se debe a Euler. En 1750 escribe una carta a C. Goldbach (1690–1764) en la que da la famosa *fórmula de Euler* para un poliedro: $v - l + c = 2$, donde v es en número de vértices, l es el número de lados y c el número de caras del poliedro. Esta fórmula de asombrosa simplicidad, parece que fue olvidada por Arquímedes (287 AC–212 AC) y R. Descartes (1596–1650), aunque los dos escribieron extensamente sobre poliedros: para los matemáticos anteriores a Euler, parecía imposible pensar en propiedades geométricas sin que la medida estuviera involucrada. Euler publica los detalles de esta fórmula en 1752 en dos artículos, donde da una demostración basada en la disección de sólidos en *rodajas tetraédricas*. Euler pasa por alto algunos problemas en su prueba; por ejemplo, supone que los sólidos son convexos.

A.J. Lhuilier (1750–1840) continúa el camino iniciado por Euler con su fórmula poliédrica. En 1813, publica un importante trabajo, donde indica que la fórmula de Euler es falsa para sólidos con asas: si un sólido tiene g asas –un *asa* es un toro *adjuntado* al espacio–, Lhuilier prueba que la fórmula se transforma en $v - l + c = 2 - 2g$. Éste es el primer resultado conocido sobre *invariantes topológicos*.

A.F. Möbius (1790–1868) publica una descripción de la banda que lleva su nombre en 1865. Intenta escribir la propiedad de *unicidad de cara* de la banda en términos de falta de orientabilidad.

J.B. Listing (1802–1882) es el primero en usar la palabra *topología*: sus ideas se deben principalmente a su maestro C.F. Gauss (1777–1855). Listing escribe un artículo en 1847 titulado *"Vorstudien zur Topologie"*, y en 1861 publica otro artículo, en el que describe la banda de Möbius –cuatro años antes que Möbius– y estudia la noción de *conexión* de las superficies. Listing no es el primero en examinar las componentes conexas de las superficies; B. Riemann (1822–1866) estudia este concepto en 1851 y de nuevo en 1857 cuando introduce las *superficies de Riemann*.

C. Jordan (1838–1922) publica en 1882 su *"Cours d'Analyse"*, que contiene pruebas rigurosas de resultados topológicos intuitivamente obvios sobre curvas en el plano, introduciendo además otro método para estudiar la conexión de las superficies.

Listing examina la conexión en el espacio euclídeo de dimensión tres, pero E. Betti (1823–1892) extiende estas ideas a dimensiones arbitrarias.

E. de Jonquières (1820–1901) generaliza en 1890 la fórmula para poliedros convexos de Euler a poliedros no necesariamente convexos.

La idea de conexión es descrita con rigor por H. Poincaré (1854–1925) en una serie de artículos bajo el título de *"Analysis situs"* en 1895. Poincaré introduce el concepto de *homología* y da una definición precisa de los *números de Betti* asociados a un espacio. En relación con la conexión, Poincaré define el concepto de *grupo fundamental* de una variedad y la noción de *homotopía*.

Un segundo camino en el que se desarrolla la topología es a través de la generalización de ideas de *convergencia*. Este proceso se inicia en realidad en 1817 cuando B. Bolzano (1781–1848) asocia la convergencia con un subconjunto acotado infinito de números reales, en vez de pensar exclusivamente en convergencia de sucesiones de números.

G. Cantor (1845–1918) introduce en 1872 el concepto de conjunto *derivado* –o familia de puntos límite– de un conjunto. Define los subconjuntos *cerrados* de la recta real como aquellos conteniendo a su conjunto derivado e introduce la idea de conjunto *abierto*, un concepto clave en la topología de conjuntos. Y se define también la noción de *entorno de un punto*.

En 1906, M. Fréchet (1878–1973) llama a un espacio *compacto* si cada subconjunto infinito acotado de él contiene un punto de acumulación. Fréchet es capaz de extender la noción de convergencia de un espacio euclídeo, definiendo los *espacios métricos*. Prueba que los conceptos de abierto y cerrado de Cantor se extienden naturalmente a espacios métricos.

En el Congreso Internacional de Matemáticos de Roma de 1909, F. Riesz (1880–1956) propone un nuevo acercamiento axiomático a la topología, basado en una definición conjuntista de puntos límite, sin un concepto de distancia subyacente. En 1914, F. Hausdorff

(1868–1942) define los entornos a través de cuatro axiomas, de nuevo sin consideraciones métricas. Este trabajo de Riesz y Hausdorff es el que da lugar a la definición de espacio topológico abstracto.

Hay una tercera vía en la que los conceptos topológicos entran en las matemáticas: a través del análisis funcional, un área que surge de la física matemática y la astronomía, debido a que los métodos del análisis clásico eran inadecuados para abordar algunos tipos de problemas.

J. Hadamard (1865–1963) introduce la palabra *funcional* en 1903, cuando estudia los funcionales lineales F de la forma $F(f) = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x)g_n(x)dx$. Fréchet continúa el desarrollo de esta teoría, definiendo la derivada de un funcional en 1904.

E. Schmidt (1876–1959) examina en 1907 la noción de convergencia en espacios de funciones; la distancia se define a través un producto interior. S. Banach (1892–1945) realiza un paso posterior en la abstracción en 1932, cuando pasa de los espacios con producto interior a los espacios normados.

Poincaré desarrolla muchos de sus métodos topológicos cuando estudia ecuaciones diferenciales ordinarias que provienen de ciertos problemas astronómicos. Esta colección de métodos se transforma en una completa teoría topológica en 1912, con los estudios de L.E.J. Brouwer (1881–1966).

En el artículo *¿Qué es la topología?* (revista Sigma 20, 63- 77, 2002), se amplía este apartado con algunos ejemplos sorprendentes de espacios topológicos. Se puede descargar en `http://www.ehu.es/~mtwmastm/sigma20.pdf`.

0.3. Organización de este documento

Este documento está organizado en ocho capítulos, el primero de repaso de nociones sobre teoría de conjuntos y los otros corresponden al temario del programa de la asignatura *Topología* del curso 2013/2014.

Cada uno de los temas consta de definiciones, propiedades con algunas de las demostraciones más complicadas y una extensa colección de ejemplos. Al final de cada capítulo aparece una relación de problemas, algunos de ellos elementales, otros ya más elaborados, otros son una mera excusa para introducir algún ejemplo de espacio importante. En todos ellos se deben aplicar las propiedades estudiadas en la parte teórica; algunos de ellos servirán como trabajo escrito a entregar y otros como ejercicios para desarrollar en los seminarios.

Leioa, septiembre 2013

Repaso de algunas nociones básicas

Estoy empeñado
en palabras plurales.
En cuanto llegue,
te prometo dos,
redondas como dos círculos.
Imposiblemente iguales.

“A palabrazos”
Mikel Varas

1.1. Nociones de Lógica

La Lógica es una herramienta básica en Matemáticas; damos aquí un breve repaso de algunos conceptos fundamentales.

1.1.1. Símbolos y conectores

En matemáticas, es fundamental la utilización de símbolos y conectores que sirven para modificar o combinar sentencias.

Definición 1.1. Los siguientes símbolos se llaman *cuantificadores*:

1) el *cuantificador universal*: $\forall$ (para todo);

2) el *cuantificador existencial*: $\exists$ (existe).

Definición 1.2. También es esencial el uso de los llamados *conectores*:

1) la *negación*: no;

2) la *conjunción*: $\wedge$ (y);

3) la *disyunción*: $\vee$ (o);

4) la *implicación*: $\Longrightarrow$ (si –, entonces);

5) la *doble implicación*: $\Longleftrightarrow$ (si y sólo si, es equivalente a).

El manejo es sencillo, pero es preciso tener cuidado al utilizarlos. Por ejemplo, si $\mathfrak{P}$ y $\mathfrak{Q}$ son propiedades relativas a los elementos de un conjunto X (definición 1.11), para expresar que x cumple $\mathfrak{P}$, se escribirá $\mathfrak{P}(x)$. Y entonces:

Proposición 1.1. *El enunciado $\mathfrak{P}(x) \vee \mathfrak{Q}(x)$, significa una de las tres posibilidades (mutuamente excluyentes) siguientes:*

(i) $\mathfrak{P}(x)$ y $\mathfrak{Q}(x)$; *(ii) $\mathfrak{P}(x)$ y no-$\mathfrak{Q}(x)$;* *(iii) no-$\mathfrak{P}(x)$ y $\mathfrak{Q}(x)$.*

Proposición 1.2. *Un enunciado se niega de la siguiente manera:*

1) no-$(\forall x \in X, \mathfrak{P}(x))$ es lo mismo que decir que $(\exists x \in X : \text{no-}\mathfrak{P}(x))$;

2) no-$(\exists x \in X : \mathfrak{P}(x))$ equivale a $(\forall x \in X, \text{no-}\mathfrak{P}(x))$;

3) no$(\forall x \in X, \mathfrak{P}(x) \wedge \mathfrak{Q}(x))$ es lo mismo que $(\exists x \in X : \text{no-}\mathfrak{P}(x) \;\; o \;\; \text{no-}\mathfrak{Q}(x))$;

4) no-$(\exists x \in X : \mathfrak{P}(x) \Longrightarrow \mathfrak{Q}(x))$ es equivalente a $(\forall x \in X, \mathfrak{P}(x) \not\Longrightarrow \mathfrak{Q}(x))$.

Proposición 1.3. *Cuando aparecen varios cuantificadores en un enunciado, es indiferente el orden en el que se escriben, siempre que los cuantificadores involucrados sean del mismo tipo. Si $\mathfrak{P}(x, y)$ es una propiedad relativa a los elementos x e y, entonces:*

1) $(\forall x, \forall y, \mathfrak{P}(x, y))$ es lo mismo que decir que ($\forall y$, $\forall x$, $\mathfrak{P}(x, y)$);

2) $(\exists x, \exists y : \mathfrak{P}(x, y))$ es equivalente a $(\exists y, \exists x : \mathfrak{P}(x, y))$.

Contraejemplo 1.1. Hay que tener cuidado cuando se ven involucrados cuantificadores de distinto tipo. Por ejemplo, el enunciado $(\forall x, \exists y : \mathfrak{P}(x, y))$ no equivale a la expresión $(\exists y : \forall x, \mathfrak{P}(x, y))$. En efecto, si $X = \mathbb{N}$ y $\mathfrak{P}(x, y)$ es la propiedad "$x \leq y$", la primera expresión se lee como que todo número natural posee otro mayor (que es cierta) y la segunda significa que existe un número natural mayor que todos los demás (que es falsa).

Proposición 1.4. *El cuantificador existencial y el conector disyunción se pueden intercambiar en la escritura de un enunciado, así como el cuantificador universal y el conector conjunción:*

1) $(\forall x, \mathfrak{P}(x))$ y $(\forall y, \mathfrak{Q}(y))$ es lo mismo que $(\forall x, y, \mathfrak{P}(x) \wedge \mathfrak{Q}(y))$;

2) $(\exists x : \mathfrak{P}(x))$ o $(\exists y : \mathfrak{Q}(y))$ es equivalente a $(\exists x, y : \mathfrak{P}(x) \vee \mathfrak{Q}(y))$.

Contraejemplo 1.2. En general, no se pueden intercambiar cuantificadores y conectores en la escritura de un enunciado:

1) la expresión $(\forall x, \mathfrak{P}(x) \vee \mathfrak{Q}(x))$ no equivale a $(\forall x, \mathfrak{P}(x)) \vee (\forall x : \mathfrak{Q}(x))$. En efecto, si $X = \mathbb{N}$, $\mathfrak{P}$ y $\mathfrak{Q}$ son las propiedades de "ser par" y "ser impar" respectivamente, entonces la primera expresión se lee como que un número natural es par o impar (que es verdadera) y la segunda dice que todo número natural es par o todo número natural es impar (que es falsa);

2) la expresión $(\exists x : \mathfrak{P}(x)) \wedge (\exists x : \mathfrak{Q}(x))$ no equivale a $(\exists x : \mathfrak{P}(x) \wedge \mathfrak{Q}(x))$. En efecto, tomando de nuevo el ejemplo de 1), la primera expresión se lee como que existe un número natural par y existe un número natural impar (que es cierta), y la segunda significa que existe un número natural a la vez par e impar (que es falsa).

1.1.2. Los objetos del razonamiento

Definir una teoría matemática es establecer las *reglas del juego* sobre los objetos manipulados, los denominados *axiomas*.

Definición 1.3. Un *axioma* es todo enunciado que:

1) sirve de fundamento para la construcción de una teoría;

2) se admite como cierto y no es por lo tanto objeto de discusión.

Cuando un único axioma no basta para definir una teoría, se pide además:

3) que los diferentes axiomas usados no se contradigan y sean independientes los unos de los otros.

Ejemplos 1.1. Algunos ejemplos de axiomas son los siguientes:

1) *axioma de Euclides*, que es la base de la Geometría Euclídea: dos rectas paralelas del plano euclídeo no se cortan;

2) *axioma de elección*: dado un conjunto X, existe una *función* (definición 1.18) *de elección*, $f : \mathcal{P}(X) - \{\emptyset\} \longrightarrow X$ (definición 1.14), que asigna a todo conjunto A no vacío, un punto distinguido $f(A) = a \in A$;

3) *lema de Zorn*: sea un conjunto parcialmente ordenado $(X, \leq)$ (definición 1.31), tal que todo conjunto bien ordenado (definición 1.33) admite una cota superior (definición 1.34); entonces $(X, \leq)$ posee un elemento maximal (definición 1.32);

4) *axioma de Zermelo*: todo conjunto puede ser bien ordenado.

Observación 1.1. 2), 3) y 4) son formulaciones equivalentes del mismo axioma.

Definición 1.4. Una *definición* es un enunciado que sirve para explicar o introducir una nueva noción.

Una vez conocidos los axiomas y algunas definiciones, *el juego* puede comenzar, puesto que las reglas ya se conocen.

Definición 1.5. Un *teorema* es un enunciado que se deduce:

1) directamente de los axiomas o

2) de los axiomas y los teoremas precedentes, y

con las reglas de deducción que se llaman *demostraciones*, que aseguran su validez.

Definición 1.6. A veces, se da únicamente el nombre de teorema a los verdaderamente importantes, a los que han pasado a la historia con un nombre, o a los que precisan una demostración muy larga, dejando el nombre de *proposición* al resto.

Definición 1.7. Un *lema* es una proposición preliminar a la demostración de un teorema.

Definición 1.8. Un *corolario* es una proposición que se deduce inmediatamente de un teorema, por una demostración si no inmediata, cuando menos corta y fácil.

1.1.3. Condiciones necesarias y suficientes

Definición 1.9. (La implicación) Sean X un conjunto y $\mathfrak{P}$ y $\mathfrak{Q}$ dos propiedades matemáticas definiendo los conjuntos $A = \{x \in X : \mathfrak{P}(x)\}$ y $B = \{x \in X : \mathfrak{Q}(x)\}$ respectivamente. Si $A \subset B$ (definición 1.12), todo elemento verificando $\mathfrak{P}$, cumple también $\mathfrak{Q}$. En este caso, se dice que $\mathfrak{P}$ *implica* $\mathfrak{Q}$, y se escribe $\mathfrak{P} \Longrightarrow \mathfrak{Q}$. Se dice también que $\mathfrak{P}$ es una *condición suficiente* de $\mathfrak{Q}$ (para obtener $\mathfrak{Q}$ basta con conocer $\mathfrak{P}$) o que $\mathfrak{Q}$ es una *condición necesaria* de $\mathfrak{P}$.

Definición 1.10. (La equivalencia) En las condiciones de la definición 1.9, si $A = B$ (definición 1.12), todo elemento verificando $\mathfrak{P}$ cumple también $\mathfrak{Q}$ y viceversa. En este caso, se dice que $\mathfrak{P}$ *es equivalente* a $\mathfrak{Q}$, y se escribe $\mathfrak{P} \Longleftrightarrow \mathfrak{Q}$. Como $A = B$ es idéntico a $A \subset B$ y $B \subset A$, la equivalencia $\mathfrak{P} \Longleftrightarrow \mathfrak{Q}$ significa las dos implicaciones $\mathfrak{P} \Longrightarrow \mathfrak{Q}$ y $\mathfrak{Q} \Longrightarrow \mathfrak{P}$. Es decir, las dos propiedades equivalentes $\mathfrak{P}$ y $\mathfrak{Q}$ caracterizan el mismo conjunto. Observar que en tal caso $\mathfrak{P}$ es una *condición necesaria y suficiente* de $\mathfrak{Q}$.

1.1.4. Los métodos de demostración

Hay muchos métodos de demostración, de los cuales citamos los más importantes a continuación, usando la notación de la definición 1.9:

(i) Método de la hipótesis auxiliar: *para probar que $\mathfrak{P} \Longrightarrow \mathfrak{Q}$, se supone $\mathfrak{P}$ cierta.*

Esta forma de razonamiento, la más directa, es también la más conocida. De manera práctica consiste en demostrar el teorema $\mathfrak{P} \Longrightarrow \mathfrak{Q}$, donde $\mathfrak{P}$ es la *hipótesis* y $\mathfrak{Q}$ la *conclusión o tesis*, suponiendo que se verifica $\mathfrak{P}$ (la hipótesis es cierta) y ayudándose de los axiomas y de los otros teoremas de la teoría demostrados anteriormente.

(ii) Disjunción de los casos: *para probar que $\mathfrak{P} \Longrightarrow \mathfrak{Q}$, se descompone $\mathfrak{P}$ en la forma $\mathfrak{P}_1 \vee \cdots \vee \mathfrak{P}_n$, y se prueba que para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, es $\mathfrak{P}_i \Longrightarrow \mathcal{Q}$.*

Es decir, se descompone el conjunto A de los elementos que cumplen $\mathfrak{P}$ en una unión disjunta (definición 1.13) de subconjuntos $A_1, \cdots, A_n$. Entonces, se prueba que para cada $1 \le i \le n$ es $A_i \subset B$; y como $A = A_1 \cup \cdots \cup A_n$, se tendrá $A \subset B$.

Ejemplo 1.1. *Probar que si $n \in \mathbb{N}$, entonces $n(n+1)$ es par.*
Demostración: Distinguimos dos posibilidades: si n es par, existe $k \in \mathbb{N}$, tal que $n = 2k$, y entonces $n(n+1) = 2k(2k+1)$. Si n es impar, existe $k \in \mathbb{N}$, tal que $n = 2k+1$, y entonces $n(n+1) = (2k+1)(2k+2) = 2(2k+1)(k+1)$, que es claramente par. ∎

(iii) Método de contraposición: *para probar que $\mathfrak{P} \Longrightarrow \mathfrak{Q}$, se demuestra el contrarecíproco no-$\mathfrak{Q} \Longrightarrow$ no-$\mathfrak{P}$.*

Es un primer método de prueba indirecta. Descansa sobre el hecho de que la inclusión $A \subset B$ es equivalente a decir que los conjuntos complementarios (definición 1.13) verifican la inclusión $B^c \subset A^c$.

Ejemplo 1.2. *Probar que si $n \in \mathbb{N}$ es tal que n^2 es par, entonces n es par.*
Demostración: Si $n \in \mathbb{N}$ es impar, entonces n^2 es impar. ∎

(iv) Demostración por reducción al absurdo: *para probar un enunciado $\mathfrak{P}$, se supone su negación no-$\mathfrak{P}$, y se busca una contradicción en la teoría en la que se trabaja.*

Como evidentemente se admite que esta teoría no admite contradicciones, la suposición no-$\mathfrak{P}$ será falsa, lo cual es equivalente a decir que $\mathfrak{P}$ es cierta. ¿A qué contradicción se debe llegar? A contradecir un axioma, un teorema anteriormente probado o la propia suposición no-$\mathfrak{P}$.

De modo similar, para probar que $\mathfrak{P} \Longrightarrow \mathfrak{Q}$ razonando por reducción al absurdo, se admite lo contrario, es decir, que no-($\mathfrak{P} \Longrightarrow \mathfrak{Q}$), o lo que es equivalente, $\mathfrak{P}$ y no-$\mathfrak{Q}$. Y se busca entonces encontrar una contradicción.

(v) El contraejemplo: para probar que un propiedad matemática $\mathfrak{P}$ es cierta para un conjunto X, hay que probar que todos los elementos de X la verifican. Pero, se sabe que la negación de $(\forall x \in X, \mathfrak{P}(x))$ es $(\exists x \in X, \text{no-}\mathfrak{P}(x))$. Así, para probar que esta fórmula es falsa, basta con encontrar un elemento de X que no verifique $\mathfrak{P}$: esto es lo que se llama *dar un contraejemplo*.

Ejemplo 1.3. *Si $x \in \mathbb{R}$, ¿es cierto que si $x \leq x^2$, entonces es $x \geq 1$?*
Demostración: La respuesta es falsa, tomando $x = -2$. ∎

(vi) La demostración por recurrencia: este tipo de demostración está ligada a la definición del conjunto de los enteros naturales. Es una técnica útil para probar que una propiedad $\mathfrak{P}(n)$ es cierta para todos los enteros naturales n, o para los que son iguales o superiores a un cierto n_0. Sean n_0 un entero natural y $\mathfrak{P}(n)$ una propiedad matemática que depende de un entero n. Para probar que $\mathfrak{P}(n)$ se verifica para cada $n \geq n_0$, basta con probar que:

1) $\mathfrak{P}(n_0)$ es cierta,

2) demostrar, bajo la hipótesis de que $\mathfrak{P}(n)$ se verifica para $n \in \{n_0, n_0 + 1, \ldots, k\}$, que $\mathfrak{P}(k+1)$ es cierta.

La etapa 1) es una simple verificación y la 2) es, de hecho, el objeto de una demostración.

Ejemplo 1.4. *Probar que para cada $n \in \mathbb{N}$, $1 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.*
Demostración: Para $n = 1$, es cierto que $1 = \frac{1(1+1)}{2}$. Si la propiedad se verifica para $n \in \{1, \ldots, k\}$, entonces: $1+2+\cdots+k+(k+1)$=$(1+2+\cdots+k)$+$(k+1)$=$\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)$=$\frac{(k+2)(k+1)}{2}$. ∎

Observación 1.2. Hay una forma débil de la demostración por recurrencia: para probar que $\mathfrak{P}(n)$ se verifica para cada $n \geq n_0$, basta con probar que:

1) $\mathfrak{P}(n_0)$ es cierta,

2) demostrar, bajo la hipótesis de que $\mathfrak{P}(k)$ se verifica para $k > n_0$, que $\mathfrak{P}(k+1)$ es cierta.

En este caso, para probar que $\mathfrak{P}(k+1)$ se verifica, nos apoyamos sólo sobre la hipótesis de que $\mathfrak{P}(k)$ es cierta.

1.2. Teoría de conjuntos

Definición 1.11. Un *conjunto* es una colección de objetos, llamados *elementos* o *puntos*. Si x es un elemento de X, se denota por $x \in X$. Análogamente, $x \notin X$ denota la "no pertenencia" de x a X. El *conjunto vacío* $\emptyset$ es el conjunto sin elementos.

Son conjuntos importantes en matemáticas $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\cdots$.

Se puede definir un conjunto:

1) por *extensión*, nombrando todos sus elementos: por ejemplo, el conjunto de los números naturales pares es $\{2, 4, 6, 8, \cdots\}$;

2) a través de una *propiedad* $\mathfrak{P}$ válida en un universo $\mathfrak{U}$, que servirá para caracterizarlo $\{x \in \mathfrak{U} : \mathfrak{P}(x)\}$. Por ejemplo, el conjunto de los números naturales pares se puede expresar por $\{x \in \mathbb{N} : x$ es múltiplo de $2\}$.

Definición 1.12. Dados $A, B \subset X$, se dice que A *está contenido* en B, $A \subset B$, si para cada $x \in A$, es $x \in B$. Y A es *igual* a B, $A = B$, si $A \subset B$ y $B \subset A$.

Definición 1.13. Si $A, B \subset X$, se definen:

1) la *intersección* de A y B, por $A \cap B = \{x \in X : x \in A \wedge x \in B\}$. Claramente, $A \cap B \subset A, B$. A y B se dicen *disjuntos* si $A \cap B = \emptyset$;

2) la *unión* de A y B, por $A \cup B = \{x \in X : x \in A \vee x \in B\}$. Es decir $x \in A \cup B$, si se verifica una (y sólo una) de las condiciones siguientes:

   (i) $x \in A$ y $x \in B$, (ii) $x \in A$ y $x \notin B$, (iii) $x \notin A$ y $x \in B$.

   Claramente, $A, B \subset A \cup B$;

3) el *complementario* de A en X, por $X - A = \{x \in X : x \notin A\}$. Si no hay duda de respecto a que conjunto se está tomando el complementario, se denota A^c;

4) la *diferencia* de A y B, por $A - B = A \cap B^c = \{x \in X : x \in A \wedge x \notin B\}$.

Proposición 1.5. *Las anteriores operaciones verifican las siguientes propiedades:*

1) leyes idempotentes: $A \cap A = A = A \cup A$*;*

2) leyes asociativas: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ *y* $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$*;*

3) leyes conmutativas: $A \cup B = B \cup A$ *y* $A \cap B = B \cap A$*;*

4) leyes distributivas: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ *y* $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$*;*

5) identidades: $A \cap X = A = A \cup \emptyset$, $A \cup X = X$ *y* $A \cap \emptyset = \emptyset$*;*

6) propiedades del complementario: $A \cup A^c = X$, $A \cap A^c = \emptyset$, $(A^c)^c = A$ *y* $X^c = \emptyset$*;*

7) leyes de De Morgan: $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ *y* $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

Definición 1.14. Se llama *partes de* X o *conjunto potencia de* X al conjunto de todos los subconjuntos de X, y se denota por $\mathcal{P}(X)$ o 2^X. Es decir, $A \subset X$ si y sólo si $A \in \mathcal{P}(X)$.

Definición 1.15. $A \times B = \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}$ es el *producto cartesiano* de A por B. Sus elementos son *pares ordenados*.

Claramente, $A \times B \neq B \times A$. Y $A \times B = \emptyset$, si y sólo si $A = \emptyset$ ó $B = \emptyset$. Dos pares ordenados $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in A \times B$, son iguales $(a_1, b_1) = (a_2, b_2)$ si y sólo si $a_1 = a_2$ y $b_1 = b_2$. Luego, $(a_1, b_1) \neq (a_2, b_2)$ si y sólo si $a_1 \neq a_2$ o $b_1 \neq b_2$.

En general, dada una familia finita de conjuntos $\{A_1, \cdots, A_n\}$, se define su producto cartesiano por $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} A_i = A_1 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, \cdots, a_n) : a_i \in A_i, i \in \{1, \cdots, n\}\}$. Si $A_i = A$ para cada $i \in \{1, \cdots, n\}$, el producto cartesiano se denota por A^n.

Proposición 1.6. *El producto cartesiano verifica las siguientes propiedades:*

1) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$*;* *2)* $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$*;*

3) si $C \neq \emptyset$ *y* $A \times C = B \times C$*, entonces* $A = B$*;*

4) $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$*;* *5)* $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$*;*

6) $(A \times B)^c = (A^c \times B^c) \cup (A^c \times B) \cup (A \times B^c)$*;*

7) si $B \subset C$*, entonces* $A \times B \subset A \times C$*;* *8)* $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \times D) \cap (C \times B)$*;*

9) si A, B, C *y* D *son conjuntos no vacíos, entonces* $A \times B \subset C \times D$ *si y sólo si* $A \subset C$ *y* $B \subset D$.

Definición 1.16. Sea $I \neq \emptyset$ un *conjunto de índices*. Se considera una familia de conjuntos $\{A_i : i \in I\}$, y se dice que esta familia está *indicada* por I. Los conjuntos A_i no tienen porque ser diferentes.

Definición 1.17. Dada una familia indicada $\{A_i : i \in I\}$, con $A_i \subset X$, se define:

1) la *intersección generalizada* $\displaystyle\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \in X : \forall i \in I, x \in A_i\}$, y

2) la *unión generalizada* $\displaystyle\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in X : \exists i \in I$ tal que $x \in A_i\}$.

Si el conjunto de índices I es finito, estas definiciones coinciden con las dadas en la definición 1.13. Se cumplen también en este caso las propiedades distributivas, las leyes de De Morgan $\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcup_{i\in I} A_i^c$ y $\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcap_{i\in I} A_i^c$, etc.

1.3. Funciones y sus propiedades

Definición 1.18. Dados dos conjuntos X e Y, una *aplicación* o *función* $f\colon X \longrightarrow Y$, es una correspondencia que asocia a cada $x \in X$, un elemento y sólo uno de Y, que se denota por $f(x)$.

Ejemplos 1.2. Algunos ejemplos de aplicaciones son:

1) la *aplicación identidad*, $1_X\colon X \longrightarrow X$, definida por $1_X(x) = x$;

2) la *aplicación inclusión*: si $A \subset X$, $i_A\colon A \longrightarrow X$, se define por $i_A(x) = x$;

3) la *aplicación constante*, $c_{y_0}\colon X \longrightarrow Y$, definida por $c_{y_0}(x) = y_0$, donde y_0 es un punto fijo de Y;

4) la *i-ésima proyección coordenada*, $p_i\colon A_1 \times \cdots \times A_n \longrightarrow A_i$, definida por la igualdad $p_i((a_1, \cdots, a_n)) = a_i$;

5) la *inyección diagonal*, $d\colon X \longrightarrow X^n$, definida por $d(x) = (x, \cdots, x)$;

6) la *función característica de un conjunto*: si $A \subset X$, $\chi_A\colon X \longrightarrow \{0,1\}$, definida por

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \notin A \\ 1 & \text{si} \quad x \in A \end{cases}$$

7) dada $f\colon X \longrightarrow Y$ y $A \subset X$, la *restricción* de f a A, $f|_A\colon A \longrightarrow Y$, está definida por $f|_A(a) = f(a)$;

8) si $g\colon A \longrightarrow Y$ y $A \subset X$, entonces $f\colon X \longrightarrow Y$ es una *extensión* de g a X, si $f|_A = g$; una aplicación puede tener varias extensiones;

9) si $f\colon A \longrightarrow Y$ y $g\colon B \longrightarrow Y$ son dos aplicaciones, donde $A \cup B = X$ y $f(x) = g(x)$, para cada $x \in A \cap B$, se puede definir la *combinada* de f y g, como la aplicación $h\colon X \longrightarrow Y$ definida por

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x \in A \\ g(x) & \text{si} \quad x \in B \end{cases}$$

Definición 1.19. Dada una aplicación $f\colon X \longrightarrow Y$, X se llama el *dominio* de f e Y es su *codominio*. El *grafo* de f es el conjunto $G_f = \{(x, f(x)) : x \in X\} \subset X \times Y$, que en muchas ocasiones se identifica con f.

Definición 1.20. Dos aplicaciones $f\colon X \longrightarrow Y$ y $g\colon Z \longrightarrow W$ son *iguales*, cuando coinciden sus dominios ($X = Z$), sus codominios ($Y = W$) y $f(x) = g(x)$, para cada $x \in X$. Por ejemplo, si $f\colon X \longrightarrow Y$ es una aplicación y $A \subset X$, f y $f|_A$ no son iguales.

Definición 1.21. Dada $f\colon X \longrightarrow Y$, $f(A) = \{y \in Y : \exists a \in A$ tal que $f(a) = y\}$ es la *imagen directa* de A. $f(X)$ se llama *rango* de la aplicación.

Definición 1.22. Si $B \subset Y$, $f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}$ es su *imagen recíproca*.

Proposición 1.7. *Dada $f\colon X \longrightarrow Y$, se verifica:*

1) $f(\emptyset) = \emptyset$, $f(X) \subset Y$ y si $A \neq \emptyset$, entonces $f(A) \neq \emptyset$;

2) si $A_1, A_2 \subset X$, y $A_1 \subset A_2$, entonces $f(A_1) \subset f(A_2)$;

3) Si $A_i \subset X$ para $i \in I$, $f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} f(A_i)$ y $f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \subset \bigcap_{i\in I} f(A_i)$;

4) si $A_1, A_2 \subset X$, $f(A_1) - f(A_2) \subset f(A_1 - A_2)$ y en particular $f(X) - f(A_2) \subset f(X - A_2)$. Entre $Y - f(A_2)$ y $f(X - A_2)$ no hay en general ninguna relación;

5) $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$, y puede existir $\emptyset \neq B \subset Y$, tal que $f^{-1}(B) = \emptyset$;

6) $f^{-1}(Y) = X$; *7) si $B_1, B_2 \subset Y$ y $B_1 \subset B_2$, entonces $f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$;*

8) si $B_i \subset Y$ para $i \in I$, $f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i)$ y $f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} B_i\right) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i)$;

9) Si $B_1, B_2 \subset Y$, $f^{-1}(B_1 - B_2) = f^{-1}(B_1) - f^{-1}(B_2)$, y en particular, $f^{-1}(Y - B_2) = X - f^{-1}(B_2)$;

10) si $A \subset X$, $A \subset f^{-1}(f(A))$; *11) si $B \subset Y$, $f(f^{-1}(B)) = f(X) \cap B \subset B$;*

12) si $A \subset X$ y $B \subset Y$, $f(A \cap f^{-1}(B)) = f(A) \cap B$.

Definición 1.23. Dadas $f\colon X \longrightarrow Y$ y $g\colon Y \longrightarrow Z$, se define la *composición* de g y f, por $g \circ f\colon X \longrightarrow Z$, donde $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, para cada $x \in X$.

Proposición 1.8. *Sean $f\colon X \longrightarrow Y$, $g\colon Y \longrightarrow Z$ y $h\colon Z \longrightarrow W$ aplicaciones, entonces:*

1) la composición de funciones es asociativa: $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$;

2) $f \circ 1_X = f$ *y* $1_Y \circ g = g$*;* *3) si* $C \subset Z$*, es* $(g \circ f)^{-1}(C) = f^{-1}(g^{-1}(C))$*;*

4) si $f\colon X \longrightarrow Y$ *y* $g\colon Y \longrightarrow X$*, en general,* $f \circ g \neq g \circ f$.

Definición 1.24. Se dice que $f\colon X \longrightarrow Y$ es *sobreyectiva*, si $f(X) = Y$, es decir, para cada $y \in Y$, existe $x \in X$, tal que $f(x) = y$. Y es *inyectiva*, si dados $x_1 \neq x_2$ en X, es $f(x_1) \neq f(x_2)$ (o equivalentemente, si $f(x_1) = f(x_2)$, entonces $x_1 = x_2$).

Proposición 1.9. *Sea* $f\colon X \longrightarrow Y$*, entonces:*

1) $B = f(f^{-1}(B))$ *para cada* $B \subset Y$*, si y sólo si* f *es sobreyectiva;*

2) $Y - f(A) \subset f(X - A)$ *para cada* $A \subset X$ *si y sólo si* f *es sobreyectiva;*

3) si $g, h\colon Y \longrightarrow Z$ *y* f *es sobreyectiva, entonces* $g \circ f = h \circ f$ *implica que* $h = g$*;*

4) si $g\colon Y \longrightarrow X$ *y* $f \circ g = 1_Y$*, entonces* f *es sobreyectiva;*

5) $A = f^{-1}(f(A))$ *para cada* $A \subset X$*, si y sólo si* f *es inyectiva;*

6) $f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I} f(A_i)$ *para cada familia indicada de conjuntos* $\{A_i \subset X\}_{i\in I}$ *si y sólo si* f *es inyectiva;*

7) si f *es sobreyectiva, entonces para cada* $A \subset X$ *es* $Y - f(A) = f(X - A)$ *si y sólo si* f *es inyectiva;*

8) si $g, h\colon Z \longrightarrow X$ *y* f *es inyectiva, entonces* $f \circ g = f \circ h$ *implica que* $h = g$*;*

9) si $g\colon Y \longrightarrow X$ *y* $g \circ f = 1_X$*, entonces* f *es inyectiva.*

Definición 1.25. $f\colon X \longrightarrow Y$ es *biyectiva* si es sobreyectiva e inyectiva a la vez. En tal caso, la correspondencia definida por $f^{-1}\colon Y \longrightarrow X$, donde $f^{-1}(y) = x$ si y sólo si $f(x) = y$, es una función.

Proposición 1.10. *Sea* $f\colon X \longrightarrow Y$*, entonces:*

1) si f *es biyectiva, entonces* f^{-1} *también lo es;*

2) si f *es biyectiva, entonces* $f^{-1} \circ f = 1_X$*,* $f \circ f^{-1} = 1_Y$ *y* $(f^{-1})^{-1} = f$*;*

3) si $g\colon Y \longrightarrow X$ *y* $g \circ f = 1_X$ *y* $f \circ g = 1_Y$*, entonces* f *es biyectiva y* $g = f^{-1}$*;*

4) si $f\colon X \longrightarrow Y$ *y* $g\colon Y \longrightarrow Z$ *son biyectivas, entonces* $g \circ f$ *lo es y además* $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

1.4. Relaciones binarias

Definición 1.26. Dado un conjunto X, una *relación binaria* es $\mathfrak{R} \subset X \times X$. $\mathfrak{R}$ se llama:

1) *reflexiva*, si para cada $x \in X$, es $(x, x) \in \mathfrak{R}$;

2) *simétrica*, si dado $(x, y) \in \mathfrak{R}$, entonces $(y, x) \in \mathfrak{R}$;

3) *antisimétrica*, si $(x, y) \in \mathfrak{R}$ e $(y, x) \in \mathfrak{R}$ implica que $x = y$;

4) *transitiva*, si dados $(x, y), (y, z) \in \mathfrak{R}$, entonces $(x, z) \in \mathfrak{R}$.

Definición 1.27. Una relación de *equivalencia* es una relación binaria reflexiva, simétrica y transitiva. Se suele denotar por $x\mathfrak{R}y$ en vez de $(x, y) \in \mathfrak{R}$.

Definición 1.28. Dada $\mathfrak{R}$ una relación de equivalencia, se llama *clase de x* al conjunto $[x] = \{y \in X : x\mathfrak{R}y\}$. El *conjunto cociente* $X/\mathfrak{R}$, es el conjunto de todas las clases de equivalencia.

Proposición 1.11. *Algunas propiedades son:*

1) $x \in [x]$ (x se llama representante de su clase), luego $[x] \neq \emptyset$;

2) $x\mathfrak{R}y$ si y sólo si $[x] = [y]$; *3) $[x] \neq [y]$ si y sólo si $[x] \cap [y] = \emptyset$.*

Definición 1.29. Una *partición* de X es una familia $\mathcal{P} = \{P_i : i \in I\}$ de subconjuntos no vacíos de X, tales que:

(i) $X = \bigcup\limits_{i \in I} P_i$, y (ii) si $P_i \neq P_j$, entonces $P_i \cap P_j = \emptyset$.

Lema 1.12. *Es equivalente dar una partición de X que una relación de equivalencia sobre él.*

Definición 1.30. Existe una aplicación canónica, $p \colon X \longrightarrow X/\mathfrak{R}$, que asigna a cada elemento x su clase de equivalencia $p(x) = [x]$. Se llama *aplicación cociente* y es sobreyectiva. Una vez dada la aplicación cociente, cada clase de equivalencia en X es precisamente $p^{-1}(p(x))$.

Definición 1.31. Una relación $\leq$ sobre X es un *orden parcial* si es una relación reflexiva, antisimétrica y transitiva. Se dice también que X está *parcialmente ordenado*. El orden se llama *total*, si dos elementos cualesquiera de X son comparables por esta relación.

Definición 1.32. Si X está parcialmente ordenado por $\leq$, entonces:

(i) $a \in X$ se llama *elemento máximo* de X, si para cada $x \in X$, es $x \leq a$;

(ii) $a \in X$ es un *elemento maximal* de X, si $a \not\leq x$ para cada $x \neq a$;

(iii) $a \in X$ se llama *elemento mínimo* de X, si para cada $x \in X$, es $x \geq a$;

(iv) $a \in X$ es un *elemento minimal* de X, si $x \not\leq a$ para cada $x \neq a$.

Ejemplo 1.5. Si $X = \{a, b, c\}$ con el orden parcial $a \leq b$ y $a \leq c$, entonces b es un elemento maximal de X, pero no un máximo.

Definición 1.33. Un conjunto parcialmente ordenado en el cual todo $A \subset X$ no vacío posee un elemento mínimo, se llama conjunto *bien ordenado*. Por ejemplo, $(\mathbb{Z}, \leq)$ no está bien ordenado.

1.5. Propiedades de los números reales

$(\mathbb{R}, \leq)$ es un conjunto totalmente ordenado, donde $\leq$ denota el orden usual en $\mathbb{R}$.

Definición 1.34. Si $A \subset \mathbb{R}$, se tiene:

1) si $u \in \mathbb{R}$ es tal que $a \leq u$ para cada $a \in A$, se dice que u es una *cota superior* de A;

2) la menor de las cotas superiores de A (es decir, u es cota superior de A y para cada z cota superior de A es $z \geq u$) es el *supremo* de A, y se denota $\sup(A)$;

3) si $l \in \mathbb{R}$ es tal que $a \geq l$ para cada $a \in A$, se dice que l es una *cota inferior* de A;

4) la mayor de las cotas inferiores de A (es decir, l es cota inferior de A y para cada z cota inferior de A es $z \leq l$) es el *ínfimo* de A, y se denota $\text{ínf}(A)$.

Teorema 1.13. ***(Axioma de la cota superior)*** *Si $A \subset \mathbb{R}$ está acotado superiormente (es decir, existe $M \in \mathbb{R}$, tal que $M \geq a$, para cada $a \in A$), existe el supremo de A. Y en tal caso, $s = \sup(A)$ si y sólo si:*

(i) para cada $a \in A$, es $a \leq s$, y

(ii) para todo $\varepsilon > 0$, existe $a_\varepsilon \in A$ tal que $a_\varepsilon > s - \varepsilon$.

Del axioma anterior, se deduce que:

Corolario 1.14. *Si $A \subset \mathbb{R}$ está acotado inferiormente (es decir, existe $m \in \mathbb{R}$, tal que $m \leq a$, para cada $a \in A$), existe el ínfimo de A. Y entonces, $i = \text{ínf}(A)$ si y sólo si:*

(i) para cada $a \in A$, es $a \geq i$, y

(ii) para todo $\varepsilon > 0$, existe $a_\varepsilon \in A$ tal que $a_\varepsilon < i + \varepsilon$.

Teorema 1.15. *$\mathbb{R}$ es arquimediano, es decir, el conjunto $\mathbb{N}$ no está acotado superiormente.*

Demostración: Si lo estuviera, existiría $r_0 \in \mathbb{R}$, tal que $n \leq r_0$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Pero $n_0 = [r_0] + 1 \in \mathbb{N}$, y $n_0 \not\leq r_0$. ∎

Del teorema 1.15 se deducen inmediatamente:

Corolario 1.16. ***(Propiedad arquimediana)*** *Para todo $x > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$, tal que $0 < \frac{1}{n} < x$.*

Corolario 1.17. ***(Densidad de los racionales)*** *Dados dos números reales $x < y$, existe $r \in \mathbb{Q}$, tal que $x < r < y$.*

Demostración: Por la propiedad arquimediana (corolario 1.16), existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n_0} < y - x$. El conjunto $\mathbb{M} = \{m \in \mathbb{N} : x < \frac{m}{n_0}\}$ es no vacío y está bien ordenado, es decir, existe $m_0 \in \mathbb{M}$ tal que $x < \frac{m_0}{n_0}$ y $x \geq \frac{m_0 - 1}{n_0}$. Es inmediato probar que además $\frac{m_0}{n_0} < y$. ∎

Corolario 1.18. ***(Propiedad de los intervalos de encaje)*** *Dada $\{[a_n, b_n] : n \in \mathbb{N}\}$, una familia de intervalos cerrados y encajados (es decir, si $n \leq m$, es $[a_m, b_m] \subset [a_n, b_n]$), entonces $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] \neq \emptyset$.*

Demostración: Para cada $m, n \in \mathbb{N}$, es $a_n < b_m$, luego para todo $m \in \mathbb{N}$, b_m es cota superior del conjunto $A = \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Si $p = \sup(A)$, es claro que $p \in \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n]$. ∎

1.6. Cardinalidad de conjuntos

Definición 1.35. Dos conjuntos se llaman *equipotentes*, si existe una correspondencia biyectiva entre ellos.

Definición 1.36. X se dice *finito* si existe $n \in \mathbb{N}$, tal que X es equipotente a $\{1, \cdots, n\}$. X es *infinito*, si no es finito, lo cual equivale a decir que es equipotente a un subconjunto propio de sí mismo. X es *numerable* si es equipotente a $\mathbb{N}$ y es *contable* si es finito o numerable.

Observación 1.3. Dos conjuntos finitos son equipotentes si y sólo si poseen el mismo número de elementos. No sucede lo mismo si X es infinito: $\mathbb{N}$ es equipotente al conjunto $\mathbb{P}$ de los números pares, y sin embargo $\mathbb{P} \subset \mathbb{N}$.

Lema 1.19. *La relación de equipotencia es una relación de equivalencia.*

Definición 1.37. A cada clase de equipotencia se le puede asignar un *número cardinal*, que es un objeto matemático ω tal que existe un conjunto X con $Card(X) = \omega$.

Definición 1.38. Un conjunto A es *de potencia menor o igual* que B, si existe una aplicación $f\colon A \longrightarrow B$ inyectiva, con lo cual $Card(A) \leq Card(B)$ (equivalentemente, si existe una aplicación $f\colon B \longrightarrow A$ sobreyectiva).

Definición 1.39. Dados dos números cardinales ω_1 y ω_2, se dice que $\omega_1 \leq \omega_2$, si existen conjuntos X e Y con $Card(X) = \omega_1$ y $Card(Y) = \omega_2$ y tales que la potencia de X es menor o igual a la potencia de Y. Se trata de una relación de orden. Si $\omega_1 \leq \omega_2$ y $\omega_1 \neq \omega_2$, se dice que ω_1 es estrictamente menor que ω_2.

Proposición 1.20. *Se verifican las siguientes propiedades:*

1) si X es contable y $A \subset X$, entonces A es contable;

2) si X no es contable y $X \subset Y$, entonces Y no es contable;

3) si X es infinito, existe $A \subset X$, numerable y propio.

Teorema 1.21. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *es numerable.*

Demostración: Se define la siguiente relación binaria: dados $(m_1, n_1), (m_2, n_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $(m_1, n_1) \prec (m_2, n_2)$ si:

1) $m_1 + n_1 < m_2 + n_2$, o 2) $m_1 + n_1 = m_2 + n_2$ y $m_1 < m_2$.

$\preceq$ es un orden total, gracias al cual se pueden escribir los elementos de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ en una lista. La aplicación $f\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ dada por $f(m, n) = \frac{1}{2}(m+n-1)(m+n-2)+m$, asigna a cada elemento $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ el lugar que ocupa en esta lista, y es por lo tanto una biyección. ∎

Corolario 1.22. *Del teorema 1.21 se deduce:*

1) el producto cartesiano de una familia finita de conjuntos contables, es contable;

2) la unión de una familia contable de conjuntos contables es contable;

3) $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$ son numerables.

Demostración: Para probar 3), basta con usar 2). $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup -\mathbb{N}$. Además, $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ se puede escribir como la unión numerable $\mathbb{Q} = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n$, donde $A_n = \{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}\}$, que es equipotente a $\mathbb{Z}$. ∎

Contraejemplo 1.3. $\mathbb{R}$ no es numerable.

Demostración: Basta con demostrar que $[0,1]$ no es numerable. Si lo fuera, se escribiría $[0,1] = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Se construye una sucesión de intervalos encajados del modo siguiente: x_1 no puede pertenecer a los tres intervalos $\left[0, \frac{1}{3}\right]$, $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$ y $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$. Sea $I_1 = [a_1, b_1]$ uno de estos tres intervalos, tal que $x_1 \not\in I_1$. Se divide I_1 en tres intervalos de amplitud $\frac{1}{9}$: $\left[a_1, a_1 + \frac{1}{3}\right]$, $\left[a_1 + \frac{1}{3}, a_1 + \frac{2}{3}\right]$ y $\left[a_1 + \frac{1}{3}, b_1\right]$. De nuevo, existe uno de ellos $I_2 \subset I_1$, tal que $x_2 \not\in I_2$. Se continúa de manera inductiva, obteniendo una sucesión de intervalos encajados $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, cada I_n de longitud $\frac{1}{3^n}$ y tal que $x_n \not\in I_n$. Por la propiedad de los intervalos de encaje (corolario 1.18), existe $p \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n \subset [0,1]$, lo que es imposible. ∎

El $Card(\emptyset) = 0$, es el cardinal mínimo. Sin embargo no existe un cardinal máximo:

Teorema 1.23. ***(de Cantor)*** *Para cada conjunto X, $Card(X) < Card(\mathcal{P}(X))$.*

Demostración: Si $X = \emptyset$, $Card(\mathcal{P}(X)) = 1$, pues $\mathcal{P}(X) = \{\emptyset\}$. Si $X \neq \emptyset$, es obvio que $Card(X) \leq Card(\mathcal{P}(X))$, porque la aplicación $h\colon X \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ definida por $h(x) = \{x\}$ es inyectiva. Supongamos que $Card(X) = Card(\mathcal{P}(X))$, es decir, existe una aplicación $f\colon X \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ biyectiva. Sea $A = \{x \in X : x \not\in f(x)\} \in \mathcal{P}(X)$. Como f es sobreyectiva, existe $x_0 \in X$ tal que $f(x_0) = A$. Si $x_0 \in A$, esto significaría que $x_0 \not\in f(x_0) = A$, lo cual es imposible. Luego, es $x_0 \not\in A$, lo cual significa que $x_0 \in f(x_0) = A$, imposible de nuevo. ∎

En particular, $Card(\mathbb{N}) = \aleph_0 < Card(\mathcal{P}(\mathbb{N})) = 2^{\aleph_0}$ (notación que proviene de la propiedad descrita en el ejercicio 9 del apartado 1.7). Puede probarse que $2^{\aleph_0} = Card(\mathbb{R}) = c$, que se llama el *cardinal del continuo*. De aquí se concluye que $\aleph_0 < c$.

Desde principios de siglo, se ha intentado en vano establecer si existe un número cardinal $\aleph_1$, entre $\aleph_0$ y c. Georg Cantor (1845-1918) hace la siguiente conjetura:

Teorema 1.24. ***(Hipótesis del continuo)*** *$c = \aleph_1$, es decir, no existe ningún conjunto A, tal que $\aleph_0 < Card(A) < c$.*

Paul Joseph Cohen (1934-2007) establece en 1963 que la hipótesis del continuo es indecidible: añadiendo como axioma su veracidad o su falsedad, los fundamentos de la Matemática siguen siendo coherentes.

1.7. Ejercicios

1.- Con ayuda del lenguaje simbólico, decidir si son correctas las siguientes deducciones:

a) Los gusanos reptan. Todo lo que repta se mancha. Luego, los gusanos están sucios.

b) Si aumenta la temperatura o cae un meteorito, los osos polares morirán de hambre. Se sabe que los osos polares van a sobrevivir, por lo tanto, caerá pronto un meteorito.

c) Ninguna pelota de tenis es de cristal. Ningún objeto de cristal es indestructible. Luego, ninguna pelota de tenis es indestructible.

d) Si se abandona la utilización de gasolina o se incrementa el uso de energía solar, la contaminación disminuirá. Si se abandona el uso de gasolina, el país entrará en crisis. La utilización de la energía solar no aumentará, a no ser que no haya crisis. Por lo tanto, la contaminación no va a disminuir.

e) Los profesores son sádicos. Algunos sádicos usan látigo. Por lo tanto, algunos profesores usan látigo.

f) Los caramelos son dulces. Ningún alimento dulce contiene sal. Luego, los caramelos no contienen sal.

g) Los pájaros silban. Algunos habitantes de Euskadi son pájaros. Luego, algunas criaturas de Euskadi silban.

h) Si no trabajo duro, me dormiré. Si estoy preocupado, no dormiré. Por lo tanto, si estoy preocupado, trabajaré duro.

i) Las nubes son esponjosas. Algunos objetos esponjosos son rosas. Luego, algunas nubes son rosas.

j) Los osos polares tocan el violín. Los violinistas no vuelan. Por lo tanto, los osos polares no vuelan.

k) Las tortugas ven CSI-Las Vegas. Algunas criaturas de Gálapagos son tortugas. Por lo tanto, algunos habitantes de Galápagos ven CSI-Las Vegas.

l) Las polillas salen de noche. Algunos caminantes nocturnos son vampíros. Por lo tanto, las polillas son vampíros.

m) Si Thor se enfada, hay tormentas. Está comenzando una tormenta. Por lo tanto, Thor está enfadado.

n) Si en Marte hubiera grandes cantidades de agua, podría haber vida. No hay grandes extensiones de agua en Marte. Por lo tanto, no hay vida en Marte.

ñ) Los buenos políticos son honestos. Juan es honesto. Juan sería un buen político.

o) Algunas personas no beben café. Los matemáticos son humanos. Por lo tanto, algunos matemáticos no beben café.

p) Ningún elefante sabe tricotar. Yo no sé tricotar. Luego, soy un elefante.

q) Algunos poetas son nerviosos. Hay gente nerviosa que se come las uñas. Luego, algunos poetas se comen las uñas.

r) Si hago estos ejercicios, aprenderé lógica. Ya he terminado de hacerlos... ¡Sé lógica!

2.- Negar los siguientes enunciados:

a) Los políticos son gordos y feos. b) Hay un matemático que sabe sumar.

c) Algunas personas de Sevilla tienen paraguas.

d) El Athletic de Bilbao ganará la Liga de fútbol.

e) Nadie en Euskadi habla swahili.

f) Al menos dos faraones egipcios eran ciegos.

g) Como mucho, la mitad de los números: 1, 2, 3, 4, 5, 6, son pares.

h) A veces, llueve en El Sahara. i) Siempre hace frío en Groenlandia.

j) Ni Alejandro Magno, ni Julio César eran pelirrojos.

k) $x \in A$ o $x \in B$. l) $x \in A$ y $x \in B$.

m) $x \in A$, pero $x \notin B$. n) $A \subset B$.

ñ) para cada $i \in I$, es $x \in A_i$. o) existe $i \in I$, tal que $x \in A_i$.

3.- Sea X el conjunto de los estudiantes de la Facultad de Ciencia y Tecnología de la UPV/EHU, H el conjunto de los hombres, M el de la mujeres, C el de los estudiantes que van en coche a la Universidad, A el de los estudiantes que van en autobús a la Universidad, E el de los estudiantes de Matemáticas y F el de los estudiantes de Físicas. Describir los siguientes conjuntos: $X-H$, $X-M$, $X-C$, $X-A$, $X-E$, $X-F$, $H \cap C$, $H \cap A$, $H \cap E$, $H \cap F$, $M \cap C$, $M \cap A$, $M \cap E$, $M \cap F$, $C \cap A$, $C \cap E$, $C \cap F$, $A \cap E$, $A \cap F$, $E \cap F$, $M \cup H$, $H-M$, $H-C$, $H-A$, $H-E$, $H-F$, $H-M$, $M-H$, $M-C$, $M-A$, $M-E$, $M-F$, $C-A$, $C-E$, $C-F$, $A-C$, $A-M$, $A-H$, $A-E$, $A-F$, $E-H$, $E-M$, $E-C$, $E-A$ y $E-F$.

4.- Cuatro compañeros han faltado a la clase de Matemáticas en el Instituto. Delante del Jefe de Estudios y en presencia de su profesor, se defienden del modo siguiente:
Pedro: “No he faltado.”
Elena: “Lo admito, he faltado, pero estaba con Juan.”

Juan: “Yo también he faltado; pero no estaba con Elena, sino con Pedro.”
María: “Yo estaba en clase, pero no he visto a Pedro.”
El profesor: “Estaba concentrado en mis cosas, pero he visto a Pedro en clase.”

¿Puedes ayudar al Jefe de Estudios, sabiendo que sólo tres de estas sentencias son ciertas?

5.- Traducir las siguientes frases del lenguaje natural en un lenguaje simbólico utilizando una o varias propiedades $\mathfrak{P}$. Negar cada enunciado y traducirlo al lenguaje natural:

a) No hay amor feliz. b) Una puerta está abierta o cerrada.

c) Ser o no ser. d) Las verdades son fáciles de decir.

e) Prefiero la poesía a la novela histórica.

6.- Probar la siguiente propiedad: Si $x \in \mathbb{R}$ y para cada $\varepsilon > 0$, es $|x| < \varepsilon$, entonces $x = 0$.

7.- Dado el conjunto $A = \{a, b\}$, ¿son válidas las siguientes expresiones?
(i) $a \in A$; (ii) $\{a\} \in A$; (iii) $\emptyset \in A$; (iv) $\{a\} \in \mathcal{P}(A)$; (v) $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$.

8.- Sean A, B y C tres conjuntos finitos, de cardinales a, b y c, respectivamente. Sea $p = Card(A \cap B)$, $q = Card(B \cap C)$, $r = Card(A \cap C)$ y $s = Card(A \cap B \cap C)$. Calcular el cardinal de $A \cup B$, $A \cup C$, $B \cup C$ y $A \cup B \cup C$.

9.- Se pide:

a) calcular $\mathcal{P}(X)$, si $X = \{1, 2\}$, $X = \{\emptyset\}$ y $X = \{1, 2, 3, 4\}$;

b) probar que si $Card(X) = n$, entonces $Card(\mathcal{P}(X)) = 2^n$;

c) probar que si $A \subset B$, entonces $\mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B)$. ¿Es cierto el recíproco?

10.- Si $A, B \subset X$, probar que son equivalentes las siguientes expresiones:

(i) $A \subset B$; (ii) $A \cap B = A$; (iii) $A \cup B = B$;

(iv) $B^c \subset A^c$; (v) $A \cap B^c = \emptyset$; (vi) $B \cup A^c = X$.

11.- Probar las propiedades siguientes para conjuntos, dando un contraejemplo en el caso de inclusión estricta:

a) $A \cup \left(\bigcup_{i \in I} B_i \right) = \bigcup_{i \in I} (A \cup B_i)$; b) $A \cap \left(\bigcap_{i \in I} B_i \right) = \bigcap_{i \in I} (A \cap B_i)$;

c) $A \cup \left(\bigcap_{i \in I} B_i \right) = \bigcap_{i \in I} (A \cup B_i)$; d) $\bigcap_{i \in I} A_i \cap \bigcap_{j \in J} B_j = \bigcap_{(i,j) \in I \times J} (A_i \cap B_j)$;

e) $\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \cup \left(\bigcap_{j\in J} B_j\right) = \bigcap_{(i,j)\in I\times J} (A_i \cup B_j)$; f) $\bigcap_{(i,j)\in I^2} (A_i \cup B_j) \subset \bigcap_{i\in I} (A_i \cup B_i)$;

g) $\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \cup \left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) \subset \bigcap_{i\in I} (A_i \cup B_i)$; h) $\bigcup_{i\in I} (A_i \cap B_i) \subset \bigcup_{(i,j)\in I^2} (A_i \cap B_j)$;

i) $\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \times \left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) = \bigcup_{(i,j)\in I\times J} (A_i \times B_j)$;

j) $\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \times \left(\bigcap_{j\in J} B_j\right) = \bigcap_{(i,j)\in I\times J} (A_i \times B_j)$;

k) $\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \times \left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) = \bigcap_{i\in I} (A_i \times B_i)$;

l) $\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) - \left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) = \bigcup_{i\in I} \bigcap_{j\in J} (A_i - B_j)$;

m) $\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) - \left(\bigcap_{j\in J} B_j\right) = \bigcap_{i\in I} \bigcup_{j\in J} (A_i - B_j)$.

12.- Para cada uno de los siguientes conjuntos de índices I y cada familia dada de conjuntos indicados por I, hallar los conjuntos pedidos:

a) si $I = \mathbb{R}^2$ y para cada $p \in I$, $S_p = \{p\}$, hallar $\bigcup_{p\in I} S_p$;

b) si $I = (0, \infty)$ y para cada $x \in I$, $C_x = [0, x]$, hallar $\bigcup_{x\in I} C_x$ y $\bigcap_{x\in I} C_x$;

c) si $I = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ y para cada $r \in I$, B_r es el círculo de radio r y centro $(0, 0)$, hallar $\bigcup_{r\in I} B_r$ y $\bigcap_{r\in I} B_r$;

d) si $I = (0, 1)$ y para cada $r \in I$, N_r es el interior del círculo de radio r y centro $(0, 0)$, hallar $\bigcup_{r\in I} N_r$ y $\bigcap_{r\in I} N_r$;

e) si $I = [1, 2]$ y para cada $x \in I$, $A_x = [\frac{x}{2}, \frac{3x}{2}]$, hallar $\bigcup\limits_{x\in I} A_x$ y $\bigcap\limits_{x\in I} A_x$;

f) si $I = \mathbb{N}$ y para cada $n \in I$, $A_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$, hallar $\bigcup\limits_{n\in I} A_n$ y $\bigcap\limits_{n\in I} A_n$;

g) si $I = \mathbb{N}$ y para cada $n \in I$, $B_n = (\frac{1}{n}, 1]$, hallar $\bigcup\limits_{n\in I} B_n$ y $\bigcap\limits_{n\in I} B_n$;

h) si $I = \mathbb{N}$ y para cada $n \in I$, $C_n = (-n, n)$, hallar $\bigcup\limits_{n\in I} C_n$ y $\bigcap\limits_{n\in I} C_n$.

13.- Dados $A, B \subset X$, probar:

a) $\chi_{A\cap B} = \chi_A \cdot \chi_B$; b) $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A\cap B}$;

c) $\chi_{A-B} = \chi_A - \chi_{A\cap B}$; d) $\chi_{A^c} = 1 - \chi_A$.

14.- Sean $f\colon X \longrightarrow Y$ y $g\colon Y \longrightarrow Z$ dos aplicaciones. Probar:

a) si f y g son sobreyectivas, entonces $g \circ f$ también lo es, pero el recíproco no es cierto;

b) si $g \circ f$ es sobreyectiva, entonces g también lo es, pero el recíproco no es cierto;

c) si $g \circ f$ es sobreyectiva y g es inyectiva, entonces f es sobreyectiva;

d) si f y g son inyectivas, entonces $g \circ f$ también lo es, pero el recíproco no es cierto;

e) si $g \circ f$ es inyectiva, entonces f también lo es, pero el recíproco no es cierto;

f) si $g \circ f$ es inyectiva y f es sobreyectiva, entonces g es inyectiva.

15.- Sea $f\colon X \longrightarrow Y$; probar:

a) si existe $g\colon Y \longrightarrow X$, tal que $g \circ f = 1_X$, entonces f es inyectiva;

b) si existe $h\colon Y \longrightarrow X$, tal que $f \circ h = 1_Y$, entonces f es sobreyectiva;

c) f es biyectiva si y sólo si existen $g, h\colon Y \longrightarrow X$, tales que $g \circ f = 1_X$, $f \circ h = 1_Y$ y en tal caso $h = f^{-1} = g$.

16.- Sean dos conjuntos X_1, X_2 y para cada $i \in \{1, 2\}$, $A_i \subset X_i$. Sea $p_i\colon X_1 \times X_2 \longrightarrow X_i$ la i-ésima proyección coordenada. Probar las siguientes propiedades:

a) $A_1 \times X_2 = p_1^{-1}(A_1)$, $X_1 \times A_2 = p_2^{-1}(A_2)$ y $A_1 \times A_2 = p_1^{-1}(A_1) \cap p_2^{-1}(A_2)$;

b) si $A \subset X_1 \times X_2$, entonces $A \subset p_1(A) \times p_2(A)$;

c) $p_i\,(A_1 \times A_2) = A_i$ $(i \in \{1,2\})$.

17.- Sean $f, g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, dadas por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 2 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad g(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si} \quad x \geq 0 \\ x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

Se pide:

a) estudiar las funciones $f \circ g$, $f \circ f$, $g \circ g$, $g \circ f$, si tienen sentido;

b) estudiar el carácter sobreyectivo e inyectivo de f, g, $f \circ g$ y $g \circ f$;

c) calcular $f(-5,5]$, $g(-5,5]$, $f^{-1}(-5,5]$ y $g^{-1}(-5,5]$.

18.- Hacer lo mismo que en el ejercicio anterior para las funciones: $f\colon \mathbb{Z}^2 \longrightarrow \mathbb{Z}$ y $g\colon \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}^2$ dadas por: $f(x,y) = x^2 + y$ y $g(x) = (x, -2x)$.

19.- Sea $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si} \quad x < 0 \\ 1 & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 2 \\ x-1 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

Se pide:

a) estudiar si f es inyectiva o sobreyectiva;

b) calcular $f((1,3))$, $f([-2,2])$, $f^{-1}((0,1))$, $f^{-1}([-4,4])$;

c) si $g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es la aplicación $g(x) = |x|$, determinar $f \circ g$ y calcular $(f \circ g)^{-1}((-2,5])$.

20.- Probar que la aplicación $f\colon \mathbb{R} - \{2\} \longrightarrow \mathbb{R} - \{1\}$, definida por: $f(x) = \frac{x+2}{x-2}$ es biyectiva y calcular f^{-1}.

21.- Calcular $f(A_i)$ y $f^{-1}(B_i)$ $(i \in \{1,2\})$, para $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, donde:

a) $f(x) = x^2$, $A_1 = (0,2)$, $B_1 = (0,4)$ y $B_2 = (-1,0)$;

b) $f(x) = x^4$, $A_1 = (0,2)$, $A_2 = \emptyset$, $B_1 = (0,16]$ y $B_2 = (-1,0]$;

c) $f(x) = \frac{1}{x}$ (para $x > 0$), $A_1 = \mathbb{N}$, $B_1 = \{x \in \mathbb{R} : x > 2\}$ y $B_2 = \mathbb{N}$;

d) $f(x) = x^3 - 3x$, $A_1 = [0,\infty)$, $B_1 = (0,2)$ y $B_2 = \{2\}$.

22.- Dados $x, y \in \mathbb{R}$, utilizando el carácter arquimediano de $\mathbb{R}$, probar:

a) si $x > 0$ e $y > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$, tal que $nx > y$;

b) si $x > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$, tal que $0 < \frac{1}{n} < x$;

c) si $x > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$, tal que $n - 1 \leq x < n$.

Espacios topológicos

pólenes
la música de la fórmula del volumen de la esfera,
el pálpito zigzagueante de las conjunciones,
el movimiento browniano de los signos del zodiaco vegetal
del luna quark
.

"Bestiario microscópico"
Sofía Rhei

2.1. Topología

La noción de topología generaliza algunas de las propiedades que poseen los intervalos abiertos en la recta real, que de hecho son independientes de otras presentes en $\mathbb{R}$ como la suma, el orden o la distancia.

Definición 2.1. Una *topología* sobre un conjunto X es una familia $\tau \subset \mathcal{P}(X)$ verificando:

(i) $\emptyset, X \in \tau$,

(ii) si $A, B \in \tau$, entonces $A \cap B \in \tau$,

(iii) si $\{A_i\}_{i \in I} \subset \tau$, entonces $\displaystyle\bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$.

Los elementos de τ se llaman *abiertos* y el par (X, τ) es un *espacio topológico*.

Ejemplos 2.1. Se introducen algunos ejemplos fundamentales:

1) sobre X, $\tau_{ind} = \{\emptyset, X\}$ es la topología *indiscreta*;

2) sobre X, $\tau_{dis} = \mathcal{P}(X)$ es la topología *discreta*;

3) si X es infinito, $\tau_{cof} = \{\emptyset\} \cup \{A \subset X : X - A \text{ es finito}\}$ es la topología *cofinita*;

4) si X es infinito no contable, $\tau_{coc} = \{\emptyset\} \cup \{A \subset X : X - A \text{ es contable}\}$ es la topología *cocontable*;

5) si $X = \{a, b\}$, $\tau_{sier} = \{\emptyset, X, \{a\}\}$ es la topología *de Sierpinski*;

6) si X y $A \subset X$, $\tau_A = \{\emptyset\} \cup \{B \subset X : A \subset B\}$ es la topología A-*inclusión* (observar que $\tau_\emptyset = \tau_{dis}$ y $\tau_X = \tau_{ind}$);

7) si X y $A \subset X$, $\tau^A = \{X\} \cup \{B \subset X : A \cap B = \emptyset\}$ es la topología A-*exclusión* (observar que $\tau^\emptyset = \tau_{dis}$ y $\tau^X = \tau_{ind}$);

8) $\tau_{kol} = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{(a, \infty) : a \in \mathbb{R}\}$ es la topología de *Kolmogorov* sobre $\mathbb{R}$, y el par $(\mathbb{R}, \tau_{kol})$ es la *recta de Kolmogorov*;

9) $\tau_{sca} = \{U \subset \mathbb{R} : U = A \cup B : A \in \tau_u, B \subset \mathbb{I}\}$ es la topología *"scattered"(esparcida)* sobre $\mathbb{R}$, y el par $(\mathbb{R}, \tau_{sca})$ es la *recta "scattered"*;

10) los *espacios métricos* son espacios topológicos (ver el apartado 2.5), por ejemplo la recta real $(\mathbb{R}, \tau_u)$.

Observación 2.1. Sobre un mismo conjunto se pueden definir distintas topologías, como se ha visto en los ejemplos 2.1.

Definición 2.2. Dadas τ_1 y τ_2 dos topologías sobre X, se dice que τ_1 es *menos fina* que τ_2 (o que τ_2 es *más fina* que τ_1), si $\tau_1 \subset \tau_2$. Si $\tau_1 \subset \tau_2$ o $\tau_2 \subset \tau_1$, se dice que las topologías son *comparables*.

Ejemplos 2.2. Algunos ejemplos de topologías comparables son:

1) para cada X y toda topología τ sobre él, es $\tau_{ind} \subset \tau \subset \tau_{dis}$;

2) sobre $\mathbb{R}$, es $\tau_{cof} \subset \tau_u$ y $\tau_{cof} \subset \tau_{coc}$; pero τ_{coc} y τ_u no son comparables;

3) sobre $\mathbb{R}$, $\tau_{kol} \subset \tau_u \subset \tau_{sca}$.

2.2. Conjuntos abiertos y cerrados

Definición 2.3. En (X, τ), un conjunto $A \subset X$ se dice *cerrado*, si su complementario $X - A \in \tau$. Denotamos por $\mathcal{C}$ a la familia de cerrados en (X, τ).

El concepto de conjunto cerrado es así *dual* –no contrario– de la noción de conjunto abierto, y una topología puede especificarse a través de la familia de sus conjuntos cerrados $\mathcal{C}$, tomando complementarios.

Lema 2.1. *En (X, τ), la familia de cerrados $\mathcal{C}$ verifica:*

(i) $\emptyset, X \in \mathcal{C}$,

(ii) si $F, G \in \mathcal{C}$, *entonces* $F \cup G \in \mathcal{C}$,

(iii) si $\{F_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{C}$, *entonces* $\bigcap\limits_{i \in I} F_i \in \mathcal{C}$.

Demostración: Basta con pasar al complementario y usar la definición 2.1. ∎

Ejemplos 2.3. En los ejemplos anteriores de topologías, tenemos

1) en (X, τ_{ind}), es $\mathcal{C}_{ind} = \{\emptyset, X\}$; 2) en (X, τ_{dis}), es $\mathcal{C}_{dis} = \mathcal{P}(X)$;

3) si X es infinito, $\mathcal{C}_{cof} = \{\emptyset\} \cup \{A \subset X : A \text{ es finito}\}$;

4) si X es infinito no contable, $\mathcal{C}_{coc} = \{\emptyset\} \cup \{A \subset X : A \text{ es contable}\}$;

5) si $X = \{a, b\}$, $\mathcal{C}_{sier} = \{\emptyset, X, \{b\}\}$;

6) si X y $A \subset X$, $\mathcal{C}_A = \tau^A$; 7) si X y $A \subset X$, $\mathcal{C}^A = \tau_A$;

8) $\mathcal{C}_{kol} = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{(-\infty, a] : a \in \mathbb{R}\}$;

9) $\mathcal{C}_{sca} = \{U \subset \mathbb{R} : B = F \cap H : F \in \mathcal{C}_{us}, \mathbb{Q} \subset H\}$.

Observación 2.2. La propiedad de ser abierto o cerrado es independiente la una de la otra. Un conjunto puede ser simultáneamente abierto y cerrado, abierto y no cerrado, cerrado y no abierto o ninguna de las dos propiedades.

2.3. Base y subbase de una topología

Hay topologías que poseen demasiados abiertos y a veces es difícil especificarlos todos. Por ello, se introduce el siguiente concepto:

Definición 2.4. En (X, τ), una familia $\beta \subset \tau$ es una *base* de τ, si para todo $U \in \tau$ y para cada $x \in U$, existe $B \in \beta$, tal que $x \in B \subset U$. Los elementos de β se llaman *abiertos básicos*.

Lema 2.2. *Si β es base de τ, todo abierto puede escribirse como unión de abiertos básicos.*

Demostración: Para $U \in \tau$ y $x \in U$, existe $B_x \in \beta$, tal que $x \in B_x \subset U$. Claramente, es $U = \bigcup_{x \in U} B_x$. ∎

Teorema 2.3. *Si $\beta \subset \mathcal{P}(X)$, β es base de alguna topología τ_β sobre X, si y sólo si:*

(i) $X = \bigcup_{B \in \beta} B$, y

(ii) para cada $B_1, B_2 \in \beta$ y cada $x \in B_1 \cap B_2$, existe $B_3 \in \beta$ tal que $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

Y, en tal caso, $\tau_\beta = \{U \subset X : \text{ existe } \{B_i\}_{i \in I} \subset \beta : U = \bigcup_{i \in I} B_i\}$.

Ejemplos 2.4. Algunos ejemplos de bases de topología son:

1) una topología es obviamente base de sí misma;

2) sobre X, $\beta_{ind} = \{X\}$ es base de la topología indiscreta;

3) sobre X, $\beta_{dis} = \{\{x\} : x \in X\}$ es base de la topología discreta. Además, $\beta = \{[a, b] : a, b \in \mathbb{R}\}$ es base de la topología discreta sobre $\mathbb{R}$;

4) si $A \subset X$, $\beta_A = \{A \cup \{x\} : x \in X\}$ es base de la topología A-inclusión τ_A;

5) si $A \subset X$, $\beta^A = \{\{x\} : x \in X - A\} \cup \{X\}$ es base de la topología A-exclusión τ^A;

6) $\beta_1 = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$, $\beta_2 = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{Q}\}$ y $\beta_3 = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{I}\}$ son bases de la topología usual sobre $\mathbb{R}$;

7) $\beta_{sor} = \{[a, b) : a < b, a, b \in \mathbb{R}\}$ es base para *una* topología sobre $\mathbb{R}$, llamada *topología de Sorgenfrey*; el par $(\mathbb{R}, \tau_{sor})$ se llama *recta de Sorgenfrey*. Observar que $[a, b) \in \mathcal{C}_{sor}$, ya que $\mathbb{R} - [a, b) = (-\infty, a) \cup [b, +\infty) = \left(\bigcup_{c<a} [c, a) \right) \cup \left(\bigcup_{d>b} [b, d) \right)$, es decir, es unión de abiertos básicos.

Como se ha visto en los ejemplos 2.4, una topología puede generarse a través de diferentes bases. Esto sugiere la siguiente definición:

Definición 2.5. Dadas β_1 y β_2 dos bases para las topologías τ_1 y τ_2 sobre X, se dice que β_1 es *más fina* que β_2 ($\beta_1 \succeq \beta_2$), si $\tau_2 \subset \tau_1$. Y son bases *equivalentes* si $\tau_2 = \tau_1$.

Observación 2.3. Si β_1 y β_2 son bases equivalentes, no tienen porque coincidir. Por ejemplo, $\beta_1 = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{Q}\}$ y $\beta_2 = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{I}\}$ son bases de la topología usual sobre $\mathbb{R}$, pero no son iguales.

Se pueden comparar topologías conociendo sólo sus bases. Intuitivamente, cuanto más pequeños sean los elementos de la base, mayores serán las topologías inducidas:

Teorema 2.4. *Sean β_1 y β_2 bases para las topologías τ_1 y τ_2 sobre X, respectivamente. Entonces, $\tau_2 \subset \tau_1$ ($\beta_1 \succeq \beta_2$) si y sólo si para cada $B_2 \in \beta_2$ y cada $x \in B_2$, existe $B_1 \in \beta_1$, tal que $x \in B_1 \subset B_2$.*

Corolario 2.5. *Sean β_1 y β_2 bases para las topologías τ_1 y τ_2 sobre X, respectivamente. Entonces, $\tau_2 = \tau_1$ si y sólo si:*

(i) para cada $B_2 \in \beta_2$ y cada $x_2 \in B_2$, existe $B_1 \in \beta_1$, tal que $x_2 \in B_1 \subset B_2$, y

(ii) para cada $B_1 \in \beta_1$ y cada $x_1 \in B_1$, existe $B_2 \in \beta_2$, tal que $x_1 \in B_2 \subset B_1$.

Ejemplos 2.5. Aplicando este criterio, se comprueba que:

(i) $\tau_u \subset \tau_{sor}$ ya que para cada $(a, b) \in \beta_u$ y cada $x \in (a, b)$, existe $[x, b) \in \beta_{sor}$ tal que $x \in [x, b) \subset (a, b)$; y

(ii) $\tau_{sor} \not\subset \tau_u$, pues para $a \in [a, b) \in \beta_{sor}$, no existe $B \in \beta_u$ tal que $a \in B \subset [a, b)$.

A veces, también es útil disponer de la noción de subbase:

Definición 2.6. Una familia $\sigma \subset \mathcal{P}(X)$ es una *subbase* para alguna topología sobre X, si la familia de las intersecciones finitas de elementos de σ es una base para una topología sobre X.

Lema 2.6. *Si $\sigma \subset \mathcal{P}(X)$ verifica que $X = \bigcup_{S \in \sigma} S$, entonces es subbase para alguna topología sobre X.*

Ejemplos 2.6. Algunos ejemplos de subbases son:

1) $\sigma = \{(-\infty, a), (b, \infty) : a, b \in \mathbb{R}\}$ es subbase para τ_u sobre $\mathbb{R}$;

2) $\sigma = \{(-\infty, a], [b, \infty) : a, b \in \mathbb{R}\}$ es subbase para τ_{dis} sobre $\mathbb{R}$;

3) toda topología es subbase de sí misma.

2.4. Entornos y bases de entornos

Los entornos constituyen la manera más natural de describir las topologías. Esta herramienta indica que sucede *cerca* de cada punto x, es decir, estamos dando una descripción *local* alrededor de x.

Definición 2.7. $N \subset X$ es un *entorno* del punto x en (X, τ) si existe un abierto $U \in \tau$, verificando $x \in U \subset N$. En esta definición, puede cambiarse el abierto por un abierto básico. La familia $\mathcal{N}_x$ de todos los entornos de x se llama *sistema de entornos* de x.

Teorema 2.7. *El sistema de entornos de x en (X, τ) verifica las siguientes propiedades:*

(N1) para cada $N \in \mathcal{N}_x$, es $x \in N$;

(N2) si $N_1, N_2 \in \mathcal{N}_x$, entonces $N_1 \cap N_2 \in \mathcal{N}_x$;

(N3) si $N \in \mathcal{N}_x$ y $N \subset M$, entonces $M \in \mathcal{N}_x$;

(N4) para cada $N \in \mathcal{N}_x$, existe $M \in \mathcal{N}_x$, tal que $N \in \mathcal{N}_y$ para cada $y \in M$; y además

(N5) $U \in \tau$ si y sólo si $U \in \mathcal{N}_x$ para cada $x \in U$.

Y recíprocamente, si a cada $x \in X$ se le asigna una familia no vacía de subconjuntos $\mathcal{M}_x$, verificando (N1) a (N4), y se usa (N5) para definir el concepto de "conjunto abierto", se obtiene una topología τ sobre X, para la que $\mathcal{M}_x = \mathcal{N}_x$ en cada punto.

Demostración: Sólo vamos a comprobar la igualdad $\mathcal{M}_x = \mathcal{N}_x$ en la segunda parte del teorema, el resto de la prueba es sencillo. Si $N \in \mathcal{N}_x$, existe $U \in \tau$ tal que $x \in U \subset N$. Pero $U \in \mathcal{M}_x$, luego $N \in \mathcal{M}_x$ por (N3). Con esto, queda demostrado que $\mathcal{N}_x \subset \mathcal{M}_x$. Recíprocamente, para $M \in \mathcal{M}_x$ se define $U = \{y \in M : M \in \mathcal{M}_y\}$, que es no vacío, pues $x \in U \subset M$. Si demostramos que $U \in \tau$, será entonces $M \in \mathcal{N}_x$. Sea $y \in U$, es decir, $M \in \mathcal{M}_y$. Por (N4), existe $U_y \in \mathcal{M}_y$ tal que para cada $z \in U_y$ es $M \in \mathcal{M}_z$. Por lo tanto, $U_y \subset U$ y de (N2) se deduce que $U \in \mathcal{M}_y$. Como esto sucede para cada $y \in U$, se concluye que $U \in \tau$. ∎

Ejemplos 2.7. Para los ejemplos ya vistos, tenemos:

1) en (X, τ_{ind}), para todo $x \in X$, es $\mathcal{N}_x^{ind} = \{X\}$;

2) en (X, τ_{dis}), para cada $x \in X$, es $\mathcal{N}_x^{dis} = \{N \subset X : x \in N\}$;

3) en (X, τ_{cof}), para todo $x \in X$, es $\mathcal{N}_x^{cof} = \{U \in \tau_{cof} : x \in U\}$;

4) en (X, τ_{coc}), para cada $x \in X$, es $\mathcal{N}_x^{coc} = \{U \in \tau_{coc} : x \in U\}$;

5) en $(X = \{a, b\}, \tau_{sier})$, $\mathcal{N}_a^{sier} = \{X, \{a\}\}$ y $\mathcal{N}_b^{sier} = \{X\}$;

6) en (X, τ_A), para todo $x \in X$, es $\mathcal{N}_x^{\tau_A} = \{N \subset X : \{x\} \cup A \subset N\}$;

7) en (X, τ^A), si $x \in A$ es $\mathcal{N}_x^{\tau^A} = \{X\}$ y si $x \notin A$ es $\mathcal{N}_x = \{N \subset X : x \in N\}$;

8) en $(\mathbb{R}, \tau_{sca})$, es $\mathcal{N}_x^{sca} = \mathcal{N}_x^u$ si $x \in \mathbb{Q}$ y $\mathcal{N}_x^{sca} = \{N \subset \mathbb{R} : x \in N\}$ si $x \in \mathbb{I}$.

No son necesarios todos los superconjuntos de los entornos de un punto para obtener una buena descripción del sistema de entornos. Bastará con una familia más pequeña:

Definición 2.8. Una *base de entornos o base local* de x en (X, τ) es una familia $\mathcal{B}_x \subset \mathcal{N}_x$ tal que, para cada $N \in \mathcal{N}_x$, existe $B \in \mathcal{B}_x$ tal que $B \subset N$. En cuanto se ha elegido una base de entornos de un punto (no hay una manera única de hacerlo), sus elementos se llaman *entornos básicos*. La familia $\{\mathcal{B}_x\}_{x \in X}$ se llama *sistema fundamental de entornos*.

Ejemplos 2.8. Para los ejemplos ya estudiados, tenemos:

1) en (X, τ_{ind}), para todo $x \in X$, se elige $\mathcal{B}_x^{ind} = \{X\}$;

2) en (X, τ_{dis}), para cada $x \in X$, se escoge $\mathcal{B}_x^{dis} = \{\{x\}\}$;

3) en $(X = \{a, b\}, \tau_{sier})$, se toma $\mathcal{B}_a^{sier} = \{\{a\}\}$ y $\mathcal{B}_b^{sier} = \{X\}$;

4) en (X, τ_A), para todo $x \in X$, se elige $\mathcal{B}_x^{\tau_A} = \{\{x\} \cup A\}$;

5) en (X, τ^A), $\mathcal{B}_x^{\tau^A} = \{X\}$ si $x \in A$ y $\mathcal{B}_x^{\tau^A} = \{\{x\}\}$ si $x \notin A$;

6) en $(\mathbb{R}, \tau_u)$, se elige $\mathcal{B}_x^u = \{(x - \varepsilon, x + \varepsilon) : \varepsilon > 0\}$;

7) en $(\mathbb{R}, \tau_{sor})$, se toma $\mathcal{B}_x^{sor} = \{[x, x + \varepsilon) : \varepsilon > 0\}$;

8) en $(\mathbb{R}, \tau_{kol})$, se elige $\mathcal{B}_x^{kol} = \{(x - \varepsilon, \infty) : \varepsilon > 0\}$;

9) en $(\mathbb{R}, \tau_{sca})$, se toma $\mathcal{B}_x^{sca} = \mathcal{B}_x^u$ si $x \in \mathbb{Q}$ y $\mathcal{B}_x^{sca} = \{\{x\}\}$ si $x \in \mathbb{I}$;

10) $\mathcal{N}_x$ es una base local en x en (X, τ);

11) τ_{cof} y τ_{coc} no tienen bases de entornos destacadas.

Teorema 2.8. *Sea (X, τ) y $\{\mathcal{B}_x\}_{x \in X}$ un sistema fundamental de entornos. Se verifica:*

(B1) para cada $B \in \mathcal{B}_x$, es $x \in B$;

(B2) si $B_1, B_2 \in \mathcal{B}_x$, existe $B_3 \in \mathcal{B}_x$ tal que $B_3 \subset B_1 \cap B_2$;

(B3) para cada $B \in \mathcal{B}_x$, existe $B_0 \in \mathcal{B}_x$, tal que para cada $y \in B_0$, existe $B_y \in \mathcal{B}_y$ tal que $B_y \subset B$; y además

(B4) $U \in \tau$ si y sólo si para cada $x \in U$, existe $B \in \mathcal{B}_x$, tal que $B \subset U$.

Y recíprocamente, si a cada $x \in X$ se le asigna una familia no vacía $\mathcal{D}_x$ de subconjuntos de X, verificando (B1) a (B3), y se usa (B4) para definir el concepto de "conjunto abierto", se obtiene una topología τ sobre X, para la que $\{\mathcal{D}_x\}_{x\in X}$ es un sistema fundamental de entornos en x.

Una forma natural de construir bases locales es la siguiente:

Lema 2.9. *En (X,τ), la familia de los entornos abiertos de un punto, $\mathcal{B}_x = \mathcal{N}_x \cap \tau$, es una base local en x.*

Proposición 2.10. ***(Criterio de Hausdorff)*** *Sean τ_1 y τ_2 topologías sobre X y $\{\mathcal{B}^1_x\}_{x\in X}$, $\{\mathcal{B}^2_x\}_{x\in X}$ sistemas fundamentales de entornos asociados. Entonces, $\tau_1 \subset \tau_2$ si y sólo si para cada $x \in X$ y cada $B_1 \in \mathcal{B}^1_x$, existe $B_2 \in \mathcal{B}^2_x$ tal que $B_2 \subset B_1$. En las mismas condiciones, $\tau_1 \subset \tau_2$ si y sólo si para cada $x \in X$, es $\mathcal{N}^1_x \subset \mathcal{N}^2_x$.*

Lema 2.11. *Sea (X,τ) y $\beta \subset \tau$. Entonces, β es base de τ si y sólo si, para cada $x \in X$, la familia $\mathcal{B}_x = \{B \in \beta : x \in B\}$ es una base local en x.*

2.5. Distancia. Espacios métricos

En el plano o el espacio sabemos perfectamente lo que es la distancia entre dos puntos. El problema, siendo X un conjunto abstracto, es definir lo que se entiende por distancia entre dos de sus elementos cuya naturaleza específica desconocemos. Para abstraer el concepto de *distancia*, hay que captar lo esencial de dicha noción, lo que da lugar a la siguiente definición:

Definición 2.9. Dado un conjunto $X \neq \emptyset$, una *métrica* o *distancia* sobre X es una función $d\colon X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$, verificando:

(i) *positividad*: para cada $x, y \in X$, es $d(x,y) \geq 0$,

(ii) *propiedad idéntica*: dados $x, y \in X$, $d(x,y) = 0$ si y sólo si $x = y$,

(iii) *simetría*: para cada $x, y \in X$, $d(x,y) = d(y,x)$,

(iv) *desigualdad triangular*: para cada $x, y, z \in X$, $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

La expresión $d(x,y)$ se lee como *distancia de x a y*, y el par (X,d) se denomina *espacio métrico*.

Observación 2.4. En la definición 2.9, si se debilita la condición (ii) reemplazándola por

(ii)* para cada $x \in X$, $d(x,x) = 0$, estamos contemplando la posibilidad de que existan $x \neq y$ en X con $d(x,y) = 0$. Entonces d recibe el nombre de *pseudométrica*.

Sobre un mismo conjunto pueden definirse distintas métricas, que dan lugar a diferentes espacios métricos.

Ejemplos 2.9. Los primeros ejemplos de espacios métricos son:

1) (X, d_{dis}) donde d_{dis} es la *métrica discreta* sobre X:

$$d_{\text{dis}}(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x = y \\ 1 & \text{si} \quad x \neq y \end{cases}$$

2) el par $(\mathbb{R}, d_{\text{u}})$, donde $d_{\text{u}}(x,y) = |x-y|$, se llama la *recta real* y d_{u} es la *distancia usual* o *euclídea*;

3) sean (X_1, d_1), ..., (X_n, d_n) una familia finita de espacios métricos. Sean $X = X_1 \times \cdots \times X_n$ y $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in X$. Podemos definir tres distancias sobre X:

   a) $d_{\text{máx}} \colon X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $d_{\text{máx}}(x,y) = \text{máx}\{d_i(x_i, y_i) : 1 \leq i \leq n\}$;

   b) $d_{\text{sum}} \colon X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $d_{\text{sum}}(x,y) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} d_i(x_i, y_i)$;

   c) $d_{\text{u}} \colon X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $d_{\text{u}}(x,y) = \sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} d_i^2(x_i, y_i)}$, es la *distancia euclídea*. La única propiedad de métrica no trivial para d_{u} es la desigualdad triangular, que en este caso recibe el nombre de *desigualdad de Minkowski* (ver el ejercicio **29** en el apartado 2.7).

2.6. Bolas abiertas y cerradas

Definición 2.10. Sea (X, d) y $r > 0$. Se llama:

1) *bola abierta* de centro x y radio r, al conjunto $B(x,r) = \{y \in X : d(x,y) < r\}$;

2) *bola cerrada* de centro x y radio r, al conjunto $\overline{B}(x,r) = \{y \in X : d(x,y) \leq r\}$;

3) *esfera* de centro x y radio r, al conjunto $S(x,r) = \{y \in X : d(x,y) = r\}$.

Ejemplos 2.10. Damos algunos ejemplos de bolas en algunos espacios métricos:

(i) en (X, d_{dis}), $B(x,1) = \{x\}$, $B(x,2) = X$, $\overline{B}(x,1) = X$, $\overline{B}(x, \frac{1}{2}) = \{x\}$, $S(x,1) = X - \{x\}$ y $S(x,2) = \emptyset$;

(ii) en $(\mathbb{R}, d_{\mathrm{u}})$, $B(x,r) = (x-r, x+r)$, $\overline{B}(x,r) = [x-r, x+r]$ y $S(x,r) = \{x-r, x+r\}$;

(iii) en $(\mathbb{R}^n, d_{\mathrm{máx}})$, la bola $B(x,r) = (x_1 - r, x_1 + r) \times \cdots \times (x_n - r, x_n + r)$ es el cubo de dimensión n, centrado en x y arista $2r$;

(iv) en $(\mathbb{R}^n, d_{\mathrm{sum}})$, la bola $B(x,r)$ es el cubo de dimensión n centrado en x, de arista $2r$ y girado 45 grados;

(v) en $(\mathbb{R}^n, d_{\mathrm{u}})$, $B(x,r)$ es la bola abierta de dimensión n, centrada en x y de radio r.

Proposición 2.12. *En un espacio métrico (X,d), se cumplen las siguientes propiedades:*

(i) para cada $x \in X$ y $r > 0$, es $B(x,r) \neq \emptyset \neq \overline{B}(x,r)$; pero $S(x,r)$ puede ser vacía;

(ii) si $0 < r \leq s$, es $B(x,r) \subset B(x,s)$, $\overline{B}(x,r) \subset \overline{B}(x,s)$, $\overline{B}(x,r) \subset B(x,s)$ (si $r < s$) y $S(x,r) \cap S(x,s) = \emptyset$ si $s \neq r$;

(iii) $B(x,r) \cup S(x,r) = \overline{B}(x,r)$ y $B(x,r) \cap S(x,r) = \emptyset$;

(iv) si $r_1, \ldots, r_n > 0$, $B(x,r_1) \cap \cdots \cap B(x,r_n) = B(x,r)$ y $\overline{B}(x,r_1) \cap \cdots \cap \overline{B}(x,r_n) = \overline{B}(x,r)$, donde $r = \mathrm{mín}\{r_1, \ldots, r_n\}$.

Observación 2.5. La intersección arbitraria de bolas no tiene porque serlo; por ejemplo, en $(\mathbb{R}, d_{\mathrm{u}})$, $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B\left(0, \frac{1}{n}\right) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \{0\}$, que no es una bola.

Teorema 2.13. ***(Propiedad de Hausdorff)*** *En un espacio métrico (X,d), dos puntos distintos se pueden* separar por bolas abiertas disjuntas.

Demostración: Sean $x \neq y$. Entonces $d(x,y) = r > 0$. Las bolas $B(x, \frac{r}{2})$ y $B(y, \frac{r}{2})$ son obviamente disjuntas. ∎

Teorema 2.14. *En (X,d), la familia de sus bolas abiertas $\{B(x,r) : x \in X, r > 0\}$ es base para una topología sobre X, τ_d, que se dice inducida por la métrica d.*

Demostración: Hay que comprobar las condiciones del teorema 2.3:

(i) $X = \displaystyle\bigcup_{x\in X} B(x,1)$, y

(ii) dadas $B(x_1, r_1)$ y $B(x_2, r_2)$ con $x_1, x_2 \in X$ y $r_1, r_2 > 0$, si $x \in B(x_1, r_1) \cap B(x_2, r_2)$, es $B(x, r) \subset B(x_1, r_1) \cap B(x_2, r_2)$, donde $r = \text{mín}\{r_1 - d(x, x_1), r_2 - d(x, x_2)\}$. ∎

Definición 2.11. Un espacio topológico (X, τ) es *metrizable* si existe una métrica d sobre X, tal que $\tau = \tau_d$.

Observación 2.6. (i) Distintas métricas en X pueden generar la misma topología. En este caso, se dice que las métricas son *topológicamente equivalentes*;

(ii) (X, τ_{ind}) no es metrizable;

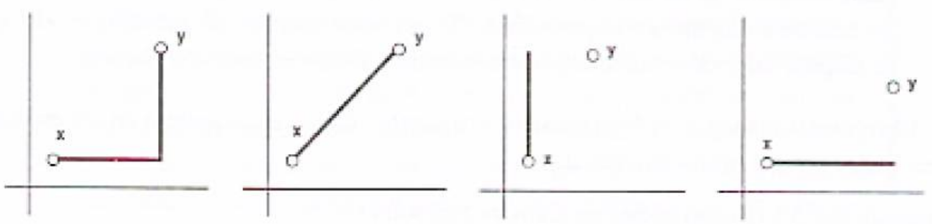
(iii) si $(X, \|.\|)$ es un espacio vectorial normado, queda definida una métrica $d_{\|.\|}$ sobre X por dados $x, y \in X$, $d_{\|.\|}(x, y) = \|x - y\|$.

Ejemplos 2.11. Sobre $\mathbb{R}^n$ pueden definirse tres métricas inducidas por la usual sobre la recta (ver los ejemplos 2.9). Si $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$):

a) $d_{\text{máx}} \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $d_{\text{máx}}(x, y) = \text{máx}\{|x_i - y_i| : 1 \leq i \leq n\}$;

b) $d_{\text{sum}} \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $d_{\text{sum}}(x, y) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$;

c) la *distancia euclídea* $d_{\text{u}} \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $d_{\text{u}}(x, y) = \sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2}$. El par $(\mathbb{R}^n, d_{\text{u}})$ se llama *espacio euclídeo de dimensión* n.



$d_{\text{sum}}(x, y)$, $d_{\text{u}}(x, y)$, y dos ejemplos de $d_{\text{máx}}(x, y)$

2.7. Problemas

1.- Sea $\{\tau_i\}_{i \in I}$ una familia de topologías sobre X. Se pide probar:

(i) $\displaystyle\bigcup_{i \in I} \tau_i$ es subbase para una topología, $\sup(\tau_i)$, la menor que es más fina que cada τ_i;

(ii) $\bigcap_{i\in I}\tau_i$ es una topología sobre X, $\text{ínf}(\tau_i)$, la mayor que es menos fina que cada τ_i;

(iii) si $X = \{a,b,c\}$, $\tau_1 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a,b\}\}$ y $\tau_2 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b,c\}\}$, encontrar $\sup\{\tau_1,\tau_2\}$ e $\text{ínf}\{\tau_1,\tau_2\}$.

2.- Una *base de cerrados* $\mathcal{F}$ en (X,τ) es una familia de cerrados, tal que todo cerrado en (X,τ) se puede escribir como la intersección de de elementos de $\mathcal{F}$. Se pide probar:

(i) $\mathcal{F}$ es base de cerrados en (X,τ) si y sólo si $\beta = \{X - C : C \in \mathcal{F}\}$ es base de τ;

(ii) $\mathcal{F}$ es base de cerrados para algún espacio topológico si y sólo si:

(a) si $C_1, C_2 \in \mathcal{F}$, $C_1 \cup C_2$ se escribe como intersección de elementos de $\mathcal{F}$, y

(b) $\bigcap_{C\in\mathcal{F}} C = \emptyset$.

3.- Sea (X,τ) un espacio topológico, donde X es un conjunto infinito. Para cada subconjunto A infinito de X, se sabe que $A \in \tau$. Probar que $\tau = \tau_{dis}$.

4.- Dar un ejemplo de espacio topológico no discreto, en el que $\tau = \mathcal{C}$.

5.- Describir todas las posibles topologías sobre un conjunto con dos o tres puntos.

6.- Sea X un conjunto infinito y $\tau_\infty = \{U \subset X : X - U \text{ es infinito}\} \cup \{X\}$. ¿Es τ_∞ una topología sobre X?

7.- Un espacio (X,τ) es:

(i) de *Fréchet* o T_1, si para cada $x \neq y$, existe $U \in \tau$ tal que $x \in U$ e $y \notin U$.

(ii) de *Hausdorff* o T_2, si para cada $x \neq y$, existen abiertos disjuntos U y V, tales que $x \in U$ e $y \in V$; se suele decir que U y V *separan* x e y.

Se pide demostrar:

(i) Si (X,τ) es T_2, entonces es T_1. El recíproco no es cierto.

(ii) τ_{dis}, τ_{sca}, τ_{sor} y las topologías metrizables son T_2 (luego T_1). τ_{cof} y τ_{coc} son T_1, pero no T_2. τ_{ind}, τ_{sier}, τ_{kol}, τ_A y τ^A (para $A \neq X, \emptyset$) no son T_1 (luego no son T_2).

(iii) (X,τ) es T_1 si y sólo si para cada $x \in X$, es $\{x\} \in \mathcal{C}$.

8.- Sea $(X,\leq)$ un conjunto totalmente ordenado. Para $\alpha,\beta \in X$, se consideran los conjuntos: $V_\alpha = \{x \in X : x < \alpha\}$, $B_\alpha = \{x \in X : x > \alpha\}$ y $M_{\alpha,\beta} = B_\alpha \cap V_\beta$. Se pide:

(i) probar que la familia $\beta = \{V_\alpha, B_\alpha, M_{\alpha,\beta} : \alpha, \beta \in X\}$ es una base para una topología τ_{ord} en X, llamada *topología del orden*. ¿Es (X, τ_{ord}) T_1? ¿Y T_2?;

(ii) probar que el conjunto $\{x \in X : \alpha \leq x \leq \beta\}$ es cerrado, para cada $\alpha, \beta \in X$;

(iii) si se toma $\mathbb{R}$ (respectivamente, $\mathbb{N}$) con el orden usual, ¿cuál es la topología del orden asociada sobre $\mathbb{R}$ (respectivamente, $\mathbb{N}$)?

(iv) en $[0,1] \times [0,1]$ se considera el *orden lexicográfico*: $(a_1, a_2) < (b_1, b_2)$ si y sólo si $(a_1 < b_1$ o $a_1 = b_1$ y $a_2 < b_2)$. Probar que la topología del orden asociado no es comparable con la topología euclídea de $[0,1] \times [0,1]$;

(v) en $\{1,2\} \times \mathbb{N}$ con el orden lexicográfico, ¿cuál es la topología del orden inducida? Describir los entornos de los puntos $(x, 0)$ (atención al $(0,0)$) y $(x, 1)$ (atención al $(1,1)$), si $x \in [0,1]$. Hacer lo mismo para los puntos (x, y), con $x, y \in (0,1)$.

9.- Probar que la familia $\beta^* = \{(a,b) : a < b, a, b \in \mathbb{Q}\}$, es una base para τ_u sobre $\mathbb{R}$. Sin embargo, demostrar que la familia $\beta' = \{[a,b) : a < b, a, b \in \mathbb{Q}\}$ genera una topología τ' sobre $\mathbb{R}$ estrictamente más fina que τ_u y estrictamente menos fina que τ_{sor}.

10.- En $\mathbb{R}$, se considera $\tau = \{\mathbb{R}, \emptyset\} \cup \{(r, \infty) : r \in \mathbb{Q}\}$. Probar que si $S \subset \mathbb{R}$ está acotado inferiormente, es $\bigcup_{s \in S} (s, \infty) = (\text{ínf}(S), \infty)$. Concluir que τ no es una topología sobre $\mathbb{R}$.

11.- Se considera $\tau_{fort} = \{U \subset \mathbb{R} : p \notin U$ ó $\mathbb{R} - U$ finito$\}$, donde $p \in \mathbb{R}$. Probar que se trata de una topología sobre $\mathbb{R}$, la topología de *Fort* y estudiar si es T_1 o T_2.

12.- En $\mathbb{R}^2$, se define una familia $\mathcal{F}$ de subconjuntos de X, como sigue:

$$\mathcal{F} = \{\emptyset, \mathbb{R}^2\} \cup \{F \subset \mathbb{R}^2 : F \text{ consta de un número finito de puntos y de rectas}\}.$$

Se pide probar:

(i) $\mathcal{F}$ es una familia de cerrados para alguna topología $\tau_{\mathcal{F}}$;

(ii) esta topología es la menor en la que puntos y rectas son subconjuntos cerrados;

(iii) comparar $\tau_{\mathcal{F}}$ con la topología usual y la cofinita;

(iv) ¿existe alguna topología sobre $\mathbb{R}^2$ en la que las rectas sean cerradas y los puntos no?

(v) ¿existe alguna topología sobre $\mathbb{R}^2$ en la que los puntos sean cerrados y las rectas no?

13.- Vamos a dar una prueba topológica (debida a H. Fürstenberg en 1955) de la infinitud de los números primos. Sobre $\mathbb{Z}$ se define la familia $\beta = \{S_{ab} : a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{Z}\}$, donde $S_{ab} = \{an + b : n \in \mathbb{Z}\}$. Se pide probar:

(i) $S_{ab} \cap S_{cd} = S_{rs}$, donde $r = \text{mcm}\{a, c\}$;

(ii) β es base de una topología τ sobre $\mathbb{Z}$;

(iii) todo conjunto abierto es infinito;

(iv) para cada $a, b \in \mathbb{Z}$, S_{ab} es un conjunto cerrado;

(v) para cada entero $m \in \mathbb{Z} - \{-1, 1\}$ existe un primo p tal que $m \in S_{p0}$; deducir que existen infinitos números primos.

14.- Decimos que $U \subset \mathbb{N}$ es abierto si dado $n \in U$, todo divisor de n pertenece también a U. Probar que esta relación define una topología $\tau \neq \tau_{dis}$ sobre $\mathbb{N}$. ¿Es $(\mathbb{N}, \tau)$ T_2?

15.- Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos el conjunto $O_n = \{n, n+1, \ldots\}$. Probar que $\tau = \{\emptyset\} \cup \{O_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una topología sobre $\mathbb{N}$. ¿Qué abiertos contienen al 1? ¿Es $(\mathbb{N}, \tau)$ T_2?

16.- Sean $X = \{f \colon [0,1] \longrightarrow [0,1]\}$ y $A_S = \{f \in X : f(x) = 0, \forall x \in S\}$ para $S \subset [0,1]$. Probar que la familia $\beta = \{A_S : S \subset [0,1]\}$ es una base para una topología τ sobre X. ¿Es (X, τ) T_2?

17.- Sea X la familia de todos los polinomios de coeficientes reales y para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $B_n = \{p \in X : p \text{ es de grado } n\}$. Probar que la familia $\beta = \{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una base para una topología τ sobre X. ¿Es (X, τ) T_2?

18.- Para cada $A \subset \mathbb{N}$, definimos $N(n, A) = Card\,(A \cap \{1, 2, \ldots, n\})$. Sea:

$$\tau_{ap} = \left\{ U \subset \mathbb{N} : 1 \notin U \text{ ó } \left(1 \in U \text{ y } \lim_{n \to \infty} \frac{N(n, U)}{n} = 1 \right) \right\}.$$

Probar que τ_{ap} es una topología sobre $\mathbb{N}$, la *topología de Appert*. ¿Es T_2?

19.- Sea $\mathcal{P}$ la colección de los polinomios en n variables reales. Para cada $P \in \mathcal{P}$, sea $Z(P) = \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n : P(x_1, \cdots, x_n) = 0\}$. Se pide:

(i) probar que $\{Z(P) : P \in \mathcal{P}\}$ es una base de cerrados para una topología sobre $\mathbb{R}^n$, τ_{zar}, llamada *topología de Zariski*;

(ii) probar que es T_1, pero no T_2;

(iii) si $n = 1$, $\tau_{zar} = \tau_{cof}$. Pero, si $n > 1$, estas dos topologías son distintas.

20.- Describir los sistemas de entornos de cada punto en los espacios topológicos:

(i) $X = \{a, b, d, c\}$ y $\tau = \{X, \emptyset, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c, d\}\}$;

(ii) $X = \{a, b, d, c, e\}$ y $\tau = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c, d\}, \{a, b, c, d\}, \{a, b, e\}\}$.

21.- Sea (X, d) un espacio métrico. Probar que $\mathcal{B}_x = \{B(x, \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\}$ es una base de entornos en x para la topología inducida por la métrica.

22.- Sobre $\mathbb{R}$, se considera:

(1) si $x \neq 0$, $\mathcal{B}_x = \{(x - \varepsilon, x + \varepsilon) : \varepsilon > 0\}$,

(2) $\mathcal{B}_0 = \{B_{\varepsilon,n} : \varepsilon > 0, n \in \mathbb{N}\}$, donde $B_{\varepsilon,n} = (-\infty, -n) \cup (-\varepsilon, \varepsilon) \cup (n, \infty)$.

Probar que $\{\mathcal{B}_x\}_{x\in\mathbb{R}}$ es un sistema fundamental de entornos, que define una topología τ_{lac} sobre $\mathbb{R}$. El par $(\mathbb{R}, \tau_{lac})$ se llama *recta enlazada*. Comparar τ_{lac} con la topología usual de $\mathbb{R}$ y estudiar si es T_1 o T_2.

23.- Sobre $\mathbb{R}$ se considera:

1) si $x \neq 0$, $\mathcal{B}_x = \{(x - \varepsilon, x + \varepsilon) : \varepsilon > 0\}$, 2) $\mathcal{B}_0 = \{(-\varepsilon, \varepsilon) - \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} : \varepsilon > 0\}$.

Comprobar que $\{\mathcal{B}_x\}_{x\in\mathbb{R}}$ es un sistema fundamental de entornos, comparar la topología generada con τ_u y estudiar si es T_1 o T_2.

24.- Determinar si en $(\mathbb{R}, \tau_u)$ los siguientes intervalos son entornos de 0: $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, $(-1, 0]$, $[0, \frac{1}{2})$ y $(0, 1]$. Probar que los conjuntos $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{I}$ no pueden ser entornos de ningún punto.

25.- Para $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$, el semiplano superior cerrado, se considera:

(1) $\mathcal{B}_{(x,y)} = \{B_{us}((x, y), \varepsilon) \subset \Gamma : \varepsilon > 0$ “pequeño”$\}$, para $(x, y) \in \Gamma$, $y \neq 0$,

(2) $\mathcal{B}_{(x,0)} = \{\{(x, 0)\} \cup \{B_{us}((x, \varepsilon), \varepsilon) : \varepsilon > 0\}$.

Probar que $\{\mathcal{B}_{(x,y)}\}_{(x,y)\in\Gamma}$ es un sistema fundamental de entornos, que define una topología τ_{moo} sobre Γ. El par (Γ, τ_{moo}) se llama *plano de Moore*. Comparar τ_{moo} con la topología euclídea sobre Γ y estudiar si es T_1 o T_2.

26.- Se considera $\mathbb{R}^{[0,1]} = \{f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}\}$, y:

(i) se define $U(f, F, \delta) = \{g \in \mathbb{R}^{[0,1]} : \forall x \in F, |f(x) - g(x)| < \delta\}$, para $f \in \mathbb{R}^{[0,1]}$, $F \subset [0, 1]$ finito y $\delta > 0$. Probar que $\{U(f, F, \delta) : F \subset [0, 1]$ finito$, \delta > 0\}$ forma una base de entornos en f para una topología, τ_{tyc}, sobre $\mathbb{R}^{[0,1]}$, que se denomina *topología de Tychonof*;

(ii) para $f \in \mathbb{R}^{[0,1]}$ y $\varepsilon > 0$, sea $V(f, \varepsilon) = \{g \in \mathbb{R}^{[0,1]} : \forall x \in [0, 1], |g(x) - f(x)| < \varepsilon\}$. Verificar que $\{V(f, \varepsilon) : \varepsilon > 0\}$ forma una base de entornos en f para una topología, τ_{ca} sobre $\mathbb{R}^{[0,1]}$, llamada *topología caja*;

(iii) comparar τ_{tyc} y τ_{ca} y estudiar si son T_1 o T_2.

27.- Sean $L_n = \{(x, \frac{1}{n}) : x \in [0,1)\}$ si $n > 0$, $L_0 = \{(x,0) : x \in (0,1)\}$ y $X = \bigcup_{n=0}^{\infty} L_n$. Se considera:

(1) si $n \in \mathbb{N}$ y $x \neq 0$, $\mathcal{B}_{(x,\frac{1}{n})} = \{(x, \frac{1}{n})\}$,

(2) $\mathcal{B}_{(0,\frac{1}{n})} = \{U \subset L_n : (0, \frac{1}{n}) \in U, L_n - U$ es finito$\}$,

(3) $\mathcal{B}_{(x,0)} = \{\{(x,0)\} \cup \{(x, \frac{1}{n}) : n > 0\}\}$.

Comprobar que $\{\mathcal{B}_{(x,y)}\}_{(x,y)\in X}$ es un sistema fundamental de entornos sobre X.

28.- Sea $X = [0,1] \cup \{1^*\}$, donde 1^* es un punto añadido a $[0,1]$, tal que $x < 1^*$ para cada $x \in [0,1)$. Para cada $x \in [0,1]$, los entornos básicos son los entornos usuales de x; los entornos básicos de 1^* son los conjuntos de la forma $(a,1) \cup \{1^*\}$, donde $a \in [0,1)$. Demostrar que definen una topología τ sobre X.

29.- Dadas dos familias de números reales $\{a_i\}_{i=1}^n$, $\{b_i\}_{i=1}^n$, se pide demostrar:

(i) la *desigualdad de Cauchy-Schwartz*:

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i b_i) \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2},$$

(ii) la *desigualdad de Minkowski*:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}.$$

(iii) comprobar la desigualdad triangular en el caso de la distancia euclídea (ver los ejemplos 2.9).

30.- Un espacio (X,τ) se dice:

(i) *primero numerable* o C_I, si todo punto posee una base local contable;

(ii) *segundo numerable* o C_{II}, si existe una base contable β de τ.

Se pide probar:

(i) (X,τ) es C_I si para cada $x \in X$, existe una base local contable y decreciente;

(ii) si (X,τ) es C_{II}, entonces es C_I;

(iii) estudiar si son C_I o C_{II}: (X,τ_{ind}), (X,τ_{dis}), $(\mathbb{R},\tau_{cof})$, $(\mathbb{R},\tau_{coc})$, (X,τ_A), (X,τ^A), $(\mathbb{R},\tau_{sor})$, $(\mathbb{R},\tau_{kol})$, $(\mathbb{R},\tau_{sca})$, los espacios métricos, etc.

Conjuntos en espacios topológicos

Los labios son mímica
que los brazos sujetan.
Lo que las palabras abrazan
en las palabras se queda.

“Pido la palabra”
Mikel Varas

3.1. Interior de un conjunto

En (X, τ), si $A \subset X$, A no tiene porque ser un conjunto abierto, pero siempre contiene conjuntos abiertos: por lo menos el conjunto vacío $\emptyset$. Por ello, tiene sentido definir:

Definición 3.1. Dado (X, τ) y $A \subset X$, el *interior* de A es el conjunto

$$\overset{\circ}{A} = \bigcup \{U \subset X : U \in \tau \text{ y } U \subset A\}.$$

Si $x \in \overset{\circ}{A}$, se dice que x es un *punto interior* de A.

Lema 3.1. *En (X, τ), si $A \subset X$, es $\overset{\circ}{A} \in \tau$ y además $\overset{\circ}{A}$ es el mayor conjunto abierto contenido en A.*

Ejemplos 3.1. Para los ejemplos ya estudiados, tenemos:

1) en (X, τ_{ind}), para todo $A \neq X$, es $\overset{\circ}{A} = \emptyset$ y $\overset{\circ}{X} = X$;

2) en (X, τ_{dis}), para todo $A \subset X$, es $\overset{\circ}{A} = A$;

3) en $(X = \{a, b\}, \tau_{sier})$, $\overset{\circ}{\{b\}} = \emptyset$ y $\overset{\circ}{\{a\}} = \{a\}$;

4) en (X, τ_A), si $B \notin \tau_A$, es $\overset{\circ}{B} = \emptyset$;

5) en (X, τ^A), si $B \notin \tau^A$, es $\overset{\circ}{B} = B - A$;

6) en (X, τ_{cof}), si $A \notin \tau_{cof}$, es $\overset{\circ}{A} = \emptyset$;

7) en (X, τ_{coc}), si $A \notin \tau_{coc}$, es $\overset{\circ}{A} = \emptyset$;

8) en $(\mathbb{R}, \tau_{kol})$, si A está acotado superiormente, es $\overset{\circ}{A} = \emptyset$;

9) en $(\mathbb{R}, \tau_{sca})$, para $\overset{\circ}{A} = (A \cap \mathbb{I}) \cup (\overset{\circ}{A}^{u} \cap \mathbb{Q})$.

Lema 3.2. *En (X, τ), si $A \subset B$, entonces $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$.*

Teorema 3.3. *En (X, τ), se verifican las siguientes propiedades:*

(I1) para todo $A \subset X$, es $\overset{\circ}{A} \subset A$;

(I2) para todo $A \subset X$, es $\overset{\circ}{\overset{\circ}{A}} = \overset{\circ}{A}$;

(I3) para todo $A, B \subset X$, es $\overset{\circ}{\overbrace{A \cap B}} = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$;

(I4) $\overset{\circ}{X} = X$; y además

(I5) $U \in \tau$ si y sólo si $\overset{\circ}{U} = U$.

Y recíprocamente, dada una aplicación $Int \colon \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$, que verifica (I1) a (I4), y si se define el concepto de conjunto abierto usando (I5), queda definida una topología τ sobre X, para la cual Int es el operador interior.

Demostración: Para la segunda parte, hay que probar que $\tau = \{U \subset X : Int(U) = U\}$ es una topología sobre X. Para demostrar la última parte, $Int(A) \in \tau$ por (I2) y como $Int(A) \subset A$ por (I1), se concluye que $Int(A) \subset \overset{\circ}{A}$ aplicando el lema 3.1. Por otro lado, si $U \in \tau$ y $U \subset A$, es $U = Int(U) \subset Int(A)$ por (I3), luego $\overset{\circ}{A} \subset Int(A)$. ∎

Se puede caracterizar el interior de un conjunto a través de un sistema fundamental de entornos:

Proposición 3.4. *Sea $\{\mathcal{B}_x\}_{x \in X}$ un sistema fundamental de entornos en (X, τ), entonces es $x \in \overset{\circ}{A}$ si y sólo si existe $B \in \mathcal{B}_x$ tal que $B \subset A$.*

El interior de cualquier entorno es no vacío:

Lema 3.5. *En* (X,τ)*,* $N \in \mathcal{N}_x$ *si y sólo si* $\overset{\circ}{N} \in \mathcal{N}_x$*. En particular, un entorno no puede tener interior vacío.*

3.2. Clausura de un conjunto

Un conjunto A en un espacio (X,τ) no tiene porque ser cerrado. Pero siempre existen cerrados que lo contienen: por lo menos, el total X. Por esta razón tiene sentido definir:

Definición 3.2. Sea (X,τ) y $A \subset X$. La *clausura* de A es el conjunto:

$$\overline{A} = \bigcap \{F \subset X : F \text{ cerrado y } A \subset F\}.$$

Si $x \in \overline{A}$, x se llama punto *clausura* o *adherente* de A.

Lema 3.6. *Sean* (X,τ) *y* $A \subset X$*.* $\overline{A}$ *es un conjunto cerrado, y además es el menor cerrado que contiene a* A*.*

Ejemplos 3.2. En los ejemplos ya estudiados, tenemos:

1) en (X,τ_{ind}), para todo $A \neq \emptyset$, es $\overline{A} = X$;

2) en (X,τ_{dis}), para todo $A \subset X$, es $\overline{A} = A$;

3) en $(X = \{a,b\},\tau_{sier})$, $\overline{\{b\}} = \{b\}$ y $\overline{\{a\}} = X$;

4) en (X,τ_A), si $B \not\in \mathcal{C}_A$, es $\overline{B} = X$;

5) en (X,τ^A), si $B \not\in \mathcal{C}^A$, es $\overline{B} = B \cup A$;

6) en (X,τ_{cof}), si A es infinito, es $\overline{A} = X$;

7) en (X,τ_{coc}), si A no es contable, es $\overline{A} = X$;

8) en $(\mathbb{R},\tau_{kol})$, si A no está acotado superiormente, es $\overline{A} = X$;

9) en $(\mathbb{R},\tau_{sca})$, para $\overline{A} = (A - \mathbb{Q}) \cup (\overline{A}^{us} \cap \mathbb{Q})$.

Lema 3.7. *En* (X,τ)*, si* $A \subset B$*, entonces* $\overline{A} \subset \overline{B}$*.*

Teorema 3.8. *En* (X,τ)*, se verifican las siguientes propiedades:*

(C1) para todo $A \subset X$*, es* $A \subset \overline{A}$*;*

(C2) para todo $A \subset X$, *es* $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$;

(C3) para todo $A, B \subset X$, *es* $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;

(C4) $\overline{\emptyset} = \emptyset$; *y además*

(C5) $F \in \mathcal{C}$ *si y sólo si* $\overline{F} = F$.

Y recíprocamente, dada una aplicación $Cl \colon \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$, *que verifica (C1) a (C4) (es decir, lo que habitualmente se denomina un operador clausura de Kuratowski), si se define el concepto de conjunto cerrado usando (C5), queda definida una topología* τ *sobre* X, *para la cual* Cl *es el operador clausura.*

Demostración: La primera parte es una simple comprobación. Para la segunda parte, basta con probar que $\mathcal{F} = \{A \subset X : Cl(A) = A\}$ es la familia de cerrados para una topología τ sobre X. Entonces, $U \in \tau$ si y sólo si $X - U \in \mathcal{F}$. Por (C2), es $Cl(A) = Cl(Cl(A))$, luego $Cl(A) \in \mathcal{F}$ y como $A \subset Cl(A)$, se deduce que $\overline{A} \subset Cl(A)$ por el lema 3.6. Y si $A \subset F \in \mathcal{C}$, es $Cl(A) \subset Cl(F) = F$, por (C3), luego $Cl(A) \subset \overline{A}$. ∎

Se puede caracterizar la clausura de un conjunto a través de un sistema fundamental de entornos:

Proposición 3.9. *Sea* $\{\mathcal{B}_x\}_{x \in X}$ *un sistema fundamental de entornos en* (X, τ), *entonces es* $x \in \overline{A}$ *si y sólo si para cada* $B \in \mathcal{B}_x$ *es* $B \cap A \neq \emptyset$.

Los conceptos de interior y clausura son duales (no opuestos), como las nociones de abierto y cerrado:

Proposición 3.10. *Sea* (X, τ) *y* $A \subset X$, *entonces es* $X - \overset{\circ}{A} = \overline{X - A}$ *y* $X - \overline{A} = \overset{\circ}{\overbrace{X - A}}$.

Definición 3.3. Un conjunto D es *denso* en (X, τ), si $\overline{D} = X$, es decir, si es *topológicamente grande*.

Lema 3.11. *Un conjunto* D *es denso en* (X, τ), *si verifica cualquiera de las propiedades equivalentes siguientes:*

(i) D *corta a cualquier abierto no vacío;*

(ii) si $F \in \mathcal{C}$ *y* $D \subset F$, *es* $F = X$;

(iii) D *corta a cualquier abierto básico no vacío;*

(iv) D *corta a cualquier entorno de cualquier punto;*

(v) D *corta a cualquier entorno básico de cualquier punto.*

3.3. Puntos de acumulación y puntos aislados. Conjunto derivado

Definición 3.4. Fijado un sistema fundamental de entornos $\{\mathcal{B}_x\}_{x\in X}$ en (X,τ), $x \in X$ es un *punto de acumulación* de $A \subset X$, si para cada $B \in \mathcal{B}_x$, es $(B - \{x\}) \cap A \neq \emptyset$. Al conjunto de los puntos de acumulación de A se le llama *conjunto derivado* de A y se denota por A'. Si $x \in A - A'$, se dice que x es un *punto aislado* de A.

Teorema 3.12. *En (X,τ), se verifican las siguientes propiedades:*

(i) si $A \subset B$, es $A' \subset B'$;

(ii) para todo $A, B \subset X$, es $(A \cup B)' = A' \cup B'$;

(iii) $\emptyset' = \emptyset$;

(iv) $\overline{A} = A \cup A'$;

(v) $F \in \mathcal{C}$ si y sólo si $F' \subset F$.

Observación 3.1. Por la propiedad (v) del teorema 3.12, un conjunto con derivado vacío es cerrado.

Ejemplos 3.3. Para los ejemplos anteriores, tenemos:

1) en (X,τ_{ind}), para todo $A \neq \emptyset$ con más de un punto, es $A' = X$ y para $x \in X$, es $\{x\}' = X - \{x\}$;

2) en (X,τ_{dis}), para todo $A \subset X$, es $A' = \emptyset$;

3) en $(X = \{a,b\},\tau_{sier})$, $\{b\}' = \emptyset$ y $\{a\}' = \{b\}$;

4) en (X,τ_A), si $B \notin \mathcal{C}_A$, es $B' = X - \{x\}$ cuando $A \cap B = \{x\}$ y $B' = X$ en otro caso. Y si $B \in \mathcal{C}_A$, entonces $B' = \emptyset$;

5) en (X,τ^A), si B tiene más de un punto, es $B' = A$ y si $B = \{x\}$, es $B' = A - \{x\}$;

6) en (X,τ_{cof}), si A es infinito, $A' = X$ y si A es finito, $A' = \emptyset$;

7) en (X,τ_{coc}), si A es no contable, $A' = X$ y si A es contable, $A' = \emptyset$;

8) en $(\mathbb{R},\tau_{sca})$, para $A \subset \mathbb{R}$ y con las notaciones obvias, es $A' = A'^{u} \cap \mathbb{Q}$.

3.4. Frontera de un conjunto

Definición 3.5. En (X,τ), la *frontera* de $A \subset X$ es el conjunto $fr(A) = \overline{A} \cap \overline{X - A}$. Si $x \in fr(A)$ se dice que x es un *punto frontera* de A.

Lema 3.13. *En (X,τ), si $A \subset X$, $fr(A)$ es un conjunto cerrado.*

Teorema 3.14. *En (X,τ), si $A \subset X$, se verifican las siguientes propiedades:*

(i) $fr(A) = fr(X - A)$*;*

(ii) $fr(\emptyset) = fr(X) = \emptyset$*;*

(iii) $\overline{A} = A \cup fr(A) = \overset{\circ}{A} \cup fr(A)$*;*

(iv) $fr(A) = \overline{A} - \overset{\circ}{A}$ *y* $\overset{\circ}{A} = A - fr(A)$*;*

(v) $X = \overset{\circ}{A} \cup fr(A) \cup (X - \overline{A})$ *y esta unión es disjunta;*

(vi) A *es abierto si y sólo si* $fr(A) \cap A = \emptyset$*;*

(vii) A *es cerrado si y sólo* $fr(A) \subset A$*.*

Ejemplos 3.4. Para los ejemplos conocidos, se verifica:

1) en (X,τ_{ind}), para todo $A \subset X$ propio, es $fr(A) = X$;

2) en (X,τ_{dis}), para todo $A \subset X$, es $fr(A) = \emptyset$;

3) en $(X = \{a,b\},\tau_{sier})$, $fr(\{b\}) = \{b\}$ y $fr(\{a\}) = \{b\}$;

4) en (X,τ_A), si $B \subset X$ es propio, $fr(B) = B$ si $B \in \mathcal{C}_A$, $fr(B) = X - B$ si $B \in \tau_A$ y $fr(B) = X$ en caso contrario;

5) en (X,τ^A), si $B \subset X$ es propio, es $fr(B) = A$;

6) en (X,τ_{cof}), para X infinito, $fr(A) = X - A$ si $A \in \tau_{cof}$, $fr(A) = A$ si $A \in \mathcal{C}_{cof}$ y $fr(A) = X$ en caso contrario;

7) en (X,τ_{coc}), para X no contable, $fr(A) = X - A$ si $A \in \tau_{coc}$, $fr(A) = A$ si $A \in \mathcal{C}_{coc}$ y $fr(A) = X$ en caso contrario;

8) en $(\mathbb{R},\tau_{sca})$, para $A \subset \mathbb{R}$, es $fr(A) = (\overline{B}^u \cap \mathbb{Q}) - (\overset{\circ}{B}{}^u \cap \mathbb{Q})$.

3.5. Problemas

1.- Sea (X, τ) un espacio topológico, $A, B \subset X$ y $\{A_i \subset X\}_{i\in I}$. Probar:

(i) $x \in A'$ si y sólo si $x \in \overline{A - \{x\}}$;

(ii) si $A \cup B = X$, entonces $\overline{A} \cup \overset{\circ}{B} = X$; (iii) si $A \cap B = \emptyset$, entonces $\overline{A} \cap \overset{\circ}{B} = \emptyset$;

(iv) $A \in \tau$ si y sólo si $\big(\forall B \subset X,\ \text{es } A \cap B = \emptyset \Longleftrightarrow A \cap \overline{B} = \emptyset\big)$;

(v) $A \in \tau$ si y sólo si $A \cap \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$, para cada $B \subset X$. Y entonces, $\overline{\overline{B} \cap A} = \overline{B \cap A}$;

(vi) $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$, $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \subset \overset{\circ}{\overbrace{A \cup B}}$, $(A \cap B)' \subset A' \cap B'$, $\overline{A} - \overline{B} \subset \overline{A - B}$ y $\overset{\circ}{A} - \overset{\circ}{B} \supset \overset{\circ}{\overbrace{A - B}}$;

(vii) $\bigcup\limits_{i\in I} \overset{\circ}{A_i} \subset \overset{\circ}{\overbrace{\bigcup\limits_{i\in I} A_i}}$, $\bigcap\limits_{i\in I} \overset{\circ}{A_i} \supset \overset{\circ}{\overbrace{\bigcap\limits_{i\in I} A_i}}$, $\bigcup\limits_{i\in I} \overline{A_i} \subset \overline{\bigcup\limits_{i\in I} A_i}$, $\bigcap\limits_{i\in I} \overline{A_i} \supset \overline{\bigcap\limits_{i\in I} A_i}$, $\bigcup\limits_{i\in I} A_i' \subset (\bigcup\limits_{i\in I} A_i)'$ y $\bigcap\limits_{i\in I} A_i' \supset (\bigcap\limits_{i\in I} A_i)'$;

(viii) ¿pueden dos conjuntos diferentes poseer el mismo conjunto derivado? ¿el mismo interior? ¿la misma clausura? ¿la misma frontera? ¿y los cuatro a la vez?

2.- Sea X un conjunto y τ_1, τ_2 dos topologías sobre X, tales que $\tau_2 \subset \tau_1$. Con las notaciones obvias, probar que para cada $A \subset X$, se tiene $\overset{\circ}{A}^{2} \subset \overset{\circ}{A}^{1}$ y $\overline{A}^{1} \subset \overline{A}^{2}$. ¿Se pueden comparar sus operadores derivados?

3.- Sea (X, τ) un espacio topológico. Probar:

(i) $\overset{\circ}{A} = \{x \in X : A \in \mathcal{N}_x\}$;

(ii) si X no posee puntos aislados y $A \subset X$ es abierto, entonces A no posee puntos aislados;

(iii) si $x \in A$ es aislado en $\overline{A}$, entonces x es aislado en A. ¿Es cierto el recíproco?

(iv) si (X, τ) es T_1 y $x \in A'$, entonces A corta a cada entorno de x en un número infinito de puntos y el conjunto A' es cerrado;

(v) $x \in \overline{\{y\}}$ si y sólo si $\mathcal{N}_x \subset \mathcal{N}_y$. Luego, $\mathcal{N}_x = \mathcal{N}_y$, si y sólo si $\overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$;

(vi) (X,τ) es T_2 si y sólo si para cada $x \in X$, $\{x\} = \bigcap_{N \in \mathcal{N}_x} \overline{N}$.

4.- En (X,τ), un abierto A se llama *regular*, si $A = \overset{\circ}{\overline{A}}$ y un cerrado A se llama *regular* si $A = \overline{\overset{\circ}{A}}$. Probar:

(i) si A es cerrado (respectivamente, abierto), entonces $\overset{\circ}{A}$ (respectivamente, $\overline{A}$) es un abierto regular (respectivamente, un cerrado regular);

(ii) A es abierto regular si y sólo si $X - A$ es cerrado regular;

(iii) si A y B son abiertos regulares (respectivamente, cerrados regulares), es $A \subset B$ si y sólo si $\overline{A} \subset \overline{B}$ (respectivamente, $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$);

(iv) si A y B son abiertos regulares (respectivamente, cerrados regulares), entonces $A \cap B$ (respectivamente, $A \cup B$) es abierto regular (respectivamente, cerrado regular). En general $A \cup B$ (respectivamente, $A \cap B$) no es abierto regular (respectivamente, cerrado regular);

(v) en $(\mathbb{R},\tau_u)$, hay abiertos que no son regulares.

5.- Sea (X,τ) un espacio topológico y $A, B \subset X$. Se pide probar:

(i) $fr(A) = \emptyset$ si y sólo si A es abierto y cerrado a la vez;

(ii) $fr(\overset{\circ}{A}) \subset fr(A)$ y $fr(\overline{A}) \subset fr(A)$;

(iii) si $A \subset B$, ¿es $fr(A) \subset fr(B)$?;

(iv) si $fr(A) \cap fr(B) = \emptyset$, se verifica que $\overset{\circ}{\overbrace{A \cup B}} = \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}$, $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ y $fr(A \cap B) = (\overline{A} \cap fr(B)) \cup (fr(A) \cap \overline{B})$;

(v) en general, $fr(A \cup B) \subset fr(A) \cup fr(B)$. Si $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$, entonces se da la igualdad.

6.- Construir una tabla (con seis entradas) en que se relacionen los conceptos de conjunto abierto, cerrado, interior, clausura, frontera y entorno.

7.- Sea D denso en (X,τ). Probar:

(i) si $U \in \tau$, entonces $U \subset \overline{D \cap U}$; (ii) si $E \supset D$, entonces E es también denso;

(iii) si U es denso y abierto, entonces $D \cap U$ es denso;

(iv) la intersección finita de abiertos densos es abierto denso;

(v) si $\tau' \subset \tau$, entonces D también es denso en (X, τ').

8.- Sean $G_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > y + k\}$ y la topología $\tau = \{\emptyset, \mathbb{R}^2\} \cup \{G_k : k \in \mathbb{R}\}$. Calcular el interior, el derivado y la clausura de $\{(0, 0)\}$ y $\{(-x, x) : x \in \mathbb{R}\}$.

9.- En $([0, 1] \times [0, 1], \tau_{ord})$, donde la topología está inducida por el orden lexicográfico, calcular el interior, la clausura y la frontera de $\{(\frac{1}{n}, 0) : n \in \mathbb{N}\}$, $\{(1 - \frac{1}{n}, \frac{1}{2}) : n \in \mathbb{N}\}$, $\{(x, 0) : 0 < x < 1\}$, $\{(x, \frac{1}{2}) : 0 < x < 1\}$ y $\{(\frac{1}{2}, y) : 0 < y < 1\}$.

10.- Sea $(\mathbb{N}, \tau_{ap})$ la topología de Appert. Caracterizar sus operadores interior y clausura.

11.- En (X, τ), se dice que A es:

(a) un F_σ-*conjunto*, si es la unión de una familia contable de conjuntos cerrados y

(b) un G_δ-*conjunto* si es la intersección de una familia contable de conjuntos abiertos.

Se pide probar:

(i) todo cerrado es un F_σ-conjunto y todo abierto es un G_δ-conjunto;

(ii) en $(\mathbb{R}, \tau_u)$, $[0, 1]$ es un F_σ-conjunto y un G_δ-conjunto;

(iii) en $(\mathbb{R}, \tau_u)$, $\mathbb{Q}$ es un F_σ-conjunto, pero no es un G_δ-conjunto;

(iv) si A es un F_σ-conjunto, existe una familia contable de cerrados $\{F_n : n \in \mathbb{N}\}$, tal que $F_k \subset F_{k+1}$ para cada $k \in \mathbb{N}$, y de forma que $A = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} F_n$;

(v) si A es un G_δ-conjunto, existe una familia contable de abiertos $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$, tal que $U_k \supset U_{k+1}$ para cada $k \in \mathbb{N}$, y de forma que $A = \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} U_n$;

(vi) la unión contable y la intersección finita de F_σ-conjuntos, es un F_σ-conjunto;

(vii) la unión finita y la intersección contable de G_δ-conjuntos, es un G_δ-conjunto;

(viii) el complementario de un F_σ-conjunto es un G_δ-conjunto y viceversa;

(ix) ¿quiénes son los G_δ-conjuntos en $(\mathbb{R}, \tau_{cof})$?;

(x) en $(\mathbb{R}, \tau_{coc})$, todo F_σ-conjunto es cerrado y todo G_δ-conjunto es abierto;

(xi) en el espacio métrico (X,d), todo cerrado es un G_δ-conjunto y todo abierto es un F_σ-conjunto.

12.- Sea X un conjunto y una función $\Phi\colon \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$, tal que:

(a) para cada $A \subset X$, $A \subset \Phi(A)$;

(b) para cada $A, B \subset X$, $\Phi(A \cup B) = \Phi(A) \cup \Phi(B)$;

(c) $\Phi(\emptyset) = \emptyset$;

(d) para cada $A \subset X$, $\Phi(\Phi(A)) = \Phi(A)$.

Una tal aplicación se llama un *operador clausura de Kuratowski*. Se pide probar:

(i) si se definen los cerrados como los $A \subset X$ tales que $A = \Phi(A)$, queda definida una topología sobre X, cuyo operador clausura es precisamente Φ;

(ii) si X es infinito y se define $\Phi(A) = A$ si A es finito y $\Phi(A) = X$ si A es infinito. Comprobar que es un operador clausura de Kuratowski, y ver que topología genera;

(iii) lo mismo si $X = \mathbb{R}$ y $\Phi(A) = (-\infty, \sup(A)]$;

(iv) lo mismo si para $B \subset X$, $\Phi(A) = A \cup B$, si A es no vacío. Describir los casos en que $B = \emptyset$ y $B = X$;

(v) lo mismo si $X = \mathbb{R}$ y $\Phi(A) = \overline{A}^{us}$ si A está acotado y $\Phi(A) = \overline{A}^{u} \cup \{0\}$ si A no está acotado;

(v) sean Φ_1 y Φ_2 dos operadores clausura de Kuratowski sobre X y sean τ_1 y τ_2 las topologías generadas por ellos. Con las notaciones obvias, se supone que para cada $A \subset X$, es $\Phi_2(\Phi_1(A)) \in \mathcal{C}_1$. Se pide probar:

(a) $\Phi_2 \circ \Phi_1$ es un operador clausura de Kuratowski;

(b) $\Phi_2 \circ \Phi_1(A) = \bigcap \{F \subset X : A \subset F, F \in \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2\}$;

(c) $\Phi_1 \circ \Phi_2(A) \subset \Phi_2 \circ \Phi_1(A)$, para cada $A \subset X$.

13.- Sea X un conjunto y una función $\varphi\colon \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$, tal que:

(a) para cada $A \subset X$, $A \supset \varphi(A)$;

(b) para cada $A, B \subset X$, $\varphi(A \cap B) = \varphi(A) \cap \varphi(B)$;

(c) $\varphi(X) = X$;

(d) para cada $A \subset X$, $\varphi(\varphi(A)) = \varphi(A)$.

Una tal aplicación se llama un *operador interior*. Se pide probar:

(i) $\tau_\varphi = \{A \subset X : A = \varphi(A)\}$ es una topología sobre X, cuyo operador interior es precisamente φ;

(ii) si X es infinito y se define $\varphi(A) = A$ si $X - A$ es finito y $\varphi(A) = \emptyset$ en otro caso. Comprobar que se trata de un operador interior, y ver que topología genera;

(iii) lo mismo si $X = \mathbb{R}$ y $\varphi(A) = (\sup(\mathbb{R} - A), \infty)$;

(iv) lo mismo si para $B \subset X$, $\varphi(A) = A \cap (X - B)$, si $A \neq X$. Describir los casos en que $B = \emptyset$ y $B = X$.

14.- Sea (X, τ) un espacio topológico. Una familia de conjuntos $\{A_i : i \in I\}$ se llama *localmente finita*, si cada $x \in X$ posee un entorno que corta sólo a una cantidad finita de los elementos de la familia. Se pide probar:

(i) si $\{A_i : i \in I\}$ es localmente finita, también lo es la familia $\{\overline{A_i} : i \in I\}$;

(ii) si $\{A_i : i \in I\}$ es localmente finita, $\bigcup\limits_{i \in I} \overline{A_i} = \overline{\bigcup\limits_{i \in I} A_i}$;

(iii) la unión de una familia localmente finita de cerrados, es un conjunto cerrado;

(iv) si la familia de conjuntos $\{A_i : i \in I\}$ verifica que $\bigcup\limits_{i \in I} \overline{A_i} \in \mathcal{C}$, probar que entonces es $\bigcup\limits_{i \in I} \overline{A_i} = \overline{\bigcup\limits_{i \in I} A_i}$.

15.- Sea $(\mathbb{N}, \tau)$ el espacio topológico del problema 15 en el apartado 2.7. Calcular el interior, el derivado y la clausura de los conjuntos $\{n, n+1, \ldots, n+p\}$ y $\{2n : n \in \mathbb{N}\}$. Caracterizar los operadores clausura e interior.

16.- Sea (X, τ) el espacio topológico del problema 16 del apartado 2.7. Calcular el interior, el derivado y la clausura de $\{f \in X : f(0) = 0\}$ y $\{f \in X : f(0) = 1\}$. Caracterizar el operador clausura en este espacio.

17.- Sea $(\mathbb{Z}, \tau)$ el espacio topológico del problema 13 del apartado 2.7. Calcular el interior, la clausura y el derivado del conjunto de los números primos, $\mathbb{N}$ y el conjunto de los números pares.

18.- Sea (X, τ) el espacio topológico del problema 27 en el apartado 2.7. Calcular el interior, el derivado y la clausura de los conjuntos $\{(\frac{1}{2}, \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\}$, $\{(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) : n > 1\}$ y $\{(x, 1) : 0 \leq x < \frac{1}{2}\} \cup \{(\frac{1}{2}, 0)\}$.

19.- Sea el espacio métrico $([0,1], d_u)$. Se divide $[0,1]$ en tres intervalos de la misma amplitud, se elimina el intervalo abierto central (que se llamará intervalo abierto de tipo 1) $\delta = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ y se conservan los intervalos cerrados (que se llamarán de tipo 1) $\Delta_0 = [0, \frac{1}{3}]$ y $\Delta_1 = [\frac{2}{3}, 1]$. Se divide cada intervalo cerrado de tipo 1 en tres intervalos de la misma amplitud. Se eliminan de nuevo los intervalos abiertos centrales (intervalos abiertos de tipo 2), $\delta_0 = (\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$ y $\delta_1 = (\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$ respectivamente, y se conservan los intervalos cerrados (de tipo 2) resultantes $\Delta_{00} = [0, \frac{1}{9}]$, $\Delta_{01} = [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}]$, $\Delta_{10} = [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}]$ y $\Delta_{11} = [\frac{8}{9}, 1]$. Se continúa de este modo el proceso, obteniendo para cada $n \in \mathbb{N}$, 2^n intervalos cerrados $\Delta_{i_1 \cdots i_n}$ de tipo n donde i_j es 0 ó 1. Cada intervalo cerrado de tipo n se divide en tres partes de la misma amplitud, conservando dos intervalos cerrados $\Delta_{i_1 \cdots i_n 0}$ y $\Delta_{i_1 \cdots i_n 1}$ (llamados intervalos cerrados de tipo $n+1$) y eliminando cada intervalo abierto $\delta_{i_1 \cdots i_n}$ de tipo $n+1$ que queda entre ellos.
Sea C_n la reunión de los intervalos cerrados de tipo n y $C = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n$. C se llama *conjunto perfecto de Cantor, discontinuo de Cantor* o *conjunto ternario de Cantor*. Se pide probar:

(i) C es cerrado y no vacío en $([0,1], d_u)$;

(ii) la suma de las longitudes de todos los intervalos abiertos eliminados en el proceso es 1: en este sentido (el de la *medida*), el conjunto de Cantor es pequeño;

(iii) todo punto de C posee una representación ternaria única $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$ donde $a_n = 0, 2$. Se concluye que C es un conjunto no contable: en este sentido (el del *cardinal*), el conjunto de Cantor es grande;

(iv) C no posee puntos aislados en $[0,1]$ y $\overset{\circ}{C} = \emptyset$.

20.- Un espacio (X, τ) se dice *separable* si existe $D \subset X$ denso y contable. Probar que si (X, τ) es C_{II}, es separable. Estudiar la separabilidad en los ejemplos del ejercicio 30 del apartado 2.7, y comprobar que no existen relaciones entre los conceptos de C_I y la separabilidad.

Continuidad

Nunca podré decidir lo que es arriba
lo que es abajo
si yo soy la manzana,
¿quién me estará mirando para saberme,
para entender el universo a partir de mi caída?

Alicia Newton en "Alicia Volátil"
Sofía Rhei

4.1. Aplicaciones continuas

Definición 4.1. Una función entre espacios topológicos $f\colon (X,\tau_X)\longrightarrow(Y,\tau_Y)$ es *continua* en a, si para todo entorno $M\in\mathcal{N}^Y_{f(a)}$, existe $N\in\mathcal{N}^X_a$, tal que $f(N)\subset M$. Esta definición sigue siendo válida si se reemplazan los entornos por entornos básicos. Una función es *continua en* A si lo es en cada punto de A.

Proposición 4.1. *Sea $f\colon (X,\tau_X)\longrightarrow(Y,\tau_Y)$ una función. Son equivalentes:*

(i) f es continua en X;

(ii) para cada $x\in X$ y cada entorno $M\in\mathcal{N}^Y_{f(x)}$, es $f^{-1}(M)\in\mathcal{N}^X_x$;

(iii) para cada $x\in X$ y cada $M\in\mathcal{B}^Y_{f(x)}$ (fijada una base local), es $f^{-1}(M)\in\mathcal{N}^X_x$;

(iv) para cada $U\in\tau_Y$, es $f^{-1}(U)\in\tau_X$;

(v) para cada $U\in\beta_Y$ (una vez elegida una base), es $f^{-1}(U)\in\tau_X$;

(vi) para cada $F\in\mathcal{C}_Y$, es $f^{-1}(F)\in\mathcal{C}_X$;

(vii) para cada $A\subset X$, es $f(\overline{A})\subset\overline{f(A)}$;

(viii) para cada $B\subset Y$, es $f^{-1}(\overline{B})\supset\overline{f^{-1}(B)}$;

(ix) para cada $B \subset Y$, es $f^{-1}(\overset{\circ}{B}) \subset \overset{\circ}{\overbrace{f^{-1}(B)}}$.

Ejemplos 4.1. Algunos ejemplos de funciones continuas son:

1) para cada espacio (Y, τ_Y) y toda función f, $f\colon (X, \tau_{dis}) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ es continua;

2) para cada espacio (X, τ_X) y toda función f, $f\colon (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_{ind})$ es continua;

3) toda aplicación constante $f\colon (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ es continua;

4) sean $f\colon (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ continua y las topologías $\tau_X \subset \tau'_X$ y $\tau'_Y \subset \tau_Y$. También es continua la aplicación $f\colon (X, \tau'_X) \longrightarrow (Y, \tau'_Y)$.

Proposición 4.2. *Sean $f\colon (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ y $g\colon (Y, \tau_Y) \longrightarrow (Z, \tau_Z)$. Se verifica:*

(i) si f es continua en $a \in X$ y g es continua en $f(a)$, entonces $g \circ f$ es continua en a;

(ii) si f es continua en X y g es continua en Y, entonces $g \circ f$ es continua en X.

Proposición 4.3. ***(Criterio de Hausdorff de comparación de topologías)*** *Dos topologías sobre X verifican $\tau_2 \subset \tau_1$ si y sólo si la identidad, $1_X\colon (X, \tau_1) \longrightarrow (X, \tau_2)$ es continua.*

4.2. Homeomorfismos. Propiedades topológicas

Definición 4.2. Una aplicación $f\colon (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ es un *homeomorfismo*, si f es biyectiva, continua y f^{-1} es continua. Se dice que (X, τ_X) es *homeomorfo* a (Y, τ_Y).

Lema 4.4. *Si $f\colon (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ y $g\colon (Y, \tau_Y) \longrightarrow (Z, \tau_Z)$ son homeomorfismos:*

(i) $f^{-1}\colon (Y, \tau_Y) \longrightarrow (X, \tau_X)$ es un homeomorfismo;

(ii) $g \circ f\colon (X, \tau_X) \longrightarrow (Z, \tau_Z)$ es un homeomorfismo.

Corolario 4.5. *La relación "ser homeomorfos" es una relación de equivalencia sobre la familia de los espacios topológicos.*

Proposición 4.6. *Si $f\colon (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ es una función biyectiva, son equivalentes:*

(i) f es un homemorfismo;

(ii) $U \in \tau_X$ si y sólo si $f(U) \in \tau_Y$;

(iii) $F \in \mathcal{C}_X$ si y sólo si $f(F) \in \mathcal{C}_Y$;

(iv) para cada $A \subset X$, es $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$;

(v) para cada $A \subset X$, es $f(\overset{\circ}{A}) = \overset{\circ}{\overbrace{f(A)}}$;

(vi) $V \in \tau_Y$ si y sólo si $f^{-1}(V) \in \tau_X$;

(vii) $G \in \mathcal{C}_Y$ si y sólo si $f^{-1}(G) \in \mathcal{C}_X$;

(viii) para cada $B \subset Y$, es $f^{-1}(\overline{B}) = \overline{f^{-1}(B)}$;

(ix) para cada $B \subset Y$, es $f^{-1}(\overset{\circ}{B}) = \overset{\circ}{\overbrace{f^{-1}(B)}}$.

Definición 4.3. Una propiedad relativa a espacios topológicos se llama *topológica*, si se conserva bajo homeomorfismos.

Proposición 4.7. *Son topológicas las propiedades T_1, T_2, C_I, C_{II}, la separabilidad y la metrizabilidad.*

Contraejemplo 4.1. Por ejemplo, la acotación –cuando tenga sentido hablar de este concepto, lo tiene en espacios métricos– es un ejemplo de propiedad no topológica: en $(\mathbb{R}, \tau_u)$, el intervalo $(0, 1)$ y $\mathbb{R}$ son homeomorfos, el primer conjunto es acotado y el segundo no.

Observación 4.1. Desde el punto de vista de la topología, dos espacios homeomorfos son indistinguibles. La importancia de esta propiedad radica en que, cuando se trabaje con propiedades topológicas, es posible reemplazar espacios *complicados* por otros homeomorfos a ellos, pero más sencillos de manejar.

4.3. Sucesiones en espacios métricos: convergencia y continuidad secuencial

Definición 4.4. Una *sucesión* en $X \neq \emptyset$ es una aplicación $f : \mathbb{N} \longrightarrow X$. Normalmente, en vez de utilizar la notación funcional, se utiliza la notación con subíndices $f(n) = x_n$, y se habla de la sucesión f o $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. El punto x_n se llama *término* de la sucesión y $Rg(\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}) = f(\mathbb{N})$ es el *rango* de la sucesión.

Observación 4.2. Destacamos a continuación algunas propiedades relativas a sucesiones:

(i) la función f definiendo una sucesión no tiene porque ser inyectiva, y por lo tanto, en una sucesión pueden existir términos iguales;

(ii) no hay que confundir el rango con la propia sucesión: si $X = \mathbb{R}$, la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{(-1)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es la *sucesión oscilante*, cuyo rango es finito $\{-1, 1\}$;

(iii) si f es constante, es decir, existe $x \in X$ tal que $f(n) = x$ para cada $n \in \mathbb{N}$, se habla de la *sucesión constante igual a* x y en este caso $f(\mathbb{N}) = \{x\}$;

(iv) si existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq n_0$ es $x_n = x$, se habla de la *sucesión semiconstante igual a* x (que es constante si $n_0 = 1$). El rango de una sucesión semiconstante es finito, aunque el recíproco no es cierto (por ejemplo, las sucesiones oscilantes).

Definición 4.5. Una *subsucesión* $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es otra sucesión definida por $y_n = x_{\varphi(n)}$, donde $\varphi\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ es una función estrictamente creciente. Es decir, se eligen elementos de la sucesión original, sin alterar el orden.

Lema 4.8. *Si* $\varphi\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ *es una función estrictamente creciente, es* $\varphi(n) \geq n$ *para cada* $n \in \mathbb{N}$.

Lema 4.9. *Toda sucesión es una subsucesión de sí misma.*

Demostración: Basta con tomar como $\varphi\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ la función identidad. ∎

Lema 4.10. *Una subsucesión de una subsucesión de* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *sigue siendo una subsucesión de* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Demostración: La composición de funciones estrictamente crecientes es una función estrictamente creciente. ∎

Definición 4.6. Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en un espacio métrico (X, d). Se dice que $x \in X$ es *límite* de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, si para cada $\varepsilon > 0$, existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq n_\varepsilon$ es $d(x, x_n) < \varepsilon$. Se dice también que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge* a x y se denota por $\{x_n\} \to x$.

Observación 4.3. De manera equivalente: $\{x_n\} \to x$ si para cada $\varepsilon > 0$, existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq n_\varepsilon$ es $x_n \in B(x, \varepsilon)$. Esta escritura permite generalizar la definición de convergencia a espacios topológicos: $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge* a x en (X, τ), si para cada $N \in \mathcal{N}_x$, existe $n_N \in \mathbb{N}$, tal que para cada $n \geq n_N$, es $x_n \in N$ (pueden reemplazarse los entornos por entornos básicos). Pero, en espacios topológicos, las sucesiones no tienen buenas propiedades (ver problemas 35 y 36 del apartado 4.4).

Lema 4.11. *Sea* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión en* (X, d)*, tal que* $x_n \in B(x, \frac{1}{n})$*. Entonces,* $\{x_n\}$ *converge a* x.

Teorema 4.12. *Una sucesión convergente en* (X, d) *lo hace de manera única.*

Demostración: Supongamos que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a dos puntos distintos, $x \neq y$. Sea $d(x, y) = r > 0$. Por la propiedad de Hausdorff (teorema 2.13), es $B(x, \frac{r}{2}) \cap B(y, \frac{r}{2}) = \emptyset$, lo cual contradice la hipótesis de convergencia. ∎

Observación 4.4. Algunos ejemplos de sucesiones convergentes son:

(i) en cualquier espacio métrico, una sucesión semiconstante converge hacia la constante que se repite;

(ii) si (X, d) es un espacio métrico discreto y τ_d es la topología discreta, las únicas sucesiones que convergen son las semiconstantes;

(iii) las sucesiones oscilantes no convergen en ningún espacio métrico: en efecto dada la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, con $x_n = x$ para n par y $x_n = y \neq x$ para n impar, si $\{x_n\} \to z$, para $\varepsilon = \frac{1}{2}d(x, y)$ debería ser $x_n \in B(z, \varepsilon)$ para n suficientemente grande, es decir, $x, y \in B(z, \varepsilon)$, lo que es imposible.

Teorema 4.13. *En (X, d), si $\{x_n\} \to x$, cualquier subsucesión $\{x_{\varphi(n)}\} \to x$.*

Demostración: Basta con utilizar el lema 4.8. ∎

Observación 4.5. El recíproco no es cierto: en $(\mathbb{R}, d_{\mathrm{u}})$, la sucesión$\{(-1)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no converge, pero la subsucesión de los términos pares $\{(-1)^{2n}\} \to 1$.

Observación 4.6. Algunas observaciones referentes a la convergencia de sucesiones son:

(i) si en (X, d) el rango de la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es finito, existe una subsucesión constante $\{x_{\varphi(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$, luego convergente;

(ii) aunque $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sólo posea subsucesiones convergentes a un único punto, no se deduce que sea convergente: en $(\mathbb{R}, d_{\mathrm{u}})$, la sucesión $\{1, 2, 1, 3, \dots, 1, n, \dots\}$ sólo posee subsucesiones convergentes a 1, pero ella no converge;

(iii) si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ posee dos subsucesiones convergentes a puntos distintos, entonces ella no converge;

(iv) cualquier reordenación de una sucesión convergente converge al mismo punto.

Teorema 4.14. *En (X, d), es $x \in \overline{A}$ si y sólo si existe una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en A tal que $\{x_n\} \to x$.*

Demostración: Sea $x \in \overline{A}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, como $B(x, \frac{1}{n}) \cap A \neq \emptyset$, existe $x_n \in B(x, \frac{1}{n}) \cap A$. Hemos construido una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ que converge a x por el lema 4.11. La otra implicación es inmediata. ∎

Definición 4.7. Una función $f\colon (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ es *secuencialmente continua*, si dada una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en X que converge a un punto $a \in X$, entonces $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $f(a) \in Y$.

Teorema 4.15. *La aplicación* $f\colon (X,d) \longrightarrow (Y,\rho)$ *es continua en* x *si y sólo si es secuencialmente continua.*

Demostración: Si f es continua, para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(x,\varepsilon) > 0$ tal que $f(B_X(x,\delta)) \subset B_Y(f(x),\varepsilon)$. Como $\{x_n\} \to x$, para δ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq n_0$ es $x_n \in B_X(x,\delta)$, con lo que $f(x_n) \in B_Y(f(x),\varepsilon)$, y queda probado que $\{f(x_n)\} \to f(x)$. Recíprocamente, supongamos que f no es continua en x. Existe $\varepsilon > 0$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in B_X(x,\frac{1}{n}) - \{x\}$ de modo que $f(x_n) \notin B_Y(f(x),\varepsilon)$. Hemos construido de este modo una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en X que converge a x (ver lema 4.11), pero tal que $\{f(x_n)\}$ no converge a $f(x)$. ∎

4.4. Problemas

1.- Dado un espacio topológico (X,τ), se introducen los conjuntos

$$C(X) = \{f\colon (X,\tau) \longrightarrow (\mathbb{R},\tau_{us}), f \text{ continua}\} \text{ y } C^*(X) = \{f \in C(X) : f \text{ es acotada}\}.$$

Se definen las funciones con dominio X y codominio $\mathbb{R}$, para $x \in X$ y $f,g\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$

(a) la *suma*: $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$,

(b) el *producto*: $(f.g)(x) = f(x).g(x)$,

(c) el *producto por un escalar* $a \in \mathbb{R}$: $(a.f)(x) = a.f(x)$,

(d) el *cociente*: si $f(x) \neq 0$ para cada $x \in X$, $\frac{1}{f}(x) = \frac{1}{f(x)}$,

(e) el *valor absoluto*: $|f|(x) = |f(x)|$, y

(f) las funciones *máximo y mínimo*: $m(x) = \min\{f(x),g(x)\}$ y $M(x) = \max\{f(x),g(x)\}$.

Se pide probar las siguientes propiedades:

(i) las anteriores operaciones son internas en $C(X)$ y $C^*(X)$;

(ii) $C(X)$ y $C^*(X)$ son álgebras sobre $\mathbb{R}$;

(iii) $C^*(X)$ es un espacio vectorial normado, con las operaciones suma y producto escalar y la norma $\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in X\}$;

(iv) $C(X)$ y $C^*(X)$ son retículos con el orden parcial: $f \leq g$ si y sólo si $f(x) \leq g(x)$, para cada $x \in X$;

(v) dados los espacios (X, τ_X) e (Y, τ_Y), toda aplicación continua $f\colon (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ induce un homomorfismo entre las álgebras asociadas $F_f\colon C(Y) \longrightarrow C(X)$ (respectivamente, $F_f^*\colon C^*(Y) \longrightarrow C^*(X)$);

(vi) si (X, τ_X) e (Y, τ_Y) son homeomorfos, ¿qué relación existe entre $C(X)$ y $C(Y)$?, ¿y entre $C^*(X)$ y $C^*(Y)$?

2.- En un espacio topológico (X, τ), probar:

(i) $\tau = \tau_{dis}$ si y sólo si para todo (Y, τ_Y) y toda $f\colon (X, \tau) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$, f es continua;

(ii) $\tau = \tau_{ind}$ si y sólo si para todo (Y, τ_Y) y toda $f\colon (Y, \tau_Y) \longrightarrow (X, \tau)$, f es continua.

3.- Sea $f\colon (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ una aplicación continua y sobreyectiva. Probar que todo abierto de (Y, τ_Y) es la imagen por f de un abierto saturado ($U \subset X$ es *saturado* si existe $V \subset Y$ tal que $U = f^{-1}(V)$) de (X, τ_X). Probar la propiedad análoga para cerrados.

4.- Si χ_A es la función característica de A, probar

(i) $\chi_A\colon (X, \tau) \longrightarrow (\mathbb{R}, \tau_u)$ es continua en x si y sólo si $x \notin fr(A)$;

(ii) $\chi_A\colon (X, \tau) \longrightarrow (\mathbb{R}, \tau_u)$ es continua en X si y sólo si A es abierto y cerrado.

5.- Caracterizar las funciones continuas $f\colon (\mathbb{R}, \tau_u) \longrightarrow (\mathbb{R}, \tau_{coc})$.

6.- Dados los conjuntos finitos $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $Y = \{a, b\}$ y las topologías sobre ellos $\tau_X = \{\emptyset, X, \{1\}, \{3, 4\}, \{1, 3, 4\}\}$ y $\tau_Y = \{\emptyset, Y, \{a\}\}$, se pide:

(i) ¿cuántas funciones hay $f\colon X \longrightarrow Y$? ¿cuántas son inyectivas? ¿Y sobreyectivas?

(ii) encontrar todas las funciones continuas $f\colon (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$.

7.- Dado $x \in \mathbb{R}$, se llama *parte entera de* x, $[x]$, al mayor entero que es menor o igual que x. Estudiar la continuidad de la función $f\colon (\mathbb{R}, \tau_{sor}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \tau_u)$, si $f(x) = [x]$.

8.- Sean τ_1 y τ_2 dos topologías sobre X y (Y, τ_Y) un espacio topológico. Probar:

(i) si $\tau = \text{ínf}\{\tau_1, \tau_2\}$, entonces la aplicación $f\colon (X, \tau) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ es continua si y sólo si $f\colon (X, \tau_i) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ es continua, para $i = 1, 2$;

(ii) si $\tau = \sup\{\tau_1, \tau_2\}$, entonces la aplicación $f\colon (Y, \tau_Y) \longrightarrow (X, \tau)$ es continua si y sólo si $f\colon (Y, \tau_Y) \longrightarrow (X, \tau_i)$ es continua, para $i = 1, 2$.

9.- Sea $f\colon (X,\tau_X)\longrightarrow(Y,\tau_Y)$ continua. Probar que para cada F_σ-conjunto (respectivamente, G_δ-conjunto) $B\subset Y$, el conjunto $f^{-1}(B)$ es un F_σ-conjunto (respectivamente, G_δ-conjunto). Para las definiciones, ver el ejercicio 11 del apartado 3.5.

10.- Encontrar una sucesión de funciones continuas $\{f_n\colon (\mathbb{R},\tau_{us})\longrightarrow([0,1],\tau_{us})\}_{n\in\mathbb{N}}$, cuyo supremo no sea una función continua.

11.- Sea $(\mathbb{N},\tau)$ el espacio topológico del problema 14 en el apartado 2.7. Probar que $f\colon (\mathbb{N},\tau)\longrightarrow(\mathbb{N},\tau)$ es continua si sólo si (si m divide a n, entonces $f(m)$ divide a $f(n)$).

12.- Una aplicación $f\colon (X,\tau)\longrightarrow(\mathbb{R},\tau_u)$ es *semicontinua inferiormente* (respectivamente, *semicontinua superiormente*), si para cada $x\in X$ y $\varepsilon>0$, existe $V\in\mathcal{N}_x$ tal que para cada $y\in V$ es $f(y)>f(x)-\varepsilon$ (respectivamente, $f(y)<f(x)+\varepsilon$). Probar:

(i) $f\colon (X,\tau)\longrightarrow(\mathbb{R},\tau_u)$ es continua si y sólo si es semicontinua inferior y superiormente;

(ii) sean las topologías sobre $\mathbb{R}$, τ_{kol} y $\tau_{scs}=\{\emptyset,\mathbb{R}\}\cup\{(-\infty,a)\,:\,a\in\mathbb{R}\}$. Entonces, $f\colon (X,\tau)\longrightarrow(\mathbb{R},\tau_u)$ es semicontinua inferiormente (respectivamente, semicontinua superiormente) si y sólo si $f\colon (X,\tau)\longrightarrow(\mathbb{R},\tau_{kol})$ (respectivamente, $f\colon (X,\tau)\longrightarrow(\mathbb{R},\tau_{scs})$) es continua;

(iii) sea $\{f_i\colon (X,\tau)\longrightarrow(\mathbb{R},\tau_u)\}_{i\in I}$ una familia de aplicaciones semicontinuas inferiormente (respectivamente, semicontinuas superiormente). Se supone que $I\neq\emptyset$ y que para cada $x\in X$ el conjunto $\{f_i(x)\,:\,i\in I\}$ está acotado superiormente (respectivamente, acotado inferiormente) en $\mathbb{R}$. Entonces, la aplicación $f\colon (X,\tau)\longrightarrow(\mathbb{R},\tau_u)$ definida por $f(x)=\sup\limits_{i\in I}f_i(x)$ (respectivamente, $f(x)=\inf\limits_{i\in I}f_i(x)$) es semicontinua inferiormente (respectivamente, semicontinua superiormente);

(iv) si $A\subset X$, χ_A es semicontinua inferiormente (respectivamente, semicontinua superiormente) si y sólo si $A\in\tau$ (respectivamente, $A\in\mathcal{C}$).

13.- Una función $f\colon (X,\tau_X)\longrightarrow(Y,\tau_Y)$ se dice *abierta* si para cada $U\in\tau_X$, es $f(U)\in\tau_Y$. Y se dice *cerrada*, si para cada $F\in\mathcal{C}_X$, es $f(F)\in\mathcal{C}_Y$. Se pide probar:

(i) no hay ninguna relación entre las nociones de función continua, abierta y cerrada;

(ii) si $f\colon (X,\tau_X)\longrightarrow(Y,\tau_Y)$ es cerrada, dado $B\subset Y$ y $U\in\tau_X$ tal que $f^{-1}(B)\subset U$, existe $V\in\tau_Y$, tal que $B\subset V$ y $f^{-1}(V)\subset U$;

(iii) si $f\colon (X,\tau_X)\longrightarrow(Y,\tau_Y)$ es abierta, dado $B\subset Y$ y $F\in\mathcal{C}_X$ tal que $f^{-1}(B)\subset F$, existe $G\in\mathcal{C}_Y$, tal que $B\subset G$ y $f^{-1}(G)\subset F$.

14.- Si $f\colon (X,\tau_X)\longrightarrow(Y,\tau_Y)$ y $g\colon (Y,\tau_Y)\longrightarrow(Z,\tau_Z)$, probar:

(i) si f y g son abiertas (respectivamente, cerradas), entonces $g\circ f$ es abierta (respectivamente, cerrada);

(ii) si $g\circ f$ es abierta (respectivamente, cerrada) y f es continua y sobreyectiva, entonces g es abierta (respectivamente, cerrada);

(iii) Si $g\circ f$ es abierta (respectivamente, cerrada) y g es continua e inyectiva, entonces f es abierta (respectivamente, cerrada).

15.- Sea $f\colon (X,\tau_X)\longrightarrow(Y,\tau_Y)$ continua y abierta. Se pide probar:

(i) si $\mathcal{B}_x$ una base local en el punto x, $f(\mathcal{B}_x)$ es base local en $f(x)$;

(ii) si además f es sobreyectiva y β es base de τ_X, entonces $f(\beta)$ es base de τ_Y.

16.- $f\colon (X,\tau_X)\longrightarrow(Y,\tau_Y)$ un función. Probar:

(i) f es abierta si y sólo si para cada $A\subset X$, es $f(\overset{\circ}{A})\subset\overset{\circ}{\overbrace{f(A)}}$;

(ii) f es cerrada si y sólo si para cada $A\subset X$, es $f(\overline{A})\supset\overline{f(A)}$;

(iii) si f es biyectiva, es un homeomorfismo si y sólo si es continua y abierta;

(iii) si f es biyectiva, es un homeomorfismo si y sólo si es continua y cerrada.

17.- Sea $f\colon (X,\tau_X)\longrightarrow(Y,\tau_Y)$ una aplicación sobreyectiva y cerrada. Probar que para cada $U\in\tau_X$, se verifica que $fr(f(\overline{U}))\subset f(\overline{U})\cap f(X-U)$.

18.- Sea $f\colon (X,\tau_X)\longrightarrow(Y,\tau_Y)$ una aplicación. Probar que son equivalentes:

(i) f es cerrada;

(ii) si $U\in\tau_X$, entonces $\{y\in Y: f^{-1}(y)\subset U\}\in\tau_Y$;

(iii) si $F\in\mathcal{C}_X$, entonces $\{y\in Y: f^{-1}(y)\cap F\neq\emptyset\}\in\mathcal{C}_Y$.

19.- Dos espacios discretos son homeomorfos si y sólo si poseen el mismo cardinal.

20.- Dar un ejemplo de dos espacios topológicos (X,τ_X) e (Y,τ_Y) no homeomorfos, pero tales que exista una aplicación entre ellos, continua y biyectiva.

21.- Si $n\in\mathbb{Z}$, se define sobre $\mathbb{R}$ la topología τ_n, dada por la base $\beta_n=\beta_u\cup\{n\}$. Probar que $\tau_1\neq\tau_2$, pero que $(\mathbb{R},\tau_1)$ y $(\mathbb{R},\tau_2)$ son espacios homeomorfos.

22.- Probar los siguientes enunciados:

(i) toda aplicación sobreyectiva $f\colon (\mathbb{R},\tau_{cof})\longrightarrow(\mathbb{R},\tau_u)$ es cerrada;

(ii) $(\mathbb{R},\tau_u)$ y $(\mathbb{R},\tau_{cof})$ no son homeomorfos;

(iii) toda aplicación $f\colon (\mathbb{R},\tau_u)\longrightarrow(\mathbb{R},\tau_u)$ biyectiva y continua, es abierta;

(iv) toda aplicación sobreyectiva $f\colon (X,\tau_{cof})\longrightarrow(Y,\tau_{cof})$ es abierta y cerrada.

23.- Sea $X\neq\emptyset$ y $p,q\in X$. Sea $A=\{p\}$ y τ^A la topología A-exclusión. Estudiar la continuidad de la función $f\colon ([0,1],\tau_u)\longrightarrow(X,\tau^A)$ dada por $f(x)=p$ si $x=0$ y $f(x)=q$ si $x\neq 0$.

24.- Probar que son homeomorfos la bola cerrada $(\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leq 1\},\tau_u)$ y el cuadrado $(\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : |x|\leq 1, |y|\leq 1\},\tau_u)$.

25.- En este ejercicio se trata de definir la *proyección estereográfica*:

(i) la circunferencia unidad en el plano euclídeo es $\mathbb{S}^1=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 : x_1^2+x_2^2=1\}$. Dado $(a_1,a_2)\in\mathbb{S}^1-\{(0,1)\}$, se considera la recta que pasa por (a_1,a_2) y $(0,1)$. Esta recta corta al eje de abscisas en el punto $\left(\frac{a_1}{1-a_2},0\right)$. Se define la aplicación $h\colon (\mathbb{S}^1-\{(0,1)\},d_u)\longrightarrow(\mathbb{R},d_u)$ por $h(a_1,a_2)=\frac{a_1}{1-a_2}$. Probar que h es un homeomorfismo: es la *proyección estereográfica*;

(ii) Análogamente, para $n\geq 1$, la esfera unidad en el espacio euclídeo de dimensión $n+1$ se define por $\mathbb{S}^n=\{(x_1,\dots,x_{n+1})\in\mathbb{R}^{n+1} : x_1^2+\dots+x_{n+1}^2=1\}$. Probar que la aplicación $h\colon (\mathbb{S}^n-\{(0,\dots,0,1)\},d_u)\longrightarrow(\mathbb{R}^n,d_u)$, dada por $h(a_1,\dots,a_{n+1})=\left(\frac{a_1}{1-a_{n+1}},\dots,\frac{a_n}{1-a_{n+1}}\right)$, es un homeomorfismo: es la *proyección estereográfica*.

26.- Probar que el espacio euclídeo $(\mathbb{R}^n,\tau_u)$ es homeomorfo al subespacio $(\mathbb{E}^n,\tau_u)$, donde $\mathbb{E}^n=\{(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n : x_1^2+\cdots+x_n^2<1\}$.

25.- Probar que el n-símplice unidad (Δ^n,τ_u), donde:

$$\Delta^n=\{(x_1,\cdots,x_{n+1})\in\mathbb{R}^{n+1} : x_i\geq 0,\ \forall i\in\{1,\cdots,n+1\},\ x_1+\cdots+x_{n+1}=1\},$$

es homeomorfo al cubo n-dimensional $([0,1]^n,\tau_u)$.

27.- Probar los siguientes enunciados:

(i) en $(\mathbb{R},\tau_u)$, son homeomorfos todos los intervalos abiertos;

(ii) no son homeomorfos $((0,1),\tau_u)$ y $([0,1],\tau_u)$;

(iii) $((0,1), \tau_{dis})$ y $([0,1], \tau_{dis})$ son homeomorfos;

(iv) $(\mathbb{N}, \tau_u)$ y $(\mathbb{Q}, \tau_u)$ no son homeomorfos;

(v) $(\mathbb{S}^1, \tau_u)$ no es homeomorfa a $((0,1), \tau_u)$.

28.- Probar que los espacios euclídeos siguientes son dos a dos homeomorfos:

(i) el cilindro vertical $X = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$,

(ii) el plano privado del origen $Z = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$,

(iii) la corona circular $W = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < 4\}$,

(iv) la esfera privada de los polos norte y sur, $U = \mathbb{S}^2 - \{N, S\}$, donde $N = (0,0,1)$ y $S = (0,0,-1)$,

(v) el cono privado de su vértice $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2, z > 0\}$.

29.- Probar que el primer cuadrante del plano $(\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0\}, \tau_u)$ y el semiplano $(\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}, \tau_u)$ son homeomorfos.

30.- Probar que las siguientes son propiedades topológicas:

(i) X es equipotente a $\mathbb{N}$;

(ii) la topología sobre X tiene el cardinal de $\mathbb{N}$;

(iii) existe $A \subset X$, equipotente a $\mathbb{N}$ y denso;

(iv) X es metrizable;

pero, no son propiedades topológicas:

(i) la topología sobre X está generada por la métrica d;

(ii) X es un subconjunto de $\mathbb{R}$.

31.- Sean dos aplicaciones $f\colon (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ y $g\colon (Y, \tau_Y) \longrightarrow (X, \tau_X)$ continuas, tales que $f \circ g = 1_Y$ y $g \circ f = 1_X$. Probar que f y g son homeomorfismos.

32.- Sean $f\colon (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ un homeomorfismo y $g\colon (Y, \tau_Y) \longrightarrow (Z, \tau_Z)$. Probar que g es continua si y sólo si $g \circ f$ lo es.

33.- Sean $f\colon (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ una aplicación abierta y cerrada, una aplicación continua $\varphi\colon (X, \tau_X) \longrightarrow ([0,1], \tau_u)$ y para cada $y \in Y$, $\phi(y) = \sup\{\varphi(x) : f(x) = y\}$. Probar que ϕ es continua.

34.- Sean (X,τ) y $\mathcal{H}_{(X,\tau)} = \{h\colon (X,\tau) \longrightarrow (X,\tau) : h$ homeomorfismo$\}$. Se pide probar:

(i) con la composición de funciones como operación, $\mathcal{H}_{(X,\tau)}$ es un grupo;

(ii) si $X = [0,1]$ y $A = (0,1) \subset X$, sea $\varphi\colon \mathcal{H}_{(X,\tau)} \longrightarrow \mathcal{H}_{(A,\tau_A)}$ definida por $\varphi(h) = h|_A$. Entonces, φ es un isomorfismo de grupos, aunque los espacios involucrados (X,τ) y (A,τ_A) no son homeomorfos.

35.- En (X,τ) se verifica:

(i) si existe una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ que converge a x, entonces $x \in \overline{A}$;

(ii) si $A \in \mathcal{C}$, entonces para cada sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ que converge a x, es $x \in A$;

(iii) si $A \in \tau$, para cada sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que converge a $x \in A$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que para cada $n \geq n_0$, es $x_n \in A$;

(iv) si (X,τ) es T_2, los límites de sucesiones son únicos.

Además si (X,τ) es C_I, todas las implicaciones anteriores son equivalencias.

36.- Sea $f\colon (X,\tau_X) \longrightarrow (Y,\tau_Y)$ una función. Probar:

(i) si f es continua es secuencialmente continua;

(ii) si (X,τ_X) es C_I, ambos conceptos de continuidad son equivalentes;

37.- Sean $f,g\colon (X,\tau_X) \longrightarrow (Y,\tau_Y)$ dos funciones. Se pide probar:

(i) si f y g son continuas e (Y,τ_Y) es T_2, entonces $A = \{x \in X : f(x) = g(x)\} \in \mathcal{C}_X$;

(ii) probar el *principio de prolongación de las identidades*: si f y g son continuas, (Y,τ_Y) es T_2, D es denso en X y $f|_D = g|_D$, entonces $f = g$;

Construcción de espacios topológicos

Mi plaza aún no ha dado su mejor lunes.
Las palomas se mancharon de poemas,
mi lápiz,desgraciadamente,
sigue siendo de madera...
madera que sangra.
Madera de ciudad.

"Madera de ciudad"
Mikel Varas

5.1. Subespacios

Definición 5.1. Dado un espacio topológico (X, τ), si $A \subset X$, se define una topología sobre A asociada a τ, por $\tau_A = \{U \cap A : U \in \tau\}$, que se llama *topología relativa*. Se dice también que (A, τ_A) es un *subespacio* de (X, τ).

Proposición 5.1. *Sea (X, τ) un espacio topológico y $A \subset X$. Entonces:*

(i) si $V \subset A$, es $V \in \tau_A$ si y sólo si existe $U \in \tau$ tal que $V = U \cap A$;

(ii) si $F \subset A$, es $F \in \mathcal{C}_A$ si y sólo si existe $G \in \mathcal{C}$ tal que $F = G \cap A$;

(iii) si β es base de τ, entonces $\beta_A = \{B \cap A : B \in \beta\}$ es base de τ_A;

(iv) si σ es subbase de τ, entonces $\sigma_A = \{S \cap A : S \in \sigma\}$ es subbase de τ_A;

(v) si $a \in A$, $\mathcal{N}_a^A = \{M \cap A : M \in \mathcal{N}_a\}$ es la familia de entornos de a en (A, τ_A);

(vi) si $a \in A$ y $\mathcal{B}_a$ es una base local de a en (X, τ), la familia $\mathcal{B}_a^A = \{B \cap A : B \in \mathcal{B}_a\}$ es una base local de a en (A, τ_A);

(vii) si $B \subset A$, con las notaciones obvias es $\overline{B}^A = \overline{B} \cap A$ y $B'^{A} = B' \cap A$;

(viii) si $B \subset A$, con las notaciones obvias es $fr_A(B) \subset fr(B) \cap A$ y $\overset{\circ}{B} \cap A \subset \overset{\circ}{B}{}^{A}$, y se dan las igualdades cuando $A \in \tau$.

Proposición 5.2. *Sean (X, τ) un espacio topológico y $B \subset A \subset X$. Se puede pensar en B como un subespacio de (X, τ), obteniendo la topología relativa τ_B sobre B, o como subespacio de (A, τ_A), obteniendo la topología relativa $(\tau_A)_B$ sobre B. Entonces, $\tau_B = (\tau_A)_B$.*

Ejemplos 5.1. En los espacios topológicos estudiados, tenemos:

(1) en (X, τ_{ind}), para todo $A \subset X$, $\tau_A = \tau_{ind}$;

(2) en (X, τ_{dis}), para todo $A \subset X$, $\tau_A = \tau_{dis}$;

(3) en (X, τ_A), si $B \cap A \neq \emptyset$, es $\tau_B = \tau_{A\cap B}$ y si $B \cap A = \emptyset$, es $\tau_B = \tau_{dis}$;

(4) en (X, τ^A), si $B \cap A \neq \emptyset$, es $\tau_B = \tau^{A\cap B}$ y si $B \cap A = \emptyset$, es $\tau_B = \tau_{dis}$;

(5) en (X, τ_{cof}), si A es infinito, es $\tau_A = \tau_{cof}$ y si A es finito, es $\tau_A = \tau_{dis}$;

(6) en (X, τ_{coc}), si A es no contable, es $\tau_A = \tau_{coc}$ y si A es contable, es $\tau_A = \tau_{dis}$.

Lema 5.3. *$i_A\colon (A, \tau_A) \longrightarrow (X, \tau_X)$ es continua.*

La continuidad no depende del rango de la función:

Corolario 5.4. *$f\colon (Y, \tau_Y) \longrightarrow (A, \tau_A)$ es continua si y sólo si $i_A \circ f\colon (Y, \tau_Y) \longrightarrow (X, \tau_X)$ lo es.*

Definición 5.2. Una propiedad $\mathcal{P}$ se dice *hereditaria*, si cuando (X, τ) verifica $\mathcal{P}$, la cumple cualquier subconjunto de X. $\mathcal{P}$ se llama *débilmente hereditaria* si la heredan sólo los $A \in \mathcal{C}$, y se llama *casi hereditaria* si pasa únicamente a los $A \in \tau$.

Ejemplos 5.2. Son hereditarias la propiedades T_1, T_2, C_I, C_{II} y la metrizabilidad. La separabilidad es casi hereditaria.

Proposición 5.5. *En (X, τ), si $A \subset X$, se cumple:*

(i) $A \in \tau$ si y sólo si $i_A\colon (A, \tau_A) \longrightarrow (X, \tau)$ es abierta (problema 13, apartado 4.4);

(ii) $A \in \mathcal{C}$ si y sólo si $i_A\colon (A, \tau_A) \longrightarrow (X, \tau)$ es cerrada;

(iii) cada $B \in \tau_A$ es tal que $B \in \tau_X$ si y sólo si $A \in \tau$;

(iv) cada $B \in \mathcal{C}_A$ es tal que $B \in \mathcal{C}$ si y sólo si $A \in \mathcal{C}$.

Definición 5.3. La *restricción de una aplicación* $f\colon (X,\tau_X)\longrightarrow(Y,\tau_Y)$ a $A\subset X$, es la función $f\circ i_A=f|_A\colon (A,\tau_A)\longrightarrow(Y,\tau_Y)$.

Proposición 5.6. *Si $f\colon (X,\tau_X)\longrightarrow(Y,\tau_Y)$ es continua, para cada $A\subset X$ la restricción $f\circ i_A=f|_A\colon (A,\tau_A)\longrightarrow(Y,\tau_Y)$ es continua.*

Proposición 5.7. *Sea $f\colon (X,\tau_X)\longrightarrow(Y,\tau_Y)$ continua y $A\subset X$, $B\subset Y$ tales que $f(A)\subset B$. La aplicación inducida por $f|_A$, $g\colon (A,\tau_A)\longrightarrow(B,\tau_B)$, es continua.*

Un problema importante en topología es el de extensión de aplicaciones continuas.

Definición 5.4. Una *extensión* de una aplicación continua $f\colon (A,\tau_A)\longrightarrow(Y,\tau_Y)$ de un subespacio $A\subset X$ al espacio total, es una aplicación continua $g\colon (X,\tau_X)\longrightarrow(Y,\tau_Y)$, cuya restricción a A es f.

Un caso particular importante de extensión es el siguiente:

Definición 5.5. En (X,τ), $A\subset X$ es un *retracto* de X, si existe una aplicación continua, una *retracción*, $r\colon (X,\tau)\longrightarrow(A,\tau_A)$, que extiende a $1_A\colon (A,\tau_A)\longrightarrow(A,\tau_A)$ (la identidad de A), es decir, para cada $a\in A$, es $r(a)=a$.

Observación 5.1. Una retracción es siempre sobreyectiva.

Ejemplo 5.1. $[0,1]$ es un retracto de $\mathbb{R}$ en $(\mathbb{R},\tau_u)$, ya que $r\colon (\mathbb{R},\tau_u)\longrightarrow([0,1],\tau_{us})$, dada por $r(t)=\begin{cases} 0 & \text{si} \quad t\leq 0\\ t & \text{si} \quad t\in[0,1]\\ 1 & \text{si} \quad t\geq 1\end{cases}$ es una retracción.

5.2. Aplicaciones combinadas

Definición 5.6. Dado un conjunto X, si $\{A_i\}_{i\in I}$ cubre X (es decir, $X=\bigcup\limits_{i\in I}A_i$) y $\{f_i\colon A_i\longrightarrow Y\}_{i\in I}$ es una familia de funciones tales que $f_i|_{A_i\cap A_j}=f_j|_{A_i\cap A_j}$, para cada $i,j\in I$, se define la *función combinada* de las anteriores, como la función $f\colon X\longrightarrow Y$ definida por $f(x)=f_i(x)$, si $x\in A_i$.

Proposición 5.8. *Sean (X,τ_X) e (Y,τ_Y) espacios topológicos. Con las notaciones anteriores:*

(i) si para cada $i\in I$, es $A_i\in\tau_X$ y la función $f_i\colon (A_i,\tau_{A_i})\longrightarrow(Y,\tau_Y)$ es continua, entonces la combinada $f\colon (X,\tau_X)\longrightarrow(Y,\tau_Y)$ también lo es;

(ii) si para cada $i\in I$ es $A_i\in\mathcal{C}_X$, la función $f_i\colon (A_i,\tau_{A_i})\longrightarrow(Y,\tau_Y)$ es continua e I es un conjunto finito, entonces la combinada es continua.

Observación 5.2. En el apartado (ii), I debe ser necesariamente finito. En efecto, si $I=\mathbb{R}$, $1_{\mathbb{R}}\colon (\mathbb{R},\tau_u)\longrightarrow(\mathbb{R},\tau_{dis})$ no es continua y sin embargo $1_{\mathbb{R}}|_{\{x\}}\colon (\{x\},\tau_u)\longrightarrow(\mathbb{R},\tau_{dis})$ es continua, para cada $x\in\mathbb{R}$.

5.3. Embebimientos

Definición 5.7. Un *embebimiento* es una aplicación continua $f\colon (X,\tau_X) \longrightarrow (Y,\tau_Y)$, tal que sobre su imagen $g\colon (X,\tau_X) \longrightarrow (f(X),\tau_{f(X)})$ es un homeomorfismo.

Observación 5.3. Mediante un embebimiento, el espacio (X,τ_X) "se piensa" como un subespacio de (Y,τ_Y).

5.4. Topología producto. Proyecciones

Sea $\{(X_i,\tau_i)\}_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos. Se desea definir una topología sobre el producto $\prod\limits_{i\in I} X_i$, que sea natural y lo suficientemente *manejable* como para que sean válidos el mayor número de teoremas del tipo "*si* (X_i,τ_i) *tiene la propiedad* $\mathcal{P}$ *para cada* $i \in I$*, entonces su producto también posee* $\mathcal{P}$".

Si la hipótesis de *naturalidad* fuese la única exigida, la tarea sería sencilla, pues bastaría con elegir como base de la topología producto $\beta_{caj} = \{\prod\limits_{i\in I} U_i : U_i \in \tau_i, i \in I\}$. De este modo, se obtendría una topología sobre $\prod\limits_{i\in I} X_i$ denominada *topología caja*; pero no es la que se utiliza habitualmente, pues posee demasiados abiertos, lo cual impide que ciertas propiedades pasen bien al producto.

La definición que vamos a adoptar reduce drásticamente el número de abiertos:

Definición 5.8. Sea $\{(X_i,\tau_i)\}_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos. La *topología producto o de Tychonov*, τ_{Tyc}, sobre $\prod\limits_{i\in I} X_i$ es la topología cuyos abiertos básicos son de la forma $p_{i_1}^{-1}(U_{i_1}) \cap \cdots \cap p_{i_n}^{-1}(U_{i_n})$, donde $U_{i_j} \in \tau_{i_j}$ para $1 \leq j \leq n$, siendo $p_i\colon \prod\limits_{i\in I} X_i \longrightarrow (X_i,\tau_i)$ la i-ésima proyección coordenada.

Observación 5.4. Si $I = \{1,\dots,n\}$, $\tau_{Tyc} = \tau_{caj} = \tau_1 \times \cdots \times \tau_n$. En general, $\tau_{Tyc} \subset \tau_{caj}$.

Ejemplos 5.3. Algunos ejemplos de productos son los siguientes:

(i) si $\{(X_i,\tau_{ind})\}_{i\in I}$, entonces $\tau_{Tyc} = \tau_{ind}$;

(ii) si $\{(X_i = \mathbb{R},\tau_u)\}_{i\in\mathbb{R}}$, un entorno básico de $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ es de la forma

$$U(f;F,\varepsilon) = \{g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} : |g(x) - f(x)| < \varepsilon, \forall x \in F\},$$

donde $F \subset \mathbb{R}$ es un conjunto finito y $\varepsilon > 0$.

Proposición 5.9. *Para cada $i \in I$, la proyección canónica $p_i \colon (\prod_{i \in I} X_i, \tau_{Tyc}) \longrightarrow (X_i, \tau_i)$ es continua, abierta y sobreyectiva.*

Observación 5.5. Las proyecciones no son cerradas en general, ni siquiera para productos finitos: si $(X_i = \mathbb{R}, \tau_i = \tau_u)$ e $I = \{1, 2\}$, $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1\}$ es cerrado en $(\mathbb{R}^2, \tau_{Tyc})$, pero $p_1(A) = \mathbb{R} - \{0\}$ no lo es en $(\mathbb{R}, \tau_u)$.

Proposición 5.10. *Una aplicación $f \colon (Y, \tau_Y) \longrightarrow (\prod_{i \in} X_i, \tau_{Tyc})$ es continua si y sólo si para cada $i \in I$ es continua la aplicación $p_i \circ f \colon (\prod_{i \in I} X_i, \tau_{Tyc}) \longrightarrow (X_i, \tau_i)$.*

Proposición 5.11. *Sea $(\prod_{i \in I} X_i, \tau_{Tyc})$ y $A_i \subset X_i$, para cada $i \in I$. Con las notaciones obvias:*

(i) $\prod_{i \in I} \overline{A_i} = \overline{\prod_{i \in I} A_i}$. Luego $\prod_{i \in I} A_i \in \mathcal{C}_{Tyc}$ si y sólo si para cada $i \in I$ es $A_i \in \mathcal{C}_i$;

(ii) si $A_i \neq X_i$ para una cantidad infinita de índices, $\overset{\circ}{\overbrace{\prod_{i \in I} A_i}} = \emptyset$. En caso contrario, $\prod_{i \in I} \overset{\circ}{A_i} = \overset{\circ}{\overbrace{\prod_{i \in I} A_i}}$.

Definición 5.9. Una propiedad $\mathcal{P}$ se llama *productiva*, cuando si (X_i, τ_i) cumplen $\mathcal{P}$ para cada $i \in I$, entonces su producto también la verifica.

Proposición 5.12. *$(\prod_{i \in I} X_i, \tau_{Tyc})$ es T_1 (respectivamente, T_2) si y sólo si para cada $i \in I$ (X_i, τ_i) es T_1 (respectivamente, T_2).*

Proposición 5.13. *$(\prod_{i \in I} X_i, \tau_{Tyc})$ es C_I (respectivamente, C_{II}) si y sólo si para cada $i \in I$ (X_i, τ_i) es C_I (respectivamente, C_{II}) y todos salvo una familia contable de espacios son indiscretos.*

Proposición 5.14. *$(\prod_{i \in I} X_i, \tau_{Tyc})$ es separable (respectivamente, metrizable) si y sólo si para cada $i \in I$ (X_i, τ_i) es separable (respectivamente, metrizable) e I es contable.*

Proposición 5.15. *Sea* $(\prod_{i\in I} X_i, \tau_{Tyc})$ *y para cada* $i \in I$, $A_i \subset X_i$. *Si* τ_{TycA_i} *denota la topología producto asociada a la familia de subespacios* $\{(A_i, \tau_{A_i})\}_{i\in I}$ *y* $A = \prod_{i\in I} A_i$, *entonces* $\tau_{Tyc}|_A = \tau_{TycA_i}$.

5.5. Topología cociente. Identificaciones

Muchos modelos geométricos sencillos como el cono, el cilindro o la pirámide se construyen habitualmente *pegando* partes de una pieza plana de papel de acuerdo con ciertas reglas. Esta operación es un ejemplo muy simple de la noción de objeto cociente. En el caso de los espacios topológicos, se puede dar la noción de espacio topológico cociente asociado a cualquier relación de equivalencia.

Definición 5.10. Una *identificación* es una aplicación $f\colon (X,\tau_X) \longrightarrow (Y,\tau_Y)$ sobreyectiva, tal que $V \in \tau_Y$ si y sólo si $f^{-1}(V) \in \tau_X$.

Lema 5.16. $f\colon (X,\tau_X) \longrightarrow (Y,\tau_Y)$ *es una identificación si y sólo si es sobreyectiva y (*$F \in \mathcal{C}_Y$ *si y sólo si* $f^{-1}(F) \in \mathcal{C}_X$*).*

Proposición 5.17. *Sea* $f\colon (X,\tau_X) \longrightarrow (Y,\tau_Y)$ *continua y sobreyectiva. Si* f *es abierta (respectivamente, cerrada) es una identificación.*

Observación 5.6. El recíproco no es cierto: sea $\chi_{[0,\frac{1}{2})}\colon ([0,1],\tau_{us}) \longrightarrow (\{0,1\},\tau)$, donde $\tau = \{\emptyset, \{0,1\}, \{1\}\}$. Con esta topología, $\chi_{[0,\frac{1}{2})}$ es una identificación, que no es ni abierta ni cerrada.

Sin embargo, se tiene la siguiente propiedad:

Proposición 5.18. *Si* $f\colon (X,\tau_X) \longrightarrow (Y,\tau_Y)$ *es una identificación, entonces*

(i) f *es abierta si y sólo si para cada* $U \in \tau_X$, *es* $f^{-1}(f(U)) \in \tau_X$;

(ii) f *es cerrada si y sólo si para cada* $F \in \mathcal{C}_X$, *es* $f^{-1}(f(F)) \in \mathcal{C}_X$.

Proposición 5.19. *Una identificación inyectiva es un homeomorfismo.*

Proposición 5.20. *La composición de identificaciones es una identificación.*

Una de las propiedades fundamentales de las identificaciones es la siguiente:

Proposición 5.21. *Si* $f\colon (X,\tau_X) \longrightarrow (Y,\tau_Y)$ *es una identificación y* $g\colon (Y,\tau_Y) \longrightarrow (Z,\tau_Z)$ *es una aplicación, entonces* g *es continua si y sólo si* $g \circ f$ *lo es.*

Demostración: Si $g \circ f$ es continua y $V \in \tau_Z$, es $g^{-1}(V) \in \tau_Y$, ya que $g^{-1}(V) \in \tau_Y$ si y sólo si $f^{-1}(g^{-1}(V)) \in \tau_X$. Y $f^{-1}(g^{-1}(V)) = (g \circ f)^{-1}(V)$. ∎

Teorema 5.22. *(de transitividad) Dadas una identificación $f\colon (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ y una aplicación sobreyectiva $g\colon (Y, \tau_Y) \longrightarrow (Z, \tau_Z)$, g es identificación si y sólo si $g \circ f$ lo es.*

Proposición 5.23. *Sea $f\colon (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ una aplicación continua y sobreyectiva. Si existe $s\colon (Y, \tau_Y) \longrightarrow (X, \tau_X)$ continua y tal que $f \circ s = 1_Y$ (s se llama una sección), entonces f es una identificación.*

Corolario 5.24. *Toda retracción es una identificación.*

Definición 5.11. Sea $f\colon (X, \tau_X) \longrightarrow Y$ una aplicación sobreyectiva. Se define la *topología cociente* sobre Y por $\tau_f = \{V \subset Y : f^{-1}(V) \in \tau_X\}$, es decir, es la mayor topología sobre Y para la que f continua. Además, con esta topología, f es una identificación.

Definición 5.12. Sea X un conjunto. Una *partición* de X es una familia $\mathcal{P} = \{P_i : i \in I\}$ de conjuntos no vacíos, dos a dos disjuntos, cuya unión es X.

Sea la proyección canónica $q\colon (X, \tau) \longrightarrow \mathcal{P}$, que asocia a $x \in X$ el único elemento de $\mathcal{P}$ que lo contiene: $q(x) = P_{i_x}$. q es sobreyectiva y se puede dotar a $\mathcal{P}$ de la topología cociente asociada a q. Se dice que $\mathcal{P}$ es un *cociente* de (X, τ).

Es claro que toda partición define una relación de equivalencia sobre X,

$$x \simeq y \text{ si y sólo si } x \text{ e } y \text{ pertenecen al mismo elemento de la partición.}$$

Y recíprocamente toda relación de equivalencia $\simeq$ determina una partición $\mathcal{P} = X/\simeq$, cuyos elementos son las clases de equivalencia. $X/\simeq$ es el *cociente* de X por la relación de equivalencia, y se suele denotar $\tau_\simeq$ a la topología cociente.

El rango de una identificación puede interpretarse como un espacio cociente:

Proposición 5.25. *Si $f\colon (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ es una identificación, entonces (Y, τ_Y) es homeomorfo al cociente de (X, τ_X) por la relación de equivalencia $x_1 \simeq x_2$ si y sólo si $f(x_1) = f(x_2)$.*

Demostración: Si $q\colon (X, \tau_X) \longrightarrow (X/\simeq, \tau_\simeq)$ es la proyección canónica, el homeomorfismo es $h\colon (Y, \tau_Y) \longrightarrow (X/\simeq, \tau_\simeq)$ definido por $h(f(x)) = q(x)$. ∎

Definición 5.13. Una propiedad $\mathcal{P}$ se llama *divisible*, si cuando (X, τ) verifica $\mathcal{P}$, entonces cualquier cociente de (X, τ) la verifica.

Proposición 5.26. *La separabilidad es divisible.*

Observación 5.7. Las demás propiedades topológicas vistas hasta ahora no son divisibles, se verán contraejemplos en los problemas.

Ejemplos 5.4. Repasamos algunos ejemplos de espacios cociente.

(i) *Contracción de un conjunto a un punto*: sea (X, τ), $A \subset X$ y $\simeq$ la relación de equivalencia $a \simeq b$ para $a, b \in A$. El espacio cociente $(X/\simeq, \tau_{\simeq})$ se suele denotar por $(X/A, \tau_A)$ y se dice que *se ha realizado la contracción de A a un punto*.

(ii) *Adjunción de espacios*: sean (X, τ_X) e (Y, τ_Y) espacios topológicos disjuntos. Sea $A \in \mathcal{C}_X$ y $f\colon (A, \tau_A) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ una aplicación continua. Sobre la suma disjunta $(X \cup Y, \tau_\Sigma)$ ($\tau_\Sigma = \{U \subset X \cup Y : U \cap X \in \tau_X, U \cap Y \in \tau_Y\}$) se define la relación de equivalencia $a \sim_f f(a)$, para cada $a \in A$. El espacio cociente se denota por $(X \cup_f Y, \tau_f)$ y se llama *espacio de adjunción* de (X, τ_X) y de (Y, τ_Y) por f, la *aplicación de adjunción*.

Algunos ejemplos de espacios de adjunción son:

- si $A \subset X$ es cerrado y se adjunta a $Y = \{y_0\}$ por la aplicación $f(A) = y_0$, el espacio de adjunción asociado es homeomorfo al cociente $(X/A, \tau_A)$. Si $(X = [0,1], \tau_u)$ y $A = \{0,1\}$, el espacio de adjunción correspondiente es homeomorfo a $(\mathbb{S}^1, \tau_u)$;
- si (X, τ_X) e (Y, τ_Y) espacios topológicos disjuntos, (X, τ_X) es T_1, $x \in X$ e $y \in Y$, se define el "*wedge*"de X e Y, $(X \vee Y, \tau_\sim)$, como el cociente de su suma disjunta, tras identificar los puntos base x e y.

(iii) Una *variedad topológica de dimensión n*, (M, τ), es un espacio topológico T_2 y C_{II}, tal que todo $x \in M$ posee un entorno abierto U que es homeomorfo al espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$, es decir, M es un espacio localmente euclídeo.

Algunos ejemplos de variedades son:

- $(\mathbb{R}^n, \tau_u)$ o cualquier abierto en él es una variedad de dimensión n;
- la esfera $(\mathbb{S}^n, \tau_u)$ es una variedad de dimensión n: basta con usar la proyección estereográfica (problema 25 en el apartado 4.4);
- el espacio proyectivo real $(\mathbb{RP}^n, \tau_\sim)$ es una variedad de dimensión n: puede verse como el cociente de $(\mathbb{S}^n, \tau_u)$ por la relación de equivalencia $x \sim -x$ que identifica puntos antipodales. Si se toman los abiertos $U_i^+ = \{x \in \mathbb{S}^n : x_i > 0\}$ y $U_i^- = \{x \in \mathbb{S}^n : x_i < 0\}$ y los homeomorfismos $\varphi_i\colon U_i^+ \longrightarrow B$ y $\varphi_i\colon U_i^- \longrightarrow B$, dados por $\varphi_i(x) = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$, donde $B = \{z \in \mathbb{R}^n : z_1^2 + \cdots + z_n^2 < 1\}$, entonces los conjuntos $U_i = \varphi_i(U_i^+)$ son abiertos, pues su imagen recíproca por la aplicación cociente es $U_i^+ \cup U_i^-$. Además, la proyección define un homeomorfismo entre U_i^+ y su imagen U_i;

- como $(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n, \tau_u \times \tau_u)$ es homeomorfo a $(\mathbb{R}^{m+n}, \tau_u)$, el producto de dos abiertos es un abierto y el producto de homeomorfismos es un homeomorfismo, se deduce que el producto de una variedad m-dimensional (M, τ_M) y de una variedad n-dimensional (N, τ_N) es una variedad $(m+n)$-dimensional $(M \times N, \tau_M \times \tau_N)$. Así, $(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1, \tau_u)$ es una variedad de dimensión 2.

(iv) una *superficie* S es una variedad de dimensión 2.

Son superficies importantes:

- en $([0,1]^2, \tau_u)$ se identifican $(x,0) \simeq (x,1)$ para cada $x \in [0,1]$ y $(0,y) \simeq (1,y)$ para cada $y \in [0,1]$. Al cociente $([0,1]^2/\simeq, \tau_\simeq)$ se le llama *toro de dimensión dos* $(\mathbb{T}^2, \tau_u)$. La aplicación $f\colon ([0,1]^2, \tau_u) \longrightarrow (\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1, \tau_u)$ definida por $f(s,t) = (\cos(2\pi s), \sin(2\pi s), \cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$ pasa al anterior cociente. Así, $(\mathbb{T}^2, \tau_u)$ es homeomorfo al producto $(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1, \tau_u)$;
- en $([0,1]^2, \tau_u)$ se identifica $(0,y) \simeq (1, 1-y)$, para cada $y \in [0,1]$. Al cociente $([0,1]^2/\simeq, \tau_\simeq)$ se le llama *banda de Möbius* $(\mathbb{M}, \tau_u)$. En realidad, la banda de Möbius es una *superficie con borde*;
- en $([-1,1]^2, \tau_u)$ se identifican $(x,0) \simeq (-x,1)$ para cada $x \in [-1,1]$ y $(0,y) \simeq (1,y)$ para cada $y \in [-1,1]$. Al cociente $([-1,1]^2/\simeq, \tau_\simeq)$ se le llama *botella de Klein* $(\mathbb{K}^2, \tau_u)$.

5.6. Problemas

1.- Sea (X, τ), I un conjunto de índices y la aplicación $d\colon (X,\tau) \longrightarrow (X^I, \tau_{Tyc})$, dada por $p_i(d(x)) = x$. Probar que es un embebimiento, el llamado *embebimiento diagonal*.

2.- Probar que $f\colon (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ es continua si y sólo si $G\colon (X, \tau_X) \longrightarrow (X \times Y, \tau_{Tyc})$ definida por $G(x) = (x, f(x))$, es un embebimiento.

3.- Sea X un conjunto y $\{\tau_i\}_{i=1}^n$ una familia de topologías sobre X. Probar que el espacio $(X, \sup\{\tau_i\}_{i=1}^n)$ es homeomorfo a la diagonal del producto $(\prod\limits_{i=1}^{n} X_i, \tau_{Tyc})$.

4.- Sea I un conjunto de índices. Se pide probar

(i) los productos son *asociativos*, es decir, si $\{I_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ es una partición de I, entonces el producto $(\prod\limits_{\lambda \in \Lambda} (\prod\limits_{i \in I_\lambda} X_i), \tau_{Tyc})$ es homeomorfo a $(\prod\limits_{i \in I} X_i, \tau_{Tyc})$;

(ii) los productos son *conmutativos*, es decir, si $\psi\colon I \longrightarrow I$ es una aplicación biyectiva, entonces $(\prod\limits_{i \in I} X_i, \tau_{Tyc})$ es homeomorfo al producto $(\prod\limits_{i \in I} X_{\psi(i)}, \tau_{Tyc})$.

5.- Sean el *plano de Sorgenfrey* $(\mathbb{R}^2, \tau_{sor} \times \tau_{sor})$ (obtenido como producto de dos rectas de Sorgenfrey) y $A = \{(x, -x); x \in \mathbb{R}\}$. Probar

(i) (A, τ_A) es un espacio discreto; (ii) A es cerrado en $(\mathbb{R}^2, \tau_{sor} \times \tau_{sor})$;

(iii) cada subconjunto $B \subset A$ es cerrado en $(\mathbb{R}^2, \tau_{sor} \times \tau_{sor})$.

6.- ¿ Es $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \tau_u)$ homeomorfo a $(\mathbb{N}, \tau_u)$?

7.- Probar que el producto de espacios cofinitos no es un espacio cofinito.

8.- Sean $p \in X$, $q \in Y$, $A = \{p\}$, $B = \{q\}$ y los espacios topológicos inclusión (X, τ_A) e (Y, τ_B). Sea $C = \{(p, q)\} \subset X \times Y$. Se pide comparar las topologías $\tau_A \times \tau_B$ y τ_C sobre $X \times Y$.

9.- Se consideran las topologías sobre $\mathbb{R}$

$$\tau_2 = \{U \subset \mathbb{R} : U^c \text{ finito ó } 2 \notin U\} \quad \text{y} \quad \tau_3 = \{U \subset \mathbb{R} : U^c \text{ finito ó } 3 \notin U\}.$$

Describir los abiertos de la topología producto $\tau_2 \times \tau_3$ sobre $\mathbb{R}^2$ y comparar esta topología con $\tau_{(2,3)} = \{W \subset \mathbb{R}^2 : W^c \text{ finito ó } (2, 3) \notin W\}$.

10.- Probar que $(\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}, \tau_u)$ es homeomorfo a $(\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}, \tau_u)$, si $n \geq 1$.

11.- Comparar la topología del orden lexicográfico sobre $\mathbb{R}^2$ con la topología producto $\tau_{dis} \times \tau_u$.

12.- Describir el *plano de Kolmogorov* $(\mathbb{R}^2, \tau_{kol} \times \tau_{kol})$ y comparar su topología con la topología usual de $\mathbb{R}^2$. Calcular en este espacio la clausura y el interior de los conjuntos $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 3\}$ y $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$.

13.- Sean $(\mathbb{R}^I, \tau_{Tyc})$ y $(\mathbb{R}^I, \tau_{ca})$ los espacios del problema 23 en 2.7. Probar que son precisamente los espacios producto asociados a la familia $\{(\mathbb{R}, \tau_u)\}_{i \in [0,1]}$.

14.- Sea $\mathbb{S}^1$ la circunferencia unidad de $\mathbb{R}^2$ y sean $r < R$ dos números reales positivos. Sea el conjunto $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 + z^2 = r^2\}$. Probar que la aplicación $f \colon (T, \tau_u) \longrightarrow (\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1, \tau_u \times \tau_u)$ definida por

$$f(x, y, z) = \left(\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right), \left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2} - R}{r}, \frac{z}{r} \right) \right)$$

es un homeomorfismo.

15.- Sean (X, τ_X), (Y, τ_Y) y (Z, τ_Z) espacios. Probar que aunque $(X \times Y, \tau_X \times \tau_Y)$ sea homeomorfo a $(X \times Z, \tau_X \times \tau_Z)$, no es necesariamente (Y, τ_Y) homeomorfo a (Z, τ_Z).

16.- Los productos infinitos se usan para describir dos importantes espacios topológicos:

(i) *el cubo de Hilbert* es el espacio

$$[0,1]^\omega = \{(x_1,\dots,x_n,\dots) \in \prod_{n=1}^{\infty} \mathbb{R} : \, 0 \le x_k \le \frac{1}{k},\, k \ge 1\},$$

provisto de la distancia definida por $d(\{x_n\},\{y_n\}) = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}(x_n-y_n)^2}$. La aplicación $f\colon ([0,1]^\omega, d) \longrightarrow (\prod_{n=1}^{\infty}[0,1], \tau_{Tyc})$, $f(\{x_n\}) = (x_1, 2x_2, \dots, kx_k, \dots)$, es una biyección continua de inversa $g\colon (\prod_{n=1}^{\infty}[0,1], \tau_{Tyc}) \longrightarrow ([0,1]^\omega, d)$, $g(\{y_n\}) = (y_1, \frac{1}{2}y_2, \dots, \frac{1}{k}y_k, \dots)$ también continua. Por lo tanto, $([0,1]^\omega, d)$ es homeomorfo al espacio de las sucesiones sobre $[0,1]$ con la convergencia puntual;

(ii) *el espacio de Cantor* es $\left(\{0,1\}^\omega = \prod_{n=1}^{\infty}\{0,1\}, \tau_{Tyc}\right)$, es decir el espacio topológico de todas las sucesiones de ceros y unos, con la convergencia puntual. Este espacio es homeomorfo al conjunto de Cantor, descrito en el problema 19 del apartado 3.5;

(iii) probar que el producto numerable de copias del cubo de Hilbert (respectivamente, del espacio de Cantor) es homeomorfo al cubo de Hilbert (respectivamente, al espacio de Cantor);

(iv) demostrar que el cubo de Hilbert es la imagen por una aplicación continua del conjunto de Cantor.

17.- Probar las siguientes propiedades:

(i) (X,τ) es T_2 si y sólo si la diagonal $\Delta(X) = \{(x,x) \in X \times X\}$ es cerrada en $(X \times X, \tau_{Tyc})$;

(ii) si $f\colon (X,\tau_X) \longrightarrow (Y,\tau_Y)$ es continua e (Y,τ_Y) es T_2, entonces el conjunto $A = \{(x_1,x_2) \in X \times X : f(x_1) = f(x_2)\}$ es cerrado en $(X \times X, \tau_{Tyc})$;

(iii) si $f\colon (X,\tau_X) \longrightarrow (Y,\tau_Y)$ es una aplicación abierta y sobreyectiva y el conjunto $A = \{(x_1,x_2) \in X \times X : f(x_1) = f(x_2)\}$ es cerrado en $(X \times X, \tau_{Tyc})$, entonces (Y,τ_Y) es T_2;

(iv) si $f\colon (X,\tau_X) \longrightarrow (Y,\tau_Y)$ es una aplicación abierta, continua y sobreyectiva, entonces el conjunto $A = \{(x_1,x_2) \in X \times X : f(x_1) = f(x_2)\}$ es cerrado en $(X \times X, \tau_{Tyc})$ si y sólo si (Y,τ_Y) es T_2.

18.- Sean (X, τ_X) e (Y, τ_Y) espacios topológicos, $\sim_X$ y $\sim_Y$ relaciones de equivalencia sobre X e Y respectivamente y $f\colon (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ una aplicación continua preservando las relaciones (es decir, si $a \sim_X b$ entonces $f(a) \sim_Y f(b)$). Probar:

(i) la aplicación $f_*\colon (X/\sim_X, \tau_{\sim_X}) \longrightarrow (Y/\sim_Y, \tau_{\sim_Y})$, definida por $f_*(p_X(x)) = p_Y(f(x))$ (p_X y p_Y son las proyecciones) es continua;

(ii) si f es identificación, entonces f_* también lo es.

19.- Sean $\sim_1$ y $\sim_2$ dos relaciones de equivalencia sobre (X, τ), tales que si $x \sim_1 y$, entonces $x \sim_2 y$. Probar que $(X/\sim_2, \tau_{\sim_2})$ es un cociente de $(X/\sim_1, \tau_{\sim_1})$.

20.- Sea $f\colon (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ una aplicación continua. Se pide:

(i) si $g\colon (Y, \tau_Y) \longrightarrow (Z, \tau_Z)$ es continua y $g \circ f$ es una identificación, g también lo es;

(ii) si existe $A \subset X$ tal que $f|_A\colon (A, \tau_A) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ es una identificación, f también lo es.

21.- Si $\sim$ es una relación de equivalencia sobre (X, τ), probar que son equivalentes:

(i) la proyección canónica es cerrada (respectivamente, abierta);

(ii) para cada $A \in \mathcal{C}$ (respectivamente, $A \in \tau$), su $\sim$-saturación es cerrada (respectivamente, abierta).

22.- Sea (X, τ) un espacio topológico y $\sim$ una relación de equivalencia sobre X. Probar que son equivalentes

(i) la proyección canónica es abierta (también se dice que $\sim$ es abierta);

(ii) el interior de cada conjunto $\sim$-saturado es $\sim$-saturado;

(iii) la clausura de cada conjunto $\sim$-saturado es $\sim$-saturado.

23.- Sea $r\colon (X, \tau_X) \longrightarrow (A, \tau_A)$ una retracción. Probar que si $R(r)$ es la relación de equivalencia sobre X inducida por r, entonces el cociente $(X/R(r), \tau_{R(r)})$ es homeomorfo al subespacio (A, τ_A).

24.- Sea (X, τ) y $\sim$ una relación de equivalencia sobre X. Probar:

(i) el cociente es indiscreto si y sólo si los únicos abiertos $\sim$-saturados son $\emptyset$ y X;

(ii) si toda clase de equivalencia es densa en (X, τ), entonces el cociente es indiscreto. Aplicarlo al caso de $(\mathbb{R}, \tau_u)$ con la relación $x \sim y$ si y sólo si $x - y \in \mathbb{Q}$;

(iii) el cociente es discreto si y sólo si todo conjunto $\sim$-saturado es abierto en (X, τ);

(iv) el cociente es discreto si y sólo si toda clase de equivalencia es abierta en (X, τ).

25.- Sobre (X, τ), se define la relación $x \sim y$ si y sólo si $\overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$. Probar

(i) todo cerrado en (X, τ) (respectivamente, todo abierto) es un conjunto $\sim$-saturado;

(ii) la proyección canónica es abierta y cerrada.

26.- Sean (X, τ), $A \subset X$ y la relación de equivalencia definida por $a \sim b$ para $a, b \in A$. Sea $p\colon (X, \tau) \longrightarrow (X/\sim, \tau_\sim)$ la proyección canónica y $a \in A$. Se pide:

(i) si τ es la topología A-inclusión, probar que $\tau_\sim$ es la topología $p(a)$-inclusión;

(ii) si τ es la topología A-exclusión, probar que $\tau_\sim$ es la topología $p(a)$-exclusión.

27.- Sean (X, τ) y $(X \times [0,1], \tau \times \tau_u)$. Sobre $X \times [0,1]$, se considera la relación de equivalencia $(x,1) \sim (y,1)$, para cada $x, y \in X$. El cociente bajo esta relación se denota por $(C(X), \tau_\sim)$ y se llama *cono* de X. Probar que (X, τ) se identifica con el subespacio $(X \times \{0\}, \tau_\sim)$ de $(C(X), \tau_\sim)$.

Sea $(X \times [-1,1], \tau \times \tau_u)$. Sobre $X \times [-1,1]$, se considera la siguiente relación de equivalencia $(x,1) \simeq (y,1)$ y $(x,-1) \simeq (y,-1)$, para cada $x, y \in X$. El cociente se denota $(S(X), \tau_\simeq)$ y se llama *suspensión* de X. Probar

(i) $(S(X), \tau_\simeq)$ es un cociente de $(C(X), \tau_\sim)$;

(ii) toda aplicación continua entre dos espacios topológicos induce otra entre los conos (respectivamente, las suspensiones) correspondientes;

(iii) $(S(\mathbb{S}^n), \tau_\simeq)$ es homeomorfo a $(\mathbb{S}^{n+1}, \tau_{us})$, para cada $n \geq 0$;

(iv) $(C(\mathbb{S}^1), \tau_\sim)$ es homeomorfo a la bola cerrada unidad de $(\mathbb{R}^2, \tau_u)$. Para $n \in \mathbb{N}$, $(C(\mathbb{S}^n), \tau_\sim)$ es homeomorfo a la bola cerrada unidad de $(\mathbb{R}^{n+1}, \tau_u)$;

(v) $(C(X), \tau_\sim)$, se obtiene adjuntando $(X \times [0,1], \tau_X \times \tau_u)$ a $(\{y_0\}, \tau_{dis})$, por la aplicación $f(X \times \{1\}) = y_0$;

(vi) la suspensión de X, $(S(X), \tau_\simeq)$, se obtiene adjuntando $(X \times [-1,1], \tau_X \times \tau_u)$ al espacio $(Y = \{a,b\}, \tau_{dis})$ por la función $g(X \times \{1\}) = a$ y $g(X \times \{-1\}) = b$;

(vii) si se adjunta $(X \times [0,1] \times Y, \tau_X \times \tau_u \times \tau_Y)$ a la unión disjunta $(X \cup Y, \tau_\Sigma)$ mediante la aplicación $f(x,0,y) = x$ y $f(x,1,y) = y$, se obtiene el "*join*"de X e Y, denotado $(X * Y, \tau_*)$. Entonces, $(X * \{x_0\}, \tau_*)$ es homeomorfo a $(C(X), \tau_\sim)$ y $(X * \mathbb{S}^0, \tau_*)$ es homeomorfo a $(S(X), \tau_\simeq)$.

28.- Sea $(X = (\mathbb{R} \times \{0\}) \cup (\mathbb{R} \times \{1\}), \tau_\Sigma)$ la suma disjunta de dos copias de la recta real. Sea $\sim$ la relación de equivalencia definida por $(x, 0) \sim (x, 1)$ si $x \neq 0$. Se pide

(i) estudiar si el espacio cociente es T_1 o T_2;

(ii) si p la proyección canónica, ¿es p abierta?

29.- Sean $(X = ([-1, 1] \times \{1\}) \cup ([-1, 1] \times \{-1\}), \tau_{us})$ y la relación de equivalencia que identifica los puntos $(-1, 1) \sim (-1, -1)$ y $(1, 1) \sim (1, -1)$. Probar que el cociente $(X/ \sim, \tau_\sim)$ es homeomorfo a $(\mathbb{S}^1, \tau_u)$.

30.- Sobre $([-1, 1], \tau_u)$, se identifican los puntos $x \sim -x$ si $x \neq 1, -1$. Probar que la proyección canónica es abierta y que el espacio cociente bajo esta relación es T_1, pero no T_2.

31.- Sea $(\mathbb{R}, \tau)$, donde τ es la topología $\{0\}$-inclusión. Se identifican los puntos $x \sim -x$, para $x \in \mathbb{R}$. Demostrar que el espacio cociente $(\mathbb{R}/ \sim, \tau_\sim)$ es homeomorfo a $([0, \infty), \tau_0)$ (donde τ_0 es la topología $\{0\}$-inclusión) y estudiar si la proyección canónica es abierta o cerrada.

32.- Sobre $(\mathbb{R}^2, \tau_u \times \tau_{dis})$ se define la relación de equivalencia $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$ si y sólo si $x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2$. Se pide

(i) demostrar que el cociente $(\mathbb{R}^2/ \sim, \tau_\sim)$ es homeomorfo a $([0, \infty), \tau_{us})$;

(ii) estudiar si la proyección canónica es abierta o cerrada;

(iii) hacer el mismo ejercicio, tomando como espacio de partida $(\mathbb{R}^2, \tau_u)$.

33.- Se considera en $(\mathbb{R}, \tau_u)$ la relación de equivalencia $x \sim y$ si y sólo si $x - y \in \mathbb{Z}$. Demostrar que el cociente $(\mathbb{R}/ \sim, \tau_\sim)$ es homeomorfo a $(\mathbb{S}^1, \tau_u)$.

34.- Sea $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ el semiplano superior cerrado. Se considera:

(1) para cada punto $p = (x, y) \in \Gamma$ con $y > 0$, $\mathcal{B}_p = \{\overset{\circ}{B} (p, \epsilon) \cap X : \varepsilon > 0\}$,

(2) para cada $p = (x, 0) \in \Gamma$, $\mathcal{B}_p = \{(\overset{\circ}{B} (p, \epsilon) \cap P) \cup \{p\} : \varepsilon > 0\}$.

Se pide:

(i) demostrar que queda así definido un sistema fundamental de entornos para una topología τ sobre Γ. Compararla con τ_u y la de Moore τ_{moo} (problema 25 en el apartado 2.7);

(ii) se define sobre Γ la relación de equivalencia: $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$ si y sólo si $x_1 = x_2$. Estudiar si la proyección canónica $p\colon (\Gamma, \tau) \longrightarrow (\Gamma/ \sim, \tau_\sim)$ es abierta o cerrada;

(iii) demostrar que el cociente $(\Gamma/\sim,\tau_\sim)$ es homeomorfo a la recta real.

35.- Se consideran los subespacios euclídeos $([0,1]^n,\tau_u)$ y

$$(\widetilde{[0,1]^n}=\{(x_1,\cdots,x_n)\in[0,1]^n:\exists j\in\{1,\cdots,n\}:x_j=0 \text{ ó } 1\},\tau_u).$$

Se define una relación de equivalencia sobre $[0,1]^n$ por: $x\sim y$ si $x,y\in\widetilde{[0,1]^n}$. Probar que el cociente $([0,1]^n/\sim,\tau_\sim)$ es homeomorfo a $(\mathbb{S}^n,\tau_u)$.

36.- En el plano euclídeo, se considera la relación de equivalencia $(a,x)\sim(a,y)$, para cada $x,y\in\mathbb{R}$, si $a\neq 0$. Se pide describir el espacio cociente. Si p denota la proyección canónica, estudiar la convergencia de las sucesiones $\{p(0,\frac{1}{n})\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{p(\frac{1}{n},0)\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{p(n,\frac{1}{n})\}_{n\in\mathbb{N}}$.

37.- Sobre $(\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:y\geq 0\},\tau_u)$, se define la relación de equivalencia $(x_1,y_1)\sim(x_2,y_2)$ si $y_1=y_2\neq 0$ ó $y_1=y_2=0$ y $x_1=x_2$. Probar que la proyección canónica no es cerrada.

38.- Una *n-celda* es un espacio homeomorfo al disco cerrado $(\mathbb{D}^n,\tau_u)$. Si consideramos $fr(\mathbb{D}^n)=\mathbb{S}^{n-1}\subset\mathbb{D}^n$, (Y,τ_Y) un espacio topológico y $f\colon(\mathbb{S}^{n-1},\tau_u)\longrightarrow(Y,\tau_Y)$ una aplicación continua, se dice que $Y_f=\mathbb{D}^n\cup_f Y$ es el *espacio obtenido al adjuntar una n-celda a Y por f*. Se pide probar:

(i) la botella de Klein $(\mathbb{K}^2,\tau_u)$ se obtiene adjuntando una 2-celda a $(\mathbb{S}^1\vee\mathbb{S}^1,\tau_\sim)$;

(ii) si $(Y,\tau_Y)=(\mathbb{S}^1,\tau_u)$ y $f\colon(\mathbb{S}^1,\tau_u)\longrightarrow(Y,\tau_Y)$ es $f(z)=z^2$, entonces, $\mathbb{D}^2\cup_f Y$ es el plano proyectivo real.

39.- Si $p\colon([0,1]^2,\tau_u)\longrightarrow(\mathbb{M},\tau_u)$ es la aplicación cociente, el subespacio de $\mathbb{M}$ definido por $p([0,1]\times\{0,1\})$ (la arista de la banda) es homeomorfo a $(\mathbb{S}^1,\tau_u)$. Probar que la botella de Klein es homeomorfa al espacio de adjunción de dos bandas de Möbius por la aplicación identidad que identifica sus aristas.

40.- Se puede probar (ver [BvR]) que la botella de Klein no puede embeberse en $\mathbb{R}^3$, pero si en $\mathbb{R}^4$: en efecto, se considera $f\colon([-1,1]^2,\tau_u)\longrightarrow(\mathbb{R}^4,\tau_u)$ dada por

$$f(x,y)=\left((1+|x|)\cos\pi y,(1+|x|)\sin\pi y,\sin\pi x\cos\frac{\pi y}{2},\sin\pi x\sin\frac{\pi y}{2}\right).$$

Entonces, f es continua y pasa al cociente dado en los ejemplos 5.4.

41.- Una superficie es *orientable* si no contiene ningún subespacio homeomorfo a la banda de Möbius. En caso contrario se dice *no orientable*. Se pide probar:

(i) el plano proyectivo real es homeomorfo al espacio de adjunción de una banda de Möbius y un disco cerrado por la aplicación identidad que identifica la arista de $\mathbb{M}$ y la frontera del disco;

(ii) la botella de Klein y el plano proyectivo real son no orientables;

(iii) la orientabilidad es una propiedad topológica;

(iv) al contrario que las superficies no orientables, toda superficie orientable puede embeberse en $\mathbb{R}^3$;

(v) el plano proyectivo real puede embeberse en $\mathbb{R}^4$ (aunque no en $\mathbb{R}^3$): se considera la función $f\colon (\mathbb{R}^3, \tau_{us}) \longrightarrow (\mathbb{R}^4, \tau_{us})$ dada por $f(x, y, z) = (x^2 - y^2, xy, yz, xz)$. La imagen por f de dos puntos antipodales de $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ es el mismo punto de $\mathbb{R}^4$, por lo que esta función pasa al cociente dado en los ejemplos 5.4, definiendo un embebimiento del $\mathbb{RP}^2$ en $\mathbb{R}^4$.

42.- El *toro generalizado* es un producto de esferas $(\mathbb{S}^m \times \mathbb{S}^n, \tau_{us})$. El n-cubo $[0, 1]^n \subset \mathbb{R}^n$ tiene como frontera $fr([0, 1]^n) = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n :$ existe i tal que $x_i = 0$ ó $1\}$. Así, $fr([0, 1]^m \times [0, 1]^n = [0, 1]^{m+n}) = (fr([0, 1]^m) \times [0, 1]^n) \cup ([0, 1]^m \times fr([0, 1]^n))$. Sean $z_m \in \mathbb{S}^m$ y $z_n \in \mathbb{S}^n$ puntos base. Existe una aplicación$f_k\colon ([0, 1]^k, \tau_{us}) \longrightarrow (\mathbb{S}^k, \tau_{us})$, tal que $f_k(fr([0, 1]^k)) = z_k$, para $k \in \{m, n\}$, que es un *h*omeomorfismo relativo, es decir, tal que la restricción $f_k|_{[0,1]^k - fr([0,1]^k)}\colon ([0, 1]^k - fr([0, 1]^k), \tau_{us}) \longrightarrow (\mathbb{S}^k - z_k, \tau_{us})$ es un homeomorfismo. Tomando productos cartesianos en ambas dimensiones, se obtiene una aplicación $f_m \times f_n\colon ([0, 1]^m \times [0, 1]^n, \tau_{Tyc}) \longrightarrow (\mathbb{S}^m \times \mathbb{S}^n, \tau_{Tyc})$, que lleva $fr([0, 1]^{m+n})$ sobre $\mathbb{S}^m \vee \mathbb{S}^n$. Concluir, que $\mathbb{S}^m \times \mathbb{S}^n$ es homeomorfo al espacio obtenido adjuntando una $(m+n)$-celda a $\mathbb{S}^m \vee \mathbb{S}^n$ vía la aplicación $f_m \times f_n\colon fr([0, 1]^{m+n}) \simeq \mathbb{S}^{m+n-1} \longrightarrow \mathbb{S}^m \vee \mathbb{S}^n$.

43.- Sea el espacio $(\mathbb{R}^n, \tau_{Zar})$. Se define sobre $\mathbb{R}^n$ la relación $(x_1, \ldots, x_n) \sim (y_1, \ldots, y_n)$ si y sólo si $x_i = y_i$ para $1 \leq i \leq n - 1$. Probar que el espacio cociente $(\mathbb{R}^n/ \sim, \tau_\sim)$ es homeomorfo a $(\mathbb{R}^{n-1}, \tau_{Zar})$.

44.- *Separado de un espacio topológico*: sea (X, τ) un espacio topológico. Se define la siguiente relación binaria sobre X: para cada $x, y \in X$, $x \simeq y$ si para cada espacio topológico T_2 (Y, τ_Y) y toda aplicación continua $f\colon (X, \tau) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$, se tiene $f(x) = f(y)$. Se pide probar

(i) $\simeq$ es una relación de equivalencia sobre X;

(ii) el espacio cociente $(X/ \simeq, \tau_\simeq)$ es T_2;

(iii) para cada espacio T_2 (Y, τ_Y) y toda aplicación continua $f\colon (X, \tau) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$, existe una aplicación continua $f\colon (X/ \simeq, \tau_\simeq) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$, de manera que $f = g \circ p$, donde $p\colon (X, \tau) \longrightarrow (X/ \simeq, \tau_\simeq)$ es la aplicación cociente.

45.- *El espacio proyectivo real de dimensión* n: en $(\mathbb{R}^{n+1}-\{0\},\tau_u)$ se identifican dos puntos $(x_1,\dots x_{n+1})\simeq(y_1,\dots y_{n+1})$ si y sólo si existe $\lambda\in\mathbb{R}-\{0\}$ tal que $x_i=\lambda y_i$ para $i\in\{1,\dots,n\}$. Al cociente $(\mathbb{R}^{n+1}-\{0\}/\simeq,\tau_{\simeq})$ se le llama *e*spacio proyectivo real de dimensión n y se suele denotar $(\mathbb{RP}^n,\tau_u)$. Se pide probar:

(i) $(\mathbb{RP}^n,\tau_u)$ es homeomorfo al espacio cociente de (iii) en los ejemplos 5.4;

(ii) $(\mathbb{RP}^n,\tau_u)$ se obtiene al adjuntar al espacio proyectivo real de dimensión $n-1$, $(\mathbb{RP}^{n-1},\tau_u)$, una n-celda a través de la aplicación canónica $p_{n-1}\colon \mathbb{S}^{n-1}\longrightarrow\mathbb{RP}^{n-1}$;

(iii) $\mathbb{RP}^0$ es un punto, $(\mathbb{RP}^1,\tau_u)$ es homeomorfo a $(\mathbb{S}^1,\tau_u)$ y $(\mathbb{RP}^n,\tau_u)$ es homeomorfo al espacio métrico cuyos puntos son rectas de $\mathbb{R}^{n+1}$ pasando por el origen, donde la métrica se define como el ángulo entre rectas (que toma valores en $[0,\frac{\pi}{2}]$);

(iv) sea $\pi_n\colon(\mathbb{R}^{n+1}-\{0\},\tau_{us})\longrightarrow(\mathbb{RP}^n,\tau_u)$ la proyección canónica. Probar que es abierta, pero no cerrada;

(v) probar que el conjunto $A=\{(x,y)\in(\mathbb{R}^{n+1}-\{0\})\times(\mathbb{R}^{n+1}-\{0\}):\pi_n(x)=\pi_n(y)\}$ es cerrado en $((\mathbb{R}^{n+1}-\{0\})\times(\mathbb{R}^{n+1}-\{0\}),\tau_{Tyc})$ y deducir que $(\mathbb{RP}^n,\tau_u)$ es T_2.

46.- *El espacio proyectivo complejo de dimensión* n: en el espacio complejo $(\mathbb{C}^{n+1},\tau_u)$, se considera el subespacio

$$\mathbb{S}^{2n+1}=\{z=(z_1,\dots,z_{n+1})\in\mathbb{C}^{n+1}:\|z\|^2=\|z_1\|^2+\cdots+\|z_{n+1}\|^2=1\}.$$

Se define sobre $\mathbb{S}^{2n+1}$ la relación de equivalencia: $z\sim z'$ si y sólo si existe $c\in\mathbb{C}$ con $\|c\|=1$ y $z'=cz$. El cociente bajo esta relación de equivalencia es el *espacio proyectivo complejo de dimensión* n y se suele denotar $(\mathbb{CP}^n,\tau_u)$. Se pide probar:

(i) el espacio proyectivo complejo de dimensión n, $(\mathbb{CP}^n,\tau_u)$ se obtiene al adjuntar al espacio proyectivo complejo de dimensión $n-1$, $(\mathbb{CP}^{n-1},\tau_u)$, una $2n$-celda a través de la aplicación canónica $q_{n-1}\colon\mathbb{S}^{2n-1}\longrightarrow\mathbb{CP}^{n-1}$;

(ii) sea $q_n\colon(\mathbb{S}^{2n+1},\tau_u)\longrightarrow(\mathbb{CP}^n,\tau_u)$ la aplicación cociente. $\mathbb{S}^{2n+1}$ puede pensarse como un *producto torcido* de $\mathbb{CP}^n$ y $\mathbb{S}^1$: se dice que $\mathbb{S}^{2n+1}$ es un fibrado sobre $\mathbb{CP}^n$, de fibra $\mathbb{S}^1$;

(iii) $\mathbb{CP}^0$ es un punto y $(\mathbb{CP}^1,\tau_u)$ es homeomorfo a $(\mathbb{S}^2,\tau_u)$. La *aplicación de Hopf* es aplicación cociente $q_1\colon(\mathbb{S}^3,\tau_u)\longrightarrow(\mathbb{CP}^1,\tau_u)$, función de enorme importancia en Topología y Geometría;

(iv) $(\mathbb{CP}^n,\tau_u)$ es homeomorfo al espacio métrico cuyos puntos son líneas complejas de $\mathbb{C}^{n+1}$ pasando por el origen, donde la métrica se define como el ángulo entre rectas (que toma valores en $[0,\frac{\pi}{2}]$).

47.- Para cada homeomorfismo $h\colon (\mathbb{S}^{n-1},\tau_u) \longrightarrow (\mathbb{S}^{n-1},\tau_u)$ probar que el espacio de adjunción $(\mathbb{D}^n \cup_h \mathbb{D}^n, \tau_{\sim_h})$ es homeomorfo a $(\mathbb{S}^n,\tau_u)$.

48.- Probar las siguientes propiedades para superficies:

(i) $(\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1,\tau_u)$ es homeomorfo al espacio de adjunción de dos cilindros $(\mathbb{S}^1\times[0,1],\tau_u)$ a través de la aplicación identidad de una copia de cada círculo frontera en una copia del otro;

(ii) $(\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^2,\tau_u)$ es homeomorfo al espacio de adjunción de dos toros sólidos $(\mathbb{S}^1\times\mathbb{D}^2,\tau_u)$ a través de la aplicación identidad entre los toros frontera $(\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1,\tau_u)$;

(iii) $(\mathbb{S}^3,\tau_u)$ es homeomorfo al espacio de adjunción de dos toros sólidos $(\mathbb{S}^1\times\mathbb{D}^2,\tau_u)$ a través de la aplicación entre los toros frontera $h\colon (\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1,\tau_u) \longrightarrow (\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1,\tau_u)$ definida por $h(x,y)=(y,x)$: esta aplicación intercambia los meridianos y paralelos de los toros frontera.

Compacidad

Los átomos pesan, pero tú eres leve,
semejante a las paredes de los conjuntos, a la teoría de los bordes
(porque me hundo al mirarte, en un océano de órbitas,
en una corriente levógira de espuma de elipses,
en un caudal de antimateria dis olv e n t e)
y aunque los átomos tengan masa, y cuerpo,
tú eres leve,
como si no quisieras otra órbita,
que la pureza del hueco.

Colibrí en "Química"
Sofía Rhei

La compacidad es una propiedad que proporciona a los espacios topológicos que la satisfacen una estructura similar a la que poseen los conjuntos cerrados y acotados en espacios euclídeos.

6.1. Espacios y conjuntos compactos

Definición 6.1. Un *cubrimiento* de X es una familia de conjuntos $\mathcal{U} = \{U_i : i \in I\}$, tales que $X = \bigcup_{i \in I} U_i$. Un *subrecubrimiento* de $\mathcal{U}$ es una subfamila $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ que aún cubre X.

Definición 6.2. Un espacio (X, τ) es *compacto*, si todo cubrimiento por abiertos de X posee un subrecubrimiento finito. Y $A \subset X$ es *compacto* si (A, τ_A) lo es.

Lema 6.1. *La compacidad es una propiedad absoluta, en el sentido de que, para ver si $A \subset X$ es compacto en (X, τ), basta con estudiar los cubrimientos de A por abiertos de (X, τ).*

Demostración: Si A es compacto y $\mathcal{U} = \{U_i : i \in I\}$ es una familia de abiertos en (X, τ) tal que $A \subset \bigcup_{i \in I} U_i$, entonces $\mathcal{U}_A = \{U_i \cap A : i \in I\}$ es un cubrimiento de A por abiertos en (A, τ_A). Y recíprocamente, si $\mathcal{V} = \{V_i : i \in I\}$ es un cubrimiento de A por abiertos en (A, τ_A), para cada $i \in I$ existe $U_i \in \tau$ tal que $V_i = U_i \cap A$. Entonces $\mathcal{U} = \{U_i : i \in I\}$ es una familia de abiertos en (X, τ) que cubre A. ∎

Observación 6.1. En (X, τ):

1) los conjuntos finitos son compactos en cualquier espacio topológico;

2) en la definición de compacidad, pueden reemplazarse los abiertos por abiertos básicos e incluso por subbásicos (*teorema de la subbase de Alexander*);

3) si A es compacto en (X, τ) y $\tau' \subset \tau$, entonces A es compacto en (X, τ');

4) la unión finita de compactos es compacta, no sucede lo mismo con la intersección.

Ejemplos 6.1. Algunos ejemplos de espacios compactos son:

1) en (X, τ_{ind}), todo subconjunto es compacto;

2) en (X, τ_{dis}), los únicos compactos son los conjuntos finitos;

3) en (X, τ_A), B es compacto si y sólo si $B - A$ es finito;

4) en (X, τ^A), si $B \cup A \neq \emptyset$ B es compacto y si si $B \cup A = \emptyset$ B es compacto si y sólo si es finito;

5) en (X, τ_{cof}), todo subconjunto es compacto;

6) en (X, τ_{coc}), los únicos compactos son los conjuntos finitos;

7) en $(\mathbb{R}, \tau_{kol})$, A es compacto si y sólo si está acotado inferiormente e $\inf(A) \in A$;

8) en $(\mathbb{R}, \tau_u)$, A es compacto si y sólo si A es cerrado y acotado: $\mathbb{R}$ no es compacto pues $\mathcal{U} = \{(-n, n) : n \in \mathbb{N}\}$ es un cubrimiento sin subcubrimiento finito;

9) en $(\mathbb{R}, \tau_{sca})$, A es compacto si y sólo si A es acotado, $A \in \mathcal{C}_{sca}$ y $A \cap \mathbb{I}$ es finito;

10) en $(\mathbb{R}, \tau_{lac})$, A es compacto si y sólo si ($0 \in A \in \mathcal{C}_{lac}$) o ($0 \notin A$ y A es compacto usual).

Definición 6.3. Una familia de subconjuntos de X, $\mathcal{F}$, tiene la *propiedad de intersección finita*, si la intersección de cualquier subcolección finita de elementos de $\mathcal{F}$ es no vacía.

Teorema 6.2. *En* (X,τ) *es compacto si y sólo si cualquier familia* $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}$ *con la propiedad de intersección finita, verifica* $\bigcap\limits_{F\in\mathcal{F}} F \neq \emptyset$*;*

Proposición 6.3. *La compacidad es débilmente hereditaria.*

Demostración: Si (X,τ) es compacto y $A \in \mathcal{C}$, sea $\mathcal{U} = \{U_i : i \in I\}$ un cubrimiento de A por abiertos de (X,τ). Entonces $\mathcal{U} = \{U_i : i \in I\} \cup \{X - A\}$ es un cubrimiento de X por abiertos en (X,τ). Existe $J \subset I$, J finito tal que $X = \bigcup\limits_{i\in J} U_j \cup (X - A)$. Entonces $A \subset \bigcup\limits_{i\in J} U_j$. ∎

Contraejemplo 6.1. La compacidad no es hereditaria: $([0,1],\tau_u)$ es un espacio compacto, pero $((0,1),\tau_u)$ no lo es.

Proposición 6.4. *La imagen continua de un compacto es un conjunto compacto.*

Observación 6.2. Como la compacidad se preserva bajo aplicaciones continuas, es una propiedad divisible.

Corolario 6.5. *La compacidad es una propiedad topológica.*

6.2. Productos de espacios compactos

Teorema 6.6. *Un producto (finito) de espacios es compacto si y sólo si cada espacio factor lo es.*

Demostración: Sean (X,τ_X) e (Y,τ_Y) espacios topológicos y $(X \times Y, \tau_{Tyc})$ su producto. Si $(X \times Y, \tau_{Tyc})$ es compacto, como las proyecciones son continuas y sobreyectivas, por la proposición 6.4 cada espacio factor es compacto.

Supongamos ahora que (X,τ_X) e (Y,τ_Y) son compactos. Sea $\mathcal{W} = \{U_i \times V_i : i \in I\}$ un cubrimiento de $X \times Y$ por abiertos básicos, es decir, $U_i \in \tau_X$ y $V_i \in \tau_Y$. Para cada $x \in X$, $\{x\} \times Y$ es compacto, luego existe $I_x \subset I$ finito tal que $\{x\} \times Y \subset \bigcup\limits_{i\in I_x} U_i \times V_i$. Puede suponerse además que $x \in U_i$ para cada $i \in I_x$. Si $U_x^* = \bigcap\limits_{i\in I_x} U_i$, es claramente $U_x^* \times Y \subset \bigcup\limits_{i\in I_x} (U_i \times V_i)$. $\mathcal{U}^* = \{U_x^* : x \in X\}$ es un cubrimiento por abiertos de (X,τ_X), que es compacto, luego existe $\{x_1,\dots,x_n\} \subset X$ tal que $X = U_{x_1}^* \cup \cdots \cup U_{x_n}^*$. Sea $I^* = I_{x_1} \cup \cdots \cup I_{x_n}$, subconjunto finito de I. Es fácil comprobar que $X \times Y \subset \bigcup\limits_{i\in I^*} (U_i \times V_i)$. ∎

6.3. Compacidad secuencial

Definición 6.4. Un espacio topológico (X, τ) *secuencialmente compacto* si toda sucesión en (X, τ) posee una subsucesión convergente.

En general, no hay relación entre las nociones de compacidad y de compacidad secuencial.

Definición 6.5. Un espacio topológico (X, τ) posee la *propiedad de Bolzano-Weierstrass*, si todo subconjunto infinito en X posee un punto de acumulación.

Proposición 6.7. *Si (X, d) es un espacio métrico, la propiedad de Bolzano-Weierstrass, la compacidad secuencial y la compacidad son propiedades equivalentes.*

6.4. Compacidad en espacios de Hausdorff

En los espacios de Hausdorff, la compacidad proporciona propiedades especiales.

Lema 6.8. *Sea (X, τ) de Hausdorff, $A \subset X$ compacto y $x \notin A$. Existen $U, V \in \tau$ disjuntos, tales que $x \in U$ y $A \subset V$.*

Demostración: Para cada $a \in A$, es $x \neq a$. Por la propiedad de Hausdorff, existen $U_a, V_a \in \tau$, disjuntos y tales que $x \in U_a$ y $a \in V_a$. $\mathcal{U} = \{V_a : a \in A\}$ es un cubrimiento de A por abiertos de X. Existen $\{a_1, \dots, a_n\} \subset A$, tales que $A \subset V_{a_1} \cup \dots \cup V_{a_n}$. Basta con tomar $U = U_{a_1} \cap \dots \cap U_{a_n}$ y $V = V_{a_1} \cup \dots \cup V_{a_n}$. ∎

Proposición 6.9. *En un espacio (X, τ) de Hausdorff, si $A \subset X$ es compacto, entonces $A \in \mathcal{C}$.*

Demostración: Si $x \notin A$, por el lema 6.8, existen $U, V \in \tau$ disjuntos, tales que $x \in U$ y $A \subset V$. Es $x \in U \subset X - V \subset X - A$, es decir, $X - A \in \tau$. ∎

Contraejemplo 6.2. La propiedad de Hausdorff es esencial: en (X, τ_{ind}), cualquier conjunto es compacto, pero no todo conjunto es cerrado.

Corolario 6.10. *En un espacio (X, τ) compacto y de Hausdorff, $A \subset X$ es compacto si y sólo si $A \in \mathcal{C}$.*

Los conjuntos compactos en espacios de Hausdorff pueden pensarse como una generalización de los puntos, en el siguiente sentido:

Proposición 6.11. *Si A y B son compactos disjuntos en (X, τ) de Hausdorff, existen abiertos disjuntos U y V, tales que $A \subset U$ y $B \subset V$.*

Demostración: $A \subset X - B$, luego para cada $a \in A$, es $a \notin B$. Por el lema 6.8, existen $U_a, V_a \in \tau$ disjuntos, tales que $a \in U_a$ y $B \subset V_a$. Como A es compacto, existe $\{a_1, \dots, a_n\} \subset A$, tal que $A \subset U_{a_1} \cup \dots \cup U_{a_n}$. Basta con tomar $U = U_{a_1} \cup \dots \cup U_{a_n}$ y $V = V_{a_1} \cap \dots \cap V_{a_n}$. ∎

Contraejemplo 6.3. En $(\mathbb{R}, \tau_{ind})$, $A = \{1\}$ y $B = \{2\}$ son compactos disjuntos, sin abiertos que los separen.

Proposición 6.12. *Sea $f\colon (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ continua. Si (X, τ_X) es compacto e (Y, τ_Y) es de Hausdorff, entonces f es cerrada.*

Demostración: Sea $A \in \mathcal{C}_X$, por la proposición 6.3, A es compacto, luego $f(A)$ también lo es, por continuidad. Como (Y, τ_Y) es de Hausdorff, la proposición 6.9 garantiza que $f(A) \in \mathcal{C}_Y$. ∎

Corolario 6.13. *Si $f\colon (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ es continua y biyectiva, (X, τ_X) es compacto e (Y, τ_Y) es de Hausdorff, entonces f es un homeomorfismo.*

Contraejemplo 6.4. $f\colon ([0,1), \tau_u) \longrightarrow (\mathbb{S}^1, \tau_u)$ dada por $f(t) = e^{2\pi i t}$ es continua y biyectiva, pero no es un homeomorfismo.

6.5. Problemas

1.- Si la sucesión $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ converge a x_0 en (X, τ), probar que $Rg\{x_n\} \cup \{x_0\}$ es un conjunto compacto.

2.- Caracterizar los compactos de $(\mathbb{R}^n, \tau_u)$.

3.- Se dice que (X, τ) es KC, si todo compacto en (X, τ) es cerrado. Se trata de un axioma de separación intermedio entre el de Hausdorff y el de Fréchet (ver ejercicio **7**, problemas 2.7). Si (X, τ) es KC, probar:

(i) todo conjunto finito es cerrado;

(ii) la intersección arbitraria de conjuntos compactos es compacta;

(iii) las sucesiones poseen límites únicos.

4.- Sea (X, τ) un espacio topológico. Probar:

(i) la unión de finita de compactos en X es un conjunto compacto;

(ii) si (X, τ) es de Hausdorff, la intersección arbitraria de compactos es un conjunto compacto;

(iii) si (X, τ) es de Hausdorff y A es compacto, entonces A' y $\overline{A}$ son compactos.

5.- Sea (X, τ) un espacio compacto y de Hausdorff y $f\colon (X, \tau) \longrightarrow (X, \tau)$ una aplicación continua. Demostrar que existe un cerrado no vacío $F \subset X$, tal que $f(F) = F$.

6.- Sea (X, τ) un espacio compacto y $\mathcal{F}$ una familia de funciones $f\colon (X, \tau) \longrightarrow (\mathbb{R}, \tau_u)$ continuas tal que:

(i) para $f, g \in \mathcal{F}$, es $f.g \in \mathcal{F}$ y

(ii) para cada $x \in X$, existen $f \in \mathcal{F}$ y $U_x \in \mathcal{N}_x$, tales que $f(z) = 0$ para $z \in U_x$.

Probar que la función idénticamente nula es un elemento de $\mathcal{F}$.

7.- Sea (X, τ_X) un espacio compacto, (Y, τ_Y) un espacio de Hausdorff y la *proyección paralela al factor compacto* $p_Y\colon (X \times Y, \tau_{Tyc}) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$. Probar que p_Y es cerrada.

8.- Sean (X, τ_X) de Hausdorff e (Y, τ_Y) compacto y de Hausdorff. Probar que la función $f\colon (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ es continua si y sólo si su grafo $G_f = \{(x, f(x) : x \in X\}$ es cerrado en $(X \times Y, \tau_{Tyc})$.

9.- En $([0, 1], \tau_u)$ se define la relación de equivalencia R dada por: xRy si y sólo si $x = y$ ó $\{x, y\} \subset \{0, \frac{1}{2}\}$. Sea p la aplicación canónica, probar:

(i) p es cerrada y no es abierta;

(ii) el espacio cociente resultante es compacto y de Hausdorff.

10.- Sea $((0, 1), \tau)$, donde $\tau = \{(0, 1), \emptyset\} \bigcup \{(0, 1 - \frac{1}{n}), n > 1\}$. Estudiar la compacidad de los abiertos y los cerrados de $(0, 1)$.

11.- Sea $([0, 1], \tau)$, donde τ es la topología definida por:

(i) para cada $x \in (0, 1)$, $\{x\}$ es abierto y cerrado;

(ii) los entornos básicos de 0 son los usuales;

(iii) los entornos básicos de 1 son de la forma $[0, 1] - F$, donde $F \subset [0, 1)$ es finito o el rango de una sucesión que converge a 0 usualmente.

Probar que este espacio es de Hausdorff y compacto.

12.- Sean $X = \{a, b\}$ y $(\mathbb{R} \times X, \tau_u \times \tau_{ind})$. Demostrar que los conjuntos

$$A = [0, 1) \times \{a\} \cup [1, 2] \times \{b\} \text{ y } B = [0, 1] \times \{a\} \cup (1, 2] \times \{b\}$$

son compactos, pero que $A \cap B$ no lo es.

13.- Caracterizar los conjuntos compactos en los espacios topológicos siguientes:

(i) $([-1, 1], \tau)$, donde $\tau = \{U \subset X : 0 \notin U \text{ ó } (-1, 1) \subseteq U\}$;

(ii) la recta de Sorgenfrey, la cofinita, la connumerable, la de Kolmogorov, la enlazada o la Scattered;

(iii) el plano de Moore, el radial o el Slotted.

14.- Sea $(X, \leq)$ un conjunto totalmente ordenado y τ la topología del orden sobre X. Probar que (X, τ) es compacto si y sólo si todo subconjunto no vacío posee supremo e ínfimo.

15.- Una aplicación $f \colon (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ se llama *perfecta*, si es una sobreyección continua y cerrada con la propiedad de que para cada $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ es compacto. Si f es perfecta, probar:

(i) si (X, τ_X) es de Hausdorff, (Y, τ_Y) es de Hausdorff;

(ii) si (Y, τ_Y) es compacto, (X, τ_X) es compacto;

(iii) para cada K compacto en (Y, τ_Y), $f^{-1}(K)$ es compacto en (X, τ_X).

16.- Sea (X, τ_X) compacto y $f \colon (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ una aplicación continua. Probar que el grafo de f es compacto en $(X \times Y, \tau_{Tyc})$.

17.- Sea (X, τ) compacto y $\{K_n : n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión decreciente de cerrados. Probar que su intersección es no vacía.

18.- Probar que la intersección de cualquier familia de conjuntos cerrados y compactos en (X, τ) es un conjunto cerrado y compacto.

19.- Probar el *Teorema de Kuratowski*: un espacio de Hausdorff (X, τ_X) es compacto si y sólo si para cada espacio topológico (Y, τ_Y), la proyección $p_Y \colon (X \times Y, \tau_{Tyc}) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ es cerrada.

20.- Probar el *Teorema de Alexandroff*: sea (X,τ) un espacio compacto y de Hausdorff y R una relación de equivalencia cerrada, es decir, $p\colon (X,\tau)\longrightarrow(X/R,\tau_R)$ es cerrada). Se pide:

(i) probar que existe un único (salvo homeomorfismos) espacio de Hausdorff (Y,τ_Y), y una función $f\colon (X,\tau)\longrightarrow(Y,\tau_Y)$ continua y sobreyectiva, tal que $R = R(f)$ (donde $xR(f)y$ si y sólo si $f(x)=f(y)$). Además, (Y,τ_Y) es compacto;

(ii) recíprocamente, para cada función continua $f\colon (X,\tau)\longrightarrow(Y,\tau_Y)$ de un espacio compacto y de Hausdorff (X,τ) sobre un espacio de Hausdorff (Y,τ_Y), la relación de equivalencia $R(f)$ es cerrada.

21.- Sea el espacio proyectivo real de dimensión n (ver ejercicio **45**, problemas 5.6), $(\mathbb{RP}^n,\tau_u)$. Se pide:

(i) sea $\pi_n\colon (\mathbb{R}^{n+1}-\{0\},\tau_u)\longrightarrow(\mathbb{RP}^n,\tau_u)$ la aplicación canónica. Probar que es abierta, pero no cerrada;

(ii) probar que $\Gamma = \{(x,y)\in(\mathbb{R}^{n+1}-\{0\})\times(\mathbb{R}^{n+1}-\{0\}) : x\simeq y\}$ es cerrado y deducir que $(\mathbb{RP}^n,\tau_u)$ es de Hausdorff;

(iii) sea $\sim$ la relación de equivalencia sobre $\mathbb{S}^n$ obtenida por restricción de $\simeq$. Probar que el espacio cociente $(\mathbb{S}^n/\sim,\tau_\sim)$ es compacto;

(iv) sea ψ_n la restricción de π_n a $\mathbb{S}^n$. Probar que ψ_n es continua y define un homeomorfismo de $(\mathbb{S}^n/\sim,\tau_\sim)$ sobre $(\mathbb{RP}^n,\tau_u)$, por lo tanto el espacio proyectivo real de dimensión n es compacto;

(v) sea $g\colon (\mathbb{S}^1,\tau_u)\longrightarrow(\mathbb{R}^2,\tau_u)$ definida por $g(x,y)=(x^2-y^2,2xy)$. Probar que $g(\mathbb{S}^1)=\mathbb{S}^1$ y que g define un homeomorfismo de $(\mathbb{S}^1/S_\sim,\tau_\sim)$ sobre $(\mathbb{S}^1,\tau_u)$, con lo cual el espacio proyectivo real de dimensión 1 es homeomorfo a $(\mathbb{S}^1,\tau_u)$.

Conexión

Entre nubes y rodeado de hierros.
Me enfado conmigo mismo
y con este mundo impuesto.

“Madera de ciudad”
Mikel Varas

7.1. Espacios y subconjuntos conexos

La conexión es una extensión de la idea de que un intervalo de la recta real es *de una pieza*. El problema de decidir cuando un espacio topológico es *de una pieza* se resuelve decidiendo cuando puede *romperse* en dos abiertos disjuntos.

Definición 7.1. Una *separación* de un espacio topológico (X, τ) está definida por un par de abiertos U y V, disjuntos, cuya unión es X. Si uno de los dos abiertos es vacío, se dice que la separación es *trivial*.

Definición 7.2. Un espacio topológico (X, τ) es *conexo*, si la única separación que existe es la trivial, y se dirá *disconexo* en caso contrario. Y $A \subset X$ es conexo, cuando lo es como subespacio.

Lema 7.1. *En (X, τ) son equivalentes:*

(i) (X, τ) es disconexo;

(ii) existen F y G cerrados disjuntos, no vacíos, cuya unión es X;

(iii) existe A un subconjunto propio de X que es abierto y cerrado a la vez;

(iv) existe A un subconjunto propio de X, de frontera vacía;

(v) existe una aplicación $f\colon (X, \tau) \longrightarrow (\{0, 1\}, \tau_{dis})$ continua y sobreyectiva.

Lema 7.2. *Si* (X, τ_1) *es conexo y* $\tau_2 \subset \tau_1$*, entonces* (X, τ_2) *es también conexo.*

Lema 7.3. *La conexión es una propiedad absoluta, en el sentido de que si* $B \subset A \subset X$*,* B *es conexo en* (X, τ) *si y sólo si lo es en* (A, τ_A)*.*

Proposición 7.4. *En* (X, τ)*, si* A *es abierto y cerrado a la vez y* C *es conexo, es necesariamente* $C \subset A$ *o* $C \subset X - A$*.*

Ejemplos 7.1. En los espacios topológicos conocidos, tenemos:

1) el vacío y los puntos son conexos en cualquier espacio topológico;

2) cualquier espacio en el que no existan abiertos (o cerrados) disjuntos es conexo;

3) en (X, τ_{ind}), todo subconjunto es conexo;

4) en (X, τ_{dis}), los únicos conexos no vacíos son los puntos;

5) en (X, τ_A), si $B \cap A = \emptyset$, B es conexo si y sólo si se reduce a un punto, y en caso contrario es conexo;

6) en (X, τ^A), si $B \cap A = \emptyset$, B es conexo si y sólo si se reduce a un punto, y en caso contrario es conexo;

7) en (X, τ_{cof}), A es conexo si y sólo si es vacío, se reduce a un punto o es infinito;

8) en (X, τ_{coc}), A es conexo si y sólo si es vacío, se reduce a un punto o es no contable;

9) en $(\mathbb{R}, \tau_{kol})$, todo conjunto es conexo;

10) en $(\mathbb{R}, \tau_{sca})$, los únicos conexos son el vacío y los puntos;

11) en $(\mathbb{R}, \tau_u)$, los conexos son los intervalos.

Definición 7.3. Un espacio (X, τ) es *totalmente disconexo* si sus únicos conexos son el vacío y los puntos.

Ejemplos 7.2. Los espacios discretos, la recta racional y el conjunto de Cantor (ver ejercicio **19**, problemas 3.5), son ejemplos de espacios totalmente disconexos.

Teorema 7.5. *La imagen continua de un conjunto conexo es conexo.*

Observación 7.1. La conexión es una propiedad divisible.

Corolario 7.6. *La conexión es una propiedad topológica.*

La conexión no es hereditaria, aunque existen algunos resultados parciales en subespacios:

Definición 7.4. En (X,τ), A y B se dicen *mutuamente separados* si $(A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap B)=\emptyset$.

Teorema 7.7. *En (X,τ), C es conexo si y sólo si no existen A y B mutuamente separados y no vacíos, cuya unión es C.*

Corolario 7.8. *En (X,τ), si A y B están mutuamente separados y C es un conjunto conexo tal que $C\subset A\cup B$, entonces $C\subset A$ ó $C\subset B$.*

Respecto a uniones de conjuntos conexos, se comprueban fácilmente las siguientes propiedades:

Teorema 7.9. *Dada una familia $\{C_i : i\in I\}$ de conjuntos conexos en (X,τ), tales que existe $i_0\in I$ con $C_i\cap C_{i_0}\neq\emptyset$ para cada $i\in I$, entonces su unión es un conjunto conexo.*

Corolario 7.10. *En (X,τ), se verifica:*

(i) dada una familia $\{C_i : i\in I\}$ de conjuntos conexos tales que $\bigcap\limits_{i\in I} C_i\neq\emptyset$, su unión es un conjunto conexo;

(ii) si para cada par de puntos $x,y\in X$ existe un conjunto conexo C_{xy} que los contiene, entonces X es conexo;

(iii) dada una familia $\{C_n : n\in\mathbb{N}\}$ de conjuntos conexos tales que $C_n\cap C_{n+1}\neq\emptyset$ para cada $n\in\mathbb{N}$, entonces su unión es un conjunto conexo.

Teorema 7.11. *Si C es conexo en (X,τ) y $B\subset X$ es tal que $C\subset B\subset\overline{C}$, entonces B es conexo. En particular, la clausura de cualquier conjunto conexo es un conjunto conexo.*

Ejemplo 7.1. Pueden usarse las anteriores propiedades para estudiar la conexión de algunos espacios:

1) $(\mathbb{R}^n,\tau_u)$ es conexo, ya que es la unión de todas las rectas que pasan por el origen de coordenadas: es unión de conexos (conjuntos homeomorfos a la recta real) que se cortan en un punto;

2) una bola abierta en $(\mathbb{R}^n,\tau_u)$ es un conjunto conexo, por ser homeomorfa al espacio total. Por lo tanto, su clausura –la bola cerrada correspondiente– también es un conjunto conexo; más aún, cualquier conjunto comprendido entre la bola abierta y cerrada es conexo.

Teorema 7.12. *El producto (finito) de espacios conexos es un espacio conexo si y sólo si cada espacio factor lo es.*

Demostración: Sean (X, τ_X) e (Y, τ_Y) espacios topológicos y $(X \times Y, \tau_{Tyc})$ su producto. Si el producto es conexo, al ser las proyecciones coordenadas continuas y sobreyectivas, cada espacio factor lo es. Recíprocamente, sean (X, τ_X) e (Y, τ_Y) conexos y supongamos que existe $f\colon (X \times Y, \tau_{Tyc}) \longrightarrow (\{0,1\}, \tau_{dis})$ continua y sobreyectiva. Existen $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in X \times Y$ tales que $f(a_1, b_1) = 0$ y $f(a_2, b_2) = 1$. Si $f(a_2, b_1) = 0$, sea $i_{a_2}\colon (Y, \tau_Y) \longrightarrow (X \times Y, \tau_{Tyc})$ el embebimiento $i_{a_2}(y) = (a_2, y)$. Así $f \circ i_{a_2}$ es continua. Pero $f \circ i_{a_2}(b_1) = 0$ y $f \circ i_{a_2}(b_2) = 1$, lo que contradice la conexión de (Y, τ_Y). De manera similar, se prueba que tampoco puede ser $f(a_2, b_2) = 0$. Luego no puede existir una tal f, y $(X \times Y, \tau_{Tyc})$ es conexo. ∎

7.2. Componentes conexas

Se describen las partes conexas *maximales* de un espacio topológico:

Definición 7.5. En (X, τ), dado $x \in X$, al mayor conexo $C(x)$ que contiene a x se le llama *componente conexa* del punto x.

Lema 7.13. *Las componentes conexas de (X, τ) constituyen una partición del espacio.*

Teorema 7.14. *En (X, τ), las componentes conexas son conjuntos cerrados.*

Proposición 7.15. *Sea (X, τ) un espacio topológico.*

(i) (X, τ) es conexo si y sólo si posee una única componente conexa (que es el espacio total);

(ii) (X, τ) es totalemente disconexo si y sólo si sus componentes conexas se reducen a puntos.

Proposición 7.16. *Sea (X, τ) un espacio topológico y C una componente conexa. Si A es conexo, entonces es $A \subset C$ o $A \subset X - C$.*

7.3. Conexión por caminos

La conexión es una propiedad difícil de manejar, al tratarse de una propiedad en sentido negativo: un espacio topológico es conexo si no existe una *separación* no trivial por abiertos disjuntos. La conexión por caminos posee la ventaja de ser una propiedad *algebraica* y en sentido positivo.

Definición 7.6. Dado un espacio topológico (X, τ), un *camino* en X es una aplicación continua $\sigma\colon ([0,1], \tau_u) \longrightarrow (X, \tau)$. Si $\sigma(0) = a$ y $\sigma(1) = b$, se dice que σ es un camino de a a b.

Definición 7.7. (X, τ) es *conexo por caminos*, si para todo par de puntos $a, b \in X$ existe un camino que los une.

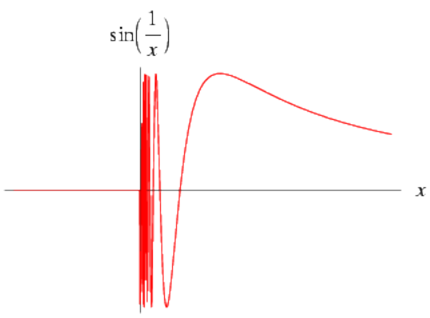
Proposición 7.17. *Si* (X, τ) *es conexo por caminos, es conexo.*

Demostración: Supongamos que (X, τ) no fuera conexo. Existen U y V abiertos disjuntos y no vacíos cuya unión es X. Sea $x \in U$ e $y \in V$ y $\sigma\colon ([0,1], \tau_u) \longrightarrow (X, \tau)$ un camino uniendo x e y. Entonces, $\sigma^{-1}(U)$ y $\sigma^{-1}(V)$ son abiertos en $([0,1], \tau_u)$ y son una separación no trivial de $[0,1]$, lo cual es un absurdo. ∎

El recíproco no es cierto:

Ejemplo 7.2. La *curva seno topológico* es el subespacio del plano euclídeo

$$A = ((-\infty, 0] \times \{0\}) \cup \left\{ \left(x, \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right) : x > 0 \right\}.$$



A es conexo, pero no es conexo por caminos.

Definición 7.8. X es *localmente conexo por caminos*, si cada punto de X posee una base local formada por conjuntos conexos por caminos.

A pesar del ejemplo 7.2, existe un recíproco parcial de la proposición 7.17

Proposición 7.18. *Si* X *es conexo y localmente conexo por caminos, entonces es conexo por caminos.*

Ejemplos 7.3. A continuación se dan algunos ejemplos de espacios conexos por caminos:

1) los espacios indiscretos son conexos por caminos;

2) en la recta real, los conjuntos conexos y los conexos por caminos coinciden;

3) la conexión por caminos no es hereditaria;

4) para $A \subset \mathbb{R}^n$, se verifica

- si A es conexo y abierto, es conexo por caminos;
- si A es convexo, es conexo por caminos;
- si A es contable y $n > 1$, $\mathbb{R}^n - A$ es conexo por caminos.

Teorema 7.19. *La imagen continua de un espacio conexo por caminos, es conexa por caminos.*

Observación 7.2. La conexión por caminos es una propiedad divisible.

Corolario 7.20. *La conexión por caminos es una propiedad topológica.*

Teorema 7.21. *El producto (finito) de espacios es conexos por caminos si y sólo si cada espacio factor lo es.*

7.4. Componentes conexas por caminos

Sobre (X, τ) se define la relación binaria:

$$x \sim y \text{ si y sólo si existe un camino en } X \text{ que une } x \text{ e } y.$$

Definición 7.9. $\sim$ es una relación de equivalencia sobre X cuyas clases son las *componentes conexas por caminos* de X.

Se denota usualmente por $\pi_0(X)$ a la familia de estas clases. La componente conexa por caminos de un punto x, $c(x)$, es el mayor conjunto conexo por caminos de X que lo contiene.

Definición 7.10. En (X, τ), para cada $x \in X$, $c(x) \subset C(x)$.

7.5. Problemas

1.- Estudiar la conexiön en la recta real.

2.- Probar que si A es un conjunto convexo en $(\mathbb{R}^n, \tau_u)$, entonces es conexo. El recíproco no es cierto.

3.- Sean (X, τ_X) y (Y, τ_Y) espacios conexos y $A \subset X$, $B \subset Y$ subconjuntos propios. Probar que $X \times Y - (A \times B)$ es conexo en $(X \times Y, \tau_{Tyc})$.

4.- Sea C conexo en (X, τ) y $A \subset X$. Probar que si $C \cap A \neq \emptyset \neq C \cap (X - A)$, entonces $C \cap fr(A) \neq \emptyset$.

5.- En (X, τ), probar:

(i) el interior, la frontera, la intersección y la unión de conjuntos conexos no tiene porque ser un conjunto conexo;

(ii) si $A, B \in \tau$ (respectivamente, $A, B \in \mathcal{C}$), y $A \cap B$ y $A \cup B$ son conexos, entonces A y B son conexos.

6.- Dado (X, τ) conexo, si $\tau' \subset \tau \subset \tau''$, estudiar la conexión de (X, τ') y (X, τ'').

7.- Sea $f \colon (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ continua y (X, τ_X) conexo. Probar que el grafo de f es conexo en $(X \times Y, \tau_{Tyc})$.

8.- Sea $f \colon (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ continua. Con las notaciones obvias, probar:

(i) para cada $x \in X$, $f(C(x)) \subset C(f(x))$;

(ii) si f es un homeomorfismo, f induce una correspondencia biyectiva entre el conjunto de las componentes conexas de (X, τ_X) y el de las de (Y, τ_Y), siendo homeomorfas las componentes conexas correspondientes;

(iii) si B una componente conexa en (Y, τ_Y), entonces $f^{-1}(B)$ es una unión de componentes conexas. En particular, si $f^{-1}(B)$ es conexo, será una componente conexa.

9.- Probar que conjunto abierto, cerrado y conexo en un espacio topológico es una componente conexa.

10.- Si (X, τ) es conexo y existe $f \colon (X, \tau) \longrightarrow (\mathbb{R}, \tau_u)$ continua y no constante, entonces X es no contable.

11.- Si (X, τ) es conexo y de Fréchet con más de un punto, entonces X es infinito.

12.- Sea (X, τ) un espacio topológico, $\simeq$ una relación de equivalencia sobre X y la proyección canónica $p \colon (X, \tau) \longrightarrow (X/\simeq, \tau_{\simeq})$. Probar:

(i) si $(X/\simeq, \tau_{\simeq})$ es conexo y todo conjunto abierto y cerrado a la vez en X es saturado, entonces (X, τ) es conexo;

(ii) si toda clase de equivalencia es conexa en (X, τ), entonces B es una componente conexa en $(X/\simeq, \tau_{\simeq})$, si y sólo si $p^{-1}(B)$ es una componente conexa en (X, τ);

(iii) si $(X/\simeq, \tau_{\simeq})$ es conexo y toda clase de equivalencia es conexa en (X, τ), entonces (X, τ) es conexo;

(iv) si $\simeq_0$ es la relación de equivalencia sobre X cuyas clases son las componentes conexas, entonces $(X/\simeq_0, \tau_{\simeq_0})$ es totalmente disconexo.

13.- Si (X, τ) es conexo y $k \in \mathbb{N}$, x se llama un *punto de corte de orden* k, si $X - \{x\}$ posee exactamente k componentes conexas. Se pide:

(i) probar que el número de puntos de un orden fijado es un invariante topológico;

(ii) en la recta real, ¿qué tipos de puntos de corte poseen los intervalos $[0,1]$, $(0,1]$ y $(0,1)$?

(iii) si $n > 1$, $(\mathbb{R}^n, \tau_u)$ posee un punto de corte de orden 1. Deducir que $(\mathbb{R}^n, \tau_u)$ y $(\mathbb{R}, \tau_u)$ no son homeomorfos.

14.- Se pide probar:

(i) si (X, τ) es totalmente disconexo, entonces $\tau_{cof} \subset \tau$;

(ii) la disconexión total es una propiedad hereditaria y productiva;

(iii) la imagen continua de un espacio totalmente disconexo, no es necesariamente totalmente disconexa;

(iv) un espacio (X, τ) compacto y de Hausdorff es totalmente disconexo si y sólo si dados dos puntos $x \neq y \in X$, existe un subconjunto A abierto y cerrado a la vez, tal que $x \in A$ e $y \notin A$.

15.- Sea (X, τ) un espacio topológico. Una *cadena simple* conectando los puntos a y b es una familia finita $\{U_1, \cdots, U_n\} \subset \tau$, tal que:

(a) $a \in U_1$ y $a \notin U_i$ para $i > 1$,

(b) $b \in U_n$ y $b \notin U_i$ para $i < n$,

(c) $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ si y sólo si $|i - j| \leq 1$.

Probar que su (X, τ) es conexo y $\mathcal{U} = \{U_i : i \in I\}$ es un cubrimiento por abiertos de X, entonces para cada $a, b \in X$, existe una cadena simple formada por elementos de $\mathcal{U}$ que los conecta.

16.- Se dice que un espacio (X, τ) es *0-dimensional*, si posee una base β de τ, formada por conjuntos abiertos y cerrados a la vez. Se pide:

(i) estudiar si son 0-dimensionales los siguientes espacios: (X, τ_{ind}), (X, τ_{dis}), $(\mathbb{R}, \tau_{sor})$, $(\mathbb{R}, \tau_u)$, $(\mathbb{Q}, \tau_u)$, $(\mathbb{I}, \tau_u)$, el conjunto de Cantor;

(ii) probar que la 0-dimensionalidad es hereditaria y productiva;

(iii) la imagen continua de un espacio 0-dimensional, no es necesariamente 0-dimensional;

(iv) un espacio 0-dimensional es o indiscreto o disconexo;

(v) un espacio 0-dimensional y de Fréchet es totalmente disconexo;

(vi) el recíproco de (v) no es cierto, para probarlo estudiar el *ejemplo de Knaster y Kuratowski*: sean $\mathcal{C}$ el conjunto de Cantor, $A \subset \mathcal{C}$ el conjunto de los puntos finales de los intervalos abiertos que se eliminan en la construcción del conjunto de Cantor (ver el ejercicio **19**, problemas 3.5) y $B = \mathcal{C} - A$. Sea $p = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \in \mathbb{R}^2$ y para cada $x \in \mathcal{C}$, sea L_x el segmento de línea recta que une p y $(x, 0)$. Sea

$$L_x^* = \begin{cases} \{(y_1, y_2) \in L_x : y_2 \in \mathbb{Q}\} & \text{si} \quad x \in A \\ \{(y_1, y_2) \in L_x : y_2 \in \mathbb{I}\} & \text{si} \quad x \in B \end{cases}$$

Se considera el conjunto $\mathcal{K} = \bigcup\limits_{x \in \mathcal{C}} L_x^*$; probar que $(\mathcal{K}, \tau_u)$ es conexo. Sin embargo, $(\mathcal{K} - \{p\}, \tau_u)$ es totalmente disconexo y no es 0-dimensional;

(vii) un espacio topológico localmente compacto y de Hausdorff es 0-dimensional si y sólo si es totalmente disconexo.

17.- Probar las siguientes propiedades:

(i) si $Y = (\{0\} \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times \{0\})$ y $f\colon (\mathbb{R}, \tau_s) \longrightarrow (Y, \tau_u)$ es continua y sobreyectiva, entonces $f^{-1}((0, 0))$ debe contener al menos tres puntos;

(ii) si $f\colon (\mathbb{S}^1, \tau_u) \longrightarrow ([0, 1], \tau_u)$ es continua y sobreyectiva, entonces si $c \in (0, 1)$, el conjunto $f^{-1}(c)$ debe contener más de un punto.

18.- Probar que no son homeomorfos los siguientes pares de espacios:

(i) $([0, 1], \tau_u)$ y $(\mathbb{R}, \tau_u)$;

(ii) $(\mathbb{R}, \tau_u)$ y $(\mathbb{R}^n, \tau_u)$ para $n > 1$;

(iii) $([0, \infty), \tau_u)$ y $(\mathbb{R}, \tau_u)$;

(iv) $([0, 1], \tau_u)$ y $(\mathbb{S}^1, \tau_u)$;

(v) $(\mathbb{S}^1, \tau_u)$ y $(\mathbb{S}^n, \tau_u)$ para $n > 1$.

19.- Probar que $f\colon (\mathbb{R}, \tau_u) \longrightarrow (\mathbb{Q}, \tau_u)$ es continua si y sólo si es constante.

20.- En un espacio topológico (X, τ) se define la relación binaria $x \sim y$, si no existe ninguna descomposición de X en dos abiertos disjuntos, uno de los cuales contiene a x y el otro a y. Se pide:

(i) probar que $\sim$ es una relación de equivalencia sobre X: las clases de equivalencia $Q(x)$ se llaman *casi-componentes*;

(ii) probar que cada casi-componente es la intersección de todos los conjuntos abiertos y cerrados que contienen a un elemento dado;

(iii) probar que para cada $x \in X$ es $C(x) \subset Q(x)$ y toda casi-componente es una unión de componentes;

(iv) una casi-componente abierta es una componente conexa;

(v) si (X, τ) es compacto y de Hausdorff, entonces para cada $x \in X$, es $C(x) = Q(x)$;

(vi) se consideran los subconjuntos de $\mathbb{R}^2$: $L_1 = \mathbb{R} \times \{1\}$, $L_2 = \mathbb{R} \times \{-1\}$ y para cada $n \in \mathbb{N}$, el rectángulo $R_n = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq n, |y| \leq \dfrac{n}{n+1}\right\}$. Sea $Y = L_1 \cup L_2 \cup (\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} R_n)$. Probar que en (Y, τ_u) la componente de $(0, 1)$ es L_1 y su casi-componente es $L_1 \cup L_2$.

21.- En un espacio topológico compacto en el que las componentes conexas son abiertas, probar que sólo hay un número finito de componentes conexas.

22.- Sea (X, d) un espacio métrico conexo de diámetro $\delta(X) = \sup\{d(a, b) : a, b \in X\}$ infinito. Probar que toda esfera es no vacía.

23.- Probar que $(\mathbb{R}^{n+1} - \mathbb{S}^n, \tau_u)$ no es conexo.

24.- Probar que cualquier subconjunto abierto de $(\mathbb{R}, \tau_u)$ es una unión, a lo sumo numerable, de intervalos abiertos y disjuntos.

25.- Sea (X, τ) un espacio de Fréchet. Probar que cualquier conjunto conexo no trivial es *denso en sí mismo*, es decir, no contiene puntos aislados.

26.- En este problema se trata de estudiar alguna de las aplicaciones de la conexión:

(i) *teorema del valor intermedio*: si $f \colon ([a, b], \tau_u) \longrightarrow (\mathbb{R}, \tau_u)$ es una aplicación continua, f toma todos los valores entre dos cualesquiera de su imagen;

(ii) *teorema del punto fijo*: si $f \colon ([0, 1], \tau_u) \longrightarrow ([0, 1], \tau_u)$ es una aplicación continua, entonces existe $x \in [0, 1]$ tal que $f(x) = x$;

(iii) sean (X, τ_X) e (Y, τ_Y) espacios homeomorfos. Probar que cualquier función continua $h \colon (X, \tau_X) \longrightarrow (X, \tau_X)$ posee un punto fijo si y sólo si toda $k \colon (Y, \tau_Y) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ continua posee un punto fijo. Deducir que si $f \colon ([a, b], \tau_u) \longrightarrow ([a, b], \tau_u)$ es una aplicación continua, entonces posee un punto fijo;

(iv) *teorema del punto fijo de Brouwer*: toda $f\colon ([0,1]^n, \tau_u) \longrightarrow ([0,1]^n, \tau_u)$ continua posee un punto fijo;

(v) *teorema de Borsuk-Ulam*: si $f\colon (\mathbb{S}^1, \tau_u) \longrightarrow (\mathbb{R}, \tau_u)$ es continua, existen un par de puntos antipodales $z, -z \in \mathbb{S}^1$ tales que $f(z) = f(-z)$.

27.- Sea (X, τ) un espacio de Hausdorff y $\{C_n : n \in \mathbb{N}\}$ una familia de conjuntos compactos no vacíos, conexos y encajados. Probar que la intersección de estos conjuntos es un conjunto no vacío, compacto y conexo.

28.- Se dice que $f\colon (X, \tau) \longrightarrow (\mathbb{R}, \tau_u)$ es *localmente constante* si para cada $x \in X$ existe $U_x \in \tau$, tal que $x \in U_x$, y la restricción de f a U_x es constante. Si (X, τ) es conexo, probar que toda aplicación continua y localmente constante es constante.

29.- Sean (X, τ_X) y (Y, τ_Y) espacios conexos, $A \subset X$ no vacío y $f\colon (A, \tau_A) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ una función continua. Probar que el espacio de adjunción (ver 5.4) $(X \cup_f Y, \tau)$ es conexo.

30.- Probar que no existe ninguna función continua $f\colon (\mathbb{R}, \tau_u) \longrightarrow (\mathbb{R}, \tau_u)$, tal que $f(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ y $f(\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$.

31.- Sea X un conjunto totalmente ordenado provisto de la topología del orden. Se pide:

(i) probar que (X, τ_{ord}) es conexo si y sólo si todo conjunto $A \subset X$ no vacío y acotado superiormente admite una cota superior, y para cada $x, y \in X$, $x < y$, el intervalo $(x, y) = \{z \in X : x < z < y\}$ es no vacío;

(ii) si (X, τ_{ord}) es conexo, probar que un conjunto $A \subset X$ es un intervalo si y sólo si para $x, y \in X$, con $x < y$, es $(x, y) \subset A$;

(iii) probar que las partes conexas de (X, τ_{ord}) son los intervalos de X.

32.- Se consideran en el plano dos circunferencias concéntricas:

$$C_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\} \quad \text{y} \quad C_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 4\}.$$

Sea $X = C_1 \cup C_2$. Se denota por $p\colon C_1 \longrightarrow C_2$ la *proyección radial*, es decir, la proyección de C_1 sobre C_2 a través del punto $(0, 0)$. Sobre X se define una topología τ, tomando como subbase la familia $\sigma = \{\{z\} : z \in C_2\} \cup \{U_k(z) : k \in \mathbb{N}, z \in C_1\}$, donde $U_k(z) = V_k(z) \cup p(V_k(z) - \{z\})$, siendo $V_k(z)$ el arco de C_1 de centro el punto z y longitud $\frac{1}{k}$. El espacio (X, τ) se llama *circunferencia doble de Alexandroff* o *espacio de las circunferencias concéntricas*. Probar:

(i) C_2 es un subespacio discreto de cardinal c, abierto y denso en (X, τ);

(ii) C_1 es compacto en (X, τ);

(iii) (X, τ) es de Hausdorff, compacto y C_I;

(iv) (X, τ) no es C_{II} y no es separable;

(v) (X, τ) es no metrizable, a pesar de ser la unión (no disjunta) de dos de sus subespacios metrizables;

(vi) las componentes conexas de (X, τ) son C_1 y cada uno de los puntos de C_2.

33.- Sobre $([0,1], \tau_u)$, se considera la relación de equivalencia xRy si y sólo si $x, y \in \left\{0, \frac{1}{2}\right\}$. Se pide probar:

(i) si $p\colon ([0,1], \tau_u) \longrightarrow ([0,1]/R, \tau_R)$ es la proyección canónica, probar que es cerrada y no abierta;

(ii) sea $J = \{1\} \times [0,1]$ y $(X = \mathbb{S}^1 \cup J, \tau_u)$; entonces la aplicación $f\colon ([0,1], \tau_u) \longrightarrow (X, \tau_u)$ dada por $f(t) = \begin{cases} (\cos(4\pi t), \sin(4\pi t)) & \text{si} \quad t \leq \frac{1}{2} \\ (1, 2t-1) & \text{si} \quad t \geq \frac{1}{2} \end{cases}$ es continua y cerrada;

(iii) $f\colon ([0,1], \tau_u) \longrightarrow (X, \tau_u)$ induce un homeomorfismo entre los espacios $([0,1]/R, \tau_R)$ y (X, τ_u);

(iv) deducir que $([0,1]/R, \tau_R)$ es de Hausdorff, compacto y conexo.

34.- *La topología de los círculos tangentes*: sobre $([0,1], \tau_u)$, se considera la relación de equivalencia xR_0y si y sólo si $x, y \in \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$. Si $\mathbb{S}^* = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x+2)^2 + y^2 = 1\}$, se pide demostrar que $([0,1]/R_0, \tau_{R_0})$ es homeomorfo a $(\mathbb{S}^1 \cup \mathbb{S}^*, \tau_u)$, y por lo tanto es de Hausdorff, compacto y conexo.
Sobre $\mathbb{R}$ se considera la topología $\tau^* \subset \tau_u$, definida al considerar los entornos usuales en los puntos $x \neq 0$ y como entornos del 0

$$\mathcal{N}_0 = \{N \in \mathcal{N}_0^{us} : \exists \varepsilon > 0, \delta < 0 : (-\infty, \delta) \cup (\varepsilon, \infty) \subset N\}.$$

Se pide:

(i) probar que $(\mathbb{R}, \tau^*)$ es compacto y de Hausdorff;

(ii) dados $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x+1)^2 + y^2 = 1\}$ y $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 = 1\}$, se define una aplicación $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow S \cup T$ geométricamente, del modo siguiente:

(a) se identifica $\mathbb{R}$ con $\mathbb{R} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$,

(b) se levanta el intervalo $(-\infty, -2]$ en la semirrecta vertical $L = \{-2\} \times [0, \infty)$ por rotación de centro el punto $(-2, 0)$,

(c) cada punto de L se transforma, por una inversión de polo $(0, 0)$ en un punto del semicírculo S^+ (es decir, un punto de L se transforma en la intersección de S con la recta pasando por dicho punto y el origen de coordenadas),

(d) cada punto de $[-2, 0]$ se proyecta sobre el semicírculo S^-,

(e) cada punto de $[0, 2]$ se proyecta sobre el semicírculo T^-,

(f) la semirecta $[2, \infty)$ se transforma en la recta vertical $L^* = \{2\} \times [0, \infty)$ por rotación de centro $(2, 0)$,

(g) los puntos de L^* se transforman por una inversión de polo $(0, 0)$ en los puntos del semicírculo T^+;

escribir explícitamente la aplicación así definida y probar que es una biyección de $\mathbb{R}$ sobre $T \cup S$;

(iii) probar que f es un homeomorfismo entre los espacios $(\mathbb{R}, \tau^*)$ y $(S \cup T, \tau_u)$;

(iv) probar que $([0, 1]/R_0, \tau_{R_0})$ es homeomorfo a $(\mathbb{R}, \tau^*)$;

(v) probar que si $a \neq 0$, el subespacio $(\mathbb{R} - \{a\}, \tau^*)$ es conexo;

(vi) probar que la sucesión $\{(-1)^n n\}_{n \in \mathbb{N}}$, converge a 0 en $(\mathbb{R}, \tau^*)$;

(vii) probar que la aplicación $g\colon (\mathbb{R}, \tau_u) \longrightarrow (\mathbb{R}, \tau^*)$, definida por $g(0) = 0$ y $g(x) = \frac{1}{x}$, es continua.

34.- Probar los siguientes espacios son conexos por caminos: los espacios indiscretos, las n-variedades conexas, el cono y la suspensión (ver ejercicio **27**, problemas 5.6) de un espacio topológico.

35.- En (X, τ), probar que la unión de cualquier familia de conjuntos conexos por caminos con un punto en común, es un conjunto conexo por caminos.

36.- Probar que un espacio totalmente disconexo y localmente conexo, es discreto.

37.- Si (X, τ) es localmente conexo, probar que todo abierto es unión disjunta de abiertos conexos. En particular:

(i) en $(\mathbb{R}, \tau_u)$, todo abierto es unión disjunta de una familia contable de intervalos abiertos;

(ii) en $(\mathbb{R}^n, \tau_u)$, si A es abierto, entonces es conexo si y sólo si A es conexo por caminos.

38.- Si $\leq$ es el orden lexicográfico sobre $[0,1] \times [0,1]$ y τ_{ord} es la topología del orden asociada, probar que $([0,1] \times [0,1], \tau_{ord})$ es un espacio conexo y localmente conexo, pero no es ni conexo por caminos.

39.- Sea (X, τ) un espacio topológico en el que las clausuras de dos puntos cualesquiera se cortan. Probar que (X, τ) es conexo por caminos.

40.- Probar que, al contrario de lo que sucede con la conexión, la clausura de un conjunto conexo por caminos no es en general conexa por caminos.

41.- Se considera el *espacio escoba* (E, τ_u), donde E es el subespacio de $\mathbb{R}^2$ formado por la unión de los segmentos cerrados que unen el origen de coordenadas con los puntos $\{(1, \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\}$, junto con el segmento $\{0\} \times (\frac{1}{2}, 1]$. El *espacio escoba cerrado* $(\widehat{E}, \tau_u)$ tiene como espacio base $\widehat{E} = E \cup (\{0\} \times (0,1])$. Se pide probar:

(i) (E, τ_u) y $(\widehat{E}, \tau_u)$ son conexos;

(ii) ni (E, τ_u) ni $(\widehat{E}, \tau_u)$ son localmente conexos;

(iii) $(\widehat{E}, \tau_u)$ es conexo por caminos, pero (E, τ_u) no lo es.

42.- Sea (A, τ_u) el subespacio de $\mathbb{R}^2$, donde

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}, y \geq 0\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{Q}, y < 0\}.$$

Probar que (A, τ_u) es conexo, no es localmente conexo y no es conexo por caminos.

Bibliografía

[AF] C. Adams and R. Franzosa; *Introduction to Topology Pure and Applied*, Prentice Hall, 2008.

[Ad] I. Adamson; *A General Topology Workbook*, Birkhäuser, 1995.

[AP] A.V. Arkhangels'kii and V. I. Ponomarev; *Fundamentals of General Topology: Problems and Exercises*, Reidel, 1983.

[Ar] M.A. Armstrong; *Topología Básica*, Reverté, 1987.

[ADQ] $*$ R. Ayala, E. Dominguez y A. Quintero; *Elementos de Topología General*, Addison-Wesley Iberoamericana, 1997.

[Bak] C.W. Baker; *Introduction to Topology*, Krieger, 1997.

[Bau] J.D. Baum; *Elements of point-set Topology*, Dover, 1991.

[Be] C. Berge; *Topological Spaces*, Dover, 1997.

[BBIF] Y.U. Borisovich, N. Bliznyakov, Y. A. Izrailevich and T. Fomenko; *Introduction to Topology*, Mir, 1985.

[Bo] C.R. Borges; *Elementary Topology and Applications*, World Scientific, 2000.

[Bu] D. Bushaw; *Elements of General Topology*, John Wiley, 1996.

[BvR] G. Buskes and A. Van der Rooij; *Topological Spaces; from distance to neighborhood*, Springer, 1997.

[BP] E. Burroni et J. Perron; *La Géométrie de caoutchouc*, Ellipses, 2000.

[Ca] G.L. Cain; *Introduction to General Topology*, Addison Wesley, 1993.

[CV] C.O. Christenson y W.L. Voxman; *Aspects of Topology*, Marcel Dekker, 1998.

[Cr] F.H. Croom; *Principles of Topology*, Cengage Learning Asia, 2002.

[Cu] H. Cullen; *Introduction to General Topology*, Heath and Co., 1968.

[Cz] A. Czaszar; *General Topology*, A. Hilger, 1978.

[ChH] J. Chailloux y J. Henry; *Problemas (con soluciones detalladas) de Topología*, Toray-Masson, 1976.

[Cho] G. Choquet; *Topología*, Toray-Masson, 1971.

[Da] S.W. Davis; *Topology*, McGraw Hill, 2005.

[Di] J. Dixmier; *General Topology*, Springer, 1984.

[Du] J. Dugundji; *Topology*, Allyn and Bacon, 1968.

[E] R. Engelking; *General Topology*, Heldermann, 1989.

[Fa] A. Faisant; *TP et TD de Topologie Générale*, Hermann, 1987.

[FM] $*$ G. Fleitas Morales y J. Margalef Roig; *Problemas de Topología General*, Alhambra, 1980.

[Fl] $*$ G. Flory; *Ejercicios de Topología y Análisis*, Reverté, 1978.

[Ga] S.A. Gaal; *Point Set Topology*, Dover, 2009.

[GG] T.W. Gamelin and R.E. Greene; *Introduction to Topology*, Saunders Ser., 1983.

[Ge] M.C. Gemignani; *Elementary Topology*, Dover, 1990.

[HF] D. Hinrichsen y J.L. Fernandez; *Topología General*, Urmo, 1977.

[HY] J.G. Hocking and G.S. Young; *Topology*, Dover, 1961.

[Hu] S.T. Hu; *Elements of General Topology*, Holden-Day, 1965.

[Jaf] P. Jaffard; *Traité de Topologie Générale*, PUF, 1997.

[Jan] K. Jänich; *Topology*, Springer, 1984.

[Ke] J.L. Kelley; *General Topology*, Springer, 1955.

[Kr] S.G. Krantz; *Essentials of Topology with Applications*, CRC Press, 2010.

[Ku] K. Kuratowski; *Introduction à la théorie des ensembles et à la topologie*, Enseignement Mathématique, 1966.

[Le] H. Lehning; *Topologie (avec exercices)*, Masson, 1985.

[Li] S. Lipschutz; *Topología General*, McGraw Hill, 1967.

[Lo] $*$ R. López Camino; *Ejercicios de topología general*, Nativola, 2009.

[Man] M.J. Mansfield; *Introducción a la Topología*, Alhambra, 1974.

[MOP] J. Margalef Roig, E. Outerelo Dominguez y J.L. Pinilla Ferrando; *Topología*, Alhambra, 1975.

[Mas] X. Masa; *Topoloxia Xeral: introducción aos espacios euclidianos, métricos e topolóxicos*, Univ. Santiago de Compostela, 1999.

[MMNS] F. Mascaró, J. Monterde, J.J. Nuño y R. Sivera; *Introducció a la Topologia*, Univ. Valencia, 1997.

[Me] B. Mendelson; *Introduction to Topology*, Dover, 1990.

[Mi] $*$ E.G. Milewski; *The topology problem solver*, REA, 1994.

[Mun1] J.R. Munkres; *Topology: a first course*, Prentice-Hall, 1975.

[Mun2] $*$ J.R. Munkres; *Topología*, Prentice-Hall, 2001.

[Mur] M.G. Murdeshwar; *General Topology*, Wiley Eastern Limited, 1986.

[N] J. Nagata; *Modern General Topology*, North Holland, 1985.

[O] P.V. O'Neil; *Fundamental Concepts of Topology*, Gordon and Breach, 1972.

[Pa] C.W. Patty; *Foundations of Topology*, PWS-Kent, 1993.

[Pe] W.J. Pervin; *Foundations of General Topology*, Academic Press, 1964.

[Pr] V.V. Prasolov; *Intuitive Topology*, Math. World, 1995.

[Ro] D. Roseman; *Elementary Topology*, Prentice-Hall, 1999.

[Rub] G.N. Rubiano; *Topología General*, Univ. Nacional de Colombia, 2002.

[Run] V. Runde; *A taste of Topology*, Springer, 2005.

[Sh] P.L. Shick; *Topology Point Set and Geometric*, Wiley, 2007.

[Si] W. Sierpinski; *General Topology*, Dover, 2000.

[SS] J.A. Steen and J.A. Seebach; *Counterexamples in Topology*, Dover, 1995.

[Su] W.A. Sutherland; *Introduction to Metric and Topological Spaces*, Oxford Sci. Pub., 1993.

[T] W.J. Thron; *Topological Structures*, Holt, Rinehart and Winston, 1966.

[VINK] O.Ya. Viro, O.A. Ivanov, N.Yu. Netsvetaev, V.M. Kharlamov; *Elementary Topology: Problem Textbook*, AMS, 2008.

[WD] G. Whyburn and E. Duda; *Dynamic Topology*, Springer, 1979.

[Wi] $*$ S. Willard; *General Topology*, Addison-Wesley, 1970.

sólo es el cuerpo gris de una bengala
pero tú ves el fuego derramándose
las chispas arañando el infinito
semilla de constelaciones.
todo fuego artificial
es un poema que
gira alrededor
de un centro,
desplegada
centrífuga
reflexión
radial
sobre
el
pp
u
nn
tt
o
.

"Bestiario microscópico"
Sofía Rhei