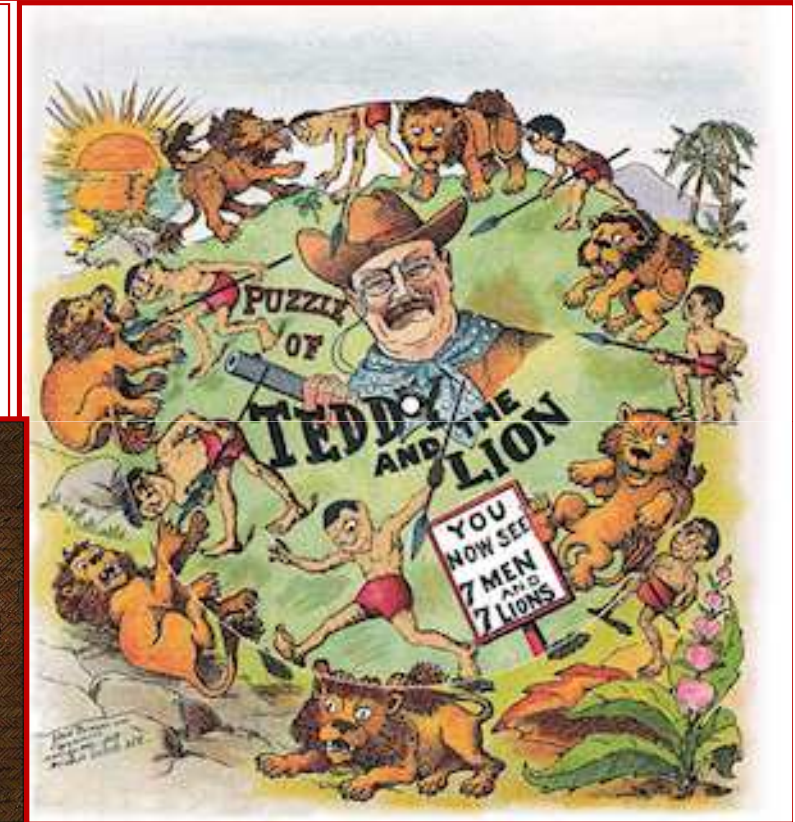
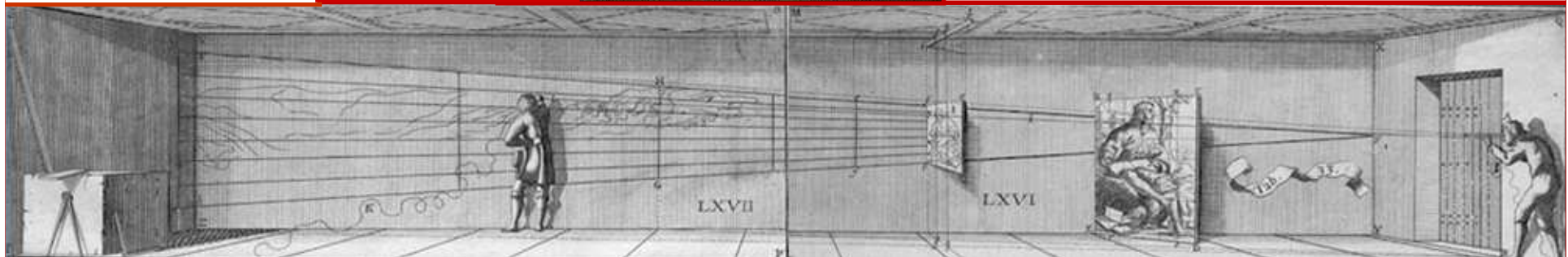
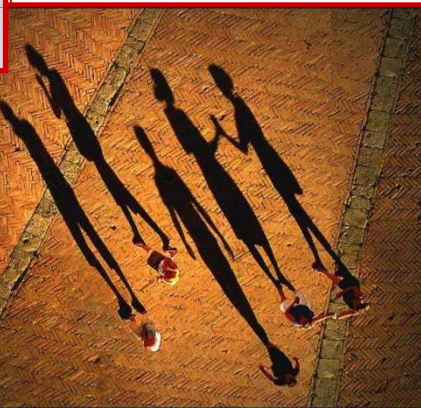


# ¿Certeza? ¿Engaño?... ¿Paradoja?

Marta Macho Stadler, UPV/EHU



*Ciencia y matemática*  
U. Sevilla  
15 enero  
de 2014







LA SIEMPRE ABIERTA

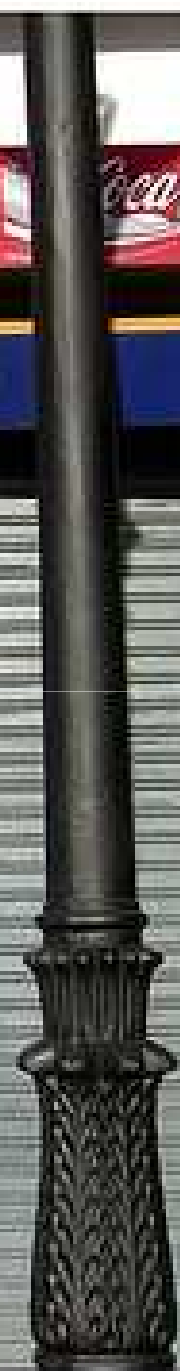
Tnos. 941 274 124 - 692 395 673

Coca-Cola

*Típico*

*Sabor*

*Latino*



LA SIEMPRE ABIERTA

Tnos. 941 274 124 - 692 395 673

Coca-Cola

*Típico*

*Sabor*

*Latino*

oferta

B  
Baomerang

CAMISETA M/C  
ALGODÓN  
COLORES LISOS

una-

6€

dos-

15€

www.startinglat.es

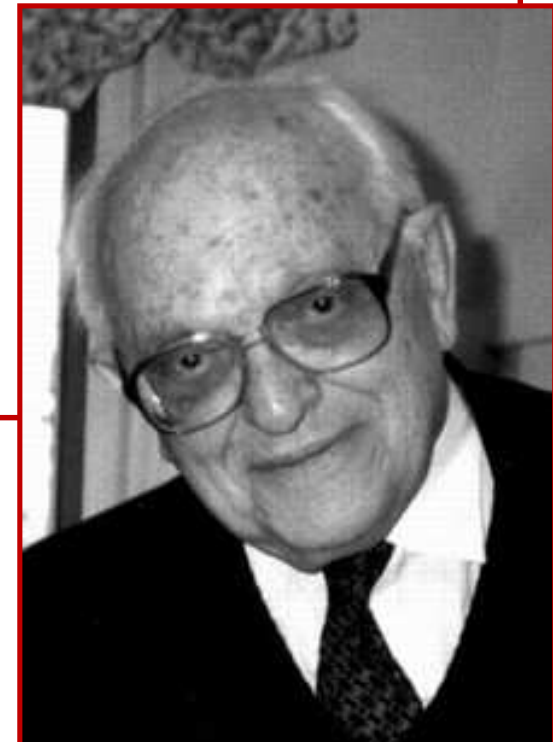
NO CUBRE APLICACIÓN DE POLÍTICAS DE CALIDAD



**Las *paradojas* han tenido un papel crucial en la historia intelectual, a menudo presentando los desarrollos revolucionarios de las ciencias, de las matemáticas y de la lógica. Cada vez que, en cualquier disciplina, aparece un problema que no puede resolverse en el interior del cuadro conceptual susceptible de aplicarse, experimentamos un choque, choque que puede constreñirnos a rechazar la antigua estructura inadecuada y a adoptar una nueva.**

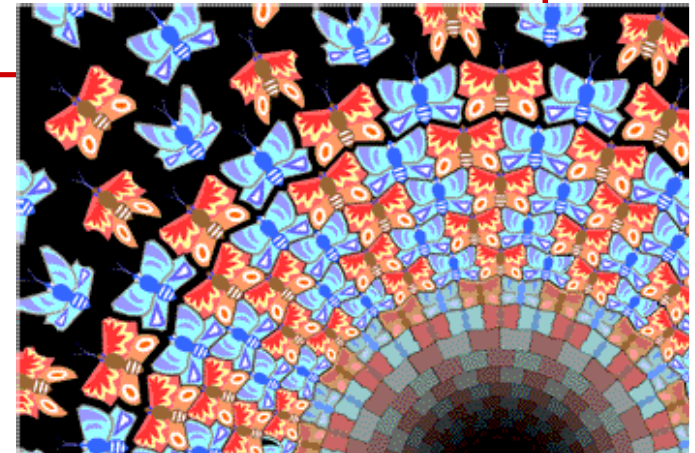
**Es a este proceso de mutación intelectual al que se le debe el nacimiento de la mayor parte de las ideas matemáticas y científicas.**

***Escapar a la paradoja, 1967*  
Anatol Rapoport (1911-2007)**



# Guión de la charla

1. Paradojas del infinito
2. Paradojas geométricas
3. Paradojas lógicas
4. Paradojas de la predicción
5. Paradojas de la probabilidad



# 1. Paradojas del infinito

*No haga como Kronecker, no deje pasar el infinito, sea en el amor, en el pensamiento o en la vida.*

Denis Guedj, *Villa des hommes* (2007)

Rob Gonsalves





# ¡Bienvenidas(os) al Hotel Infinity!

Érase una vez *Hotel Infinity*, un hotel con infinitas –en cantidad numerable– habitaciones, es decir, ordenadas del modo 1, 2, 3, 4, 5, etc.–. Su eficiente recepcionista –**John Torrance**– tiene la misión de asegurar el cumplimiento del lema del hotel: *Se garantiza el alojamiento de cualquier nuevo huésped.*



John Torrance



Llega un hombre al hotel que se encuentra lleno...



Llega un hombre al hotel que se encuentra lleno...

El recepcionista, fiel al lema del *Hotel Infinity* solicita por megafonía a todas y todos sus clientes...



¡Cámbiate de tu habitación  $n$   
a la habitación  $n+1$ ,  
por favor!

Así, la habitación número **1** queda libre para el nuevo huésped...

Llega un hombre al hotel que se encuentra lleno...

El recepcionista, fiel al lema del *Hotel Infinity* solicita por megafonía a todas y todos sus clientes...



¡Cámbiate de tu habitación  $n$   
a la habitación  $n+1$ ,  
por favor!

Así, la habitación número **1** queda libre para el nuevo huésped...

¿Y qué pasa con el huésped que se encontraba en la última habitación?



Llega un hombre al hotel que se encuentra lleno...

El recepcionista, fiel al lema del *Hotel Infinity* solicita por megafonía a todas y todos sus clientes...



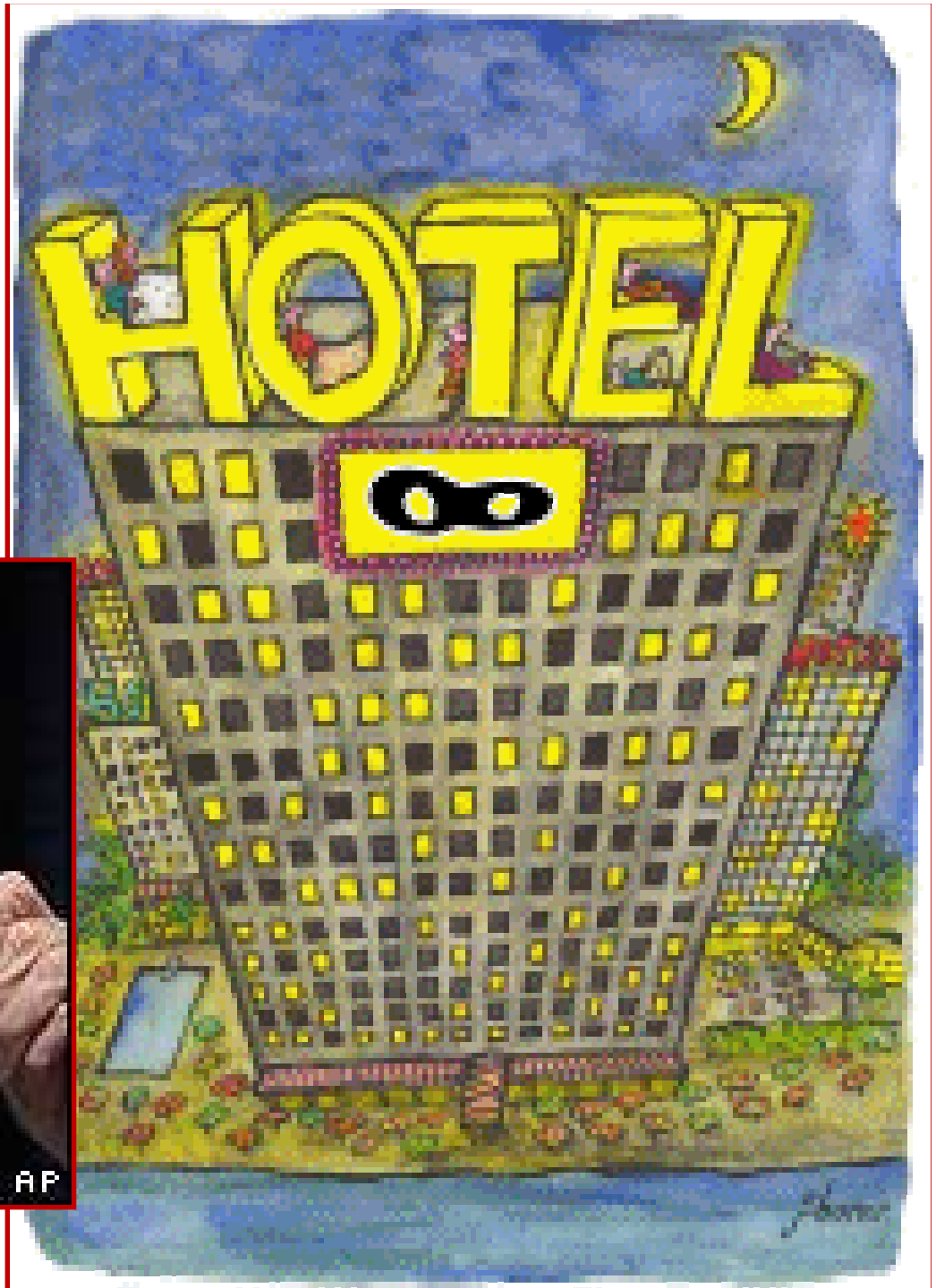
¡Cámbiate de tu habitación  $n$   
a la habitación  $n+1$ ,  
por favor!

Así, la habitación número **1** queda libre para el nuevo huésped...

¿Y qué pasa con el huésped que se encontraba en la última habitación?

... *no existe la "última habitación"* ...

Llega al *Hotel Infinity*  
(que está lleno) una  
excursión con infinitos  
pensionistas  
(numerados)...

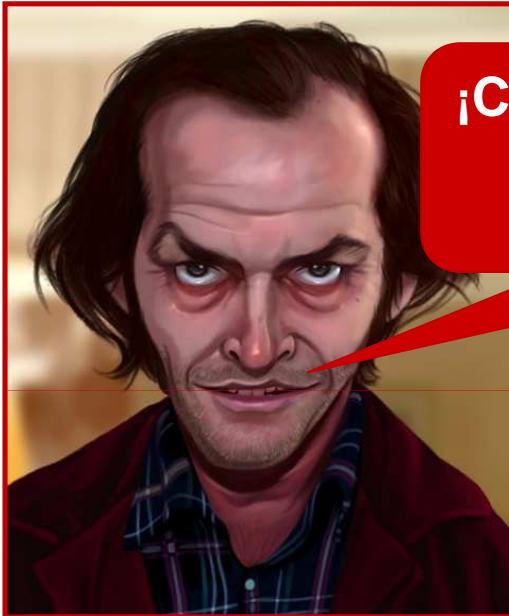


Llega al *Hotel Infinity* (que está lleno) una excursión con infinitos pensionistas (numerados)...

¡Cámbiate de tu habitación  $n$  a la habitación  $2n$ , por favor!

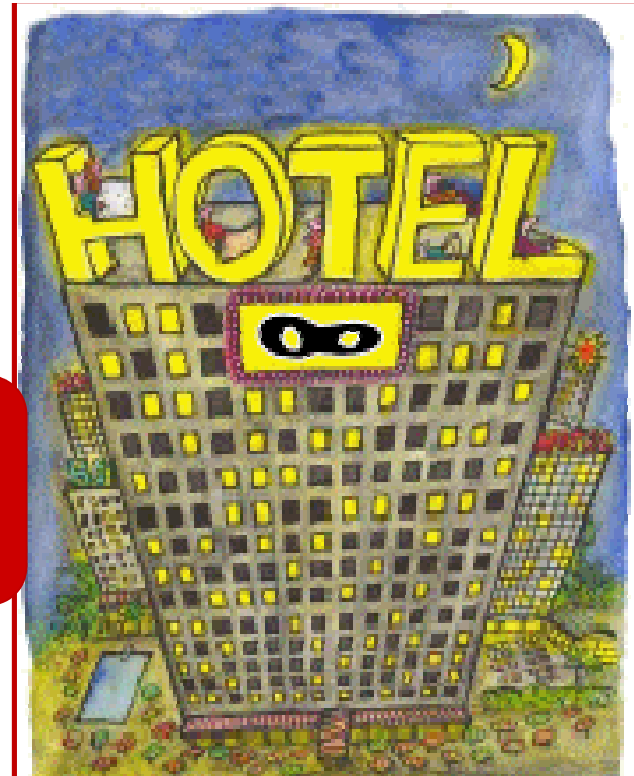


Llega al *Hotel Infinity* (que está lleno) una excursión con infinitos pensionistas (numerados)...



¡Cámbiate de tu habitación  $n$  a la habitación  $2n$ , por favor!

De esa forma todas las y los huéspedes se mudan a una habitación par, y las habitaciones impares quedan libres...







Esa noche, el tiempo cambia radicalmente... una terrible tormenta se declara y la lluvia cae sin cesar. Infinitas excursiones –numeradas– con infinitos **Boy Scouts** – numerados cada uno dentro de su propia excursión– deben dejar sus campamentos inundados y llegan a **Hotel Infinity** (sigue estando lleno).

Esa noche, el tiempo cambia radicalmente... una terrible tormenta se declara y la lluvia cae sin cesar. Infinitas excursiones –numeradas– con infinitos **Boy Scouts** –numerados cada uno dentro de su propia excursión– deben dejar sus campamentos inundados y llegan a **Hotel Infinity** (sigue estando lleno).

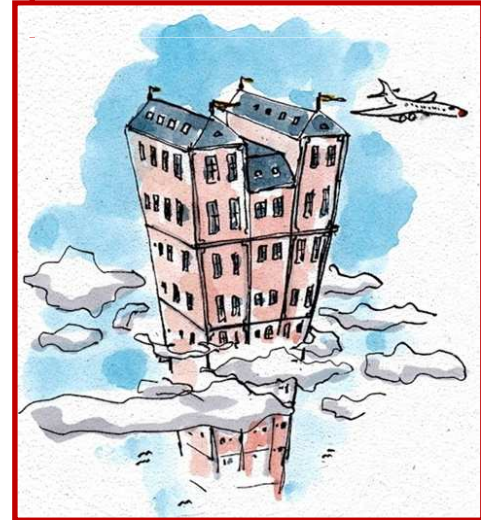
Si el número de tu habitación  $h$  es un primo o una potencia de un primo, por favor, eleva 2 al número  $h$  de tu habitación y ve a la habitación  $2^h$ .



Esa noche, el tiempo cambia radicalmente... una terrible tormenta se declara y la lluvia cae sin cesar. Infinitas excursiones –numeradas– con infinitos **Boy Scouts** –numerados cada uno dentro de su propia excursión– deben dejar sus campamentos inundados y llegan a **Hotel Infinity** (sigue estando lleno).

Si el número de tu habitación  $h$  es un primo o una potencia de un primo, por favor, eleva 2 al número  $h$  de tu habitación y ve a la habitación  $2^h$ .

Una vez vaciadas estas habitaciones, **John** asigna a cada una de las excursiones un número primo y a cada uno de los niños de cada una de las excursiones un número impar: la habitación que debe ocupar ese niño se calcula tomando el número primo de su excursión  $p$  y elevándolo al número impar a él asignado  $n$ , lo que da el número  $p^n$ .





**Monty Burns** muere y va al infierno. El diablo le propone un juego al que sólo podrá jugar una vez. Si gana, irá al **cielo**, y si pierde arderá para siempre en el **infierno**.





**Monty Burns** muere y va al infierno. El diablo le propone un juego al que sólo podrá jugar una vez. Si gana, irá al **cielo**, y si pierde arderá para siempre en el **infierno**.

Burns sabe además que si juega el juego el primer día, tiene  $1/2$  de posibilidades de ganar, si apuesta el segundo tiene  $2/3$  de posibilidades de vencer, el tercer día  $3/4$ , al cuarto  $4/5$ , y así sucesivamente.

Si permanece más días en el infierno antes de jugar, se incrementan las posibilidades de ganar, ya que:  $(n-1)/n < n/(n+1)$ .





**Monty Burns** muere y va al infierno. El diablo le propone un juego al que sólo podrá jugar una vez. Si gana, irá al **cielo**, y si pierde arderá para siempre en el **infierno**.

Burns sabe además que si juega el juego el primer día, tiene  $1/2$  de posibilidades de ganar, si apuesta el segundo tiene  $2/3$  de posibilidades de vencer, el tercer día  $3/4$ , al cuarto  $4/5$ , y así sucesivamente.

Si permanece más días en el infierno antes de jugar, se incrementan las posibilidades de ganar, ya que:  $(n-1)/n < n/(n+1)$ .

**¿Cuál es el momento más razonable para que juegue Burns?**

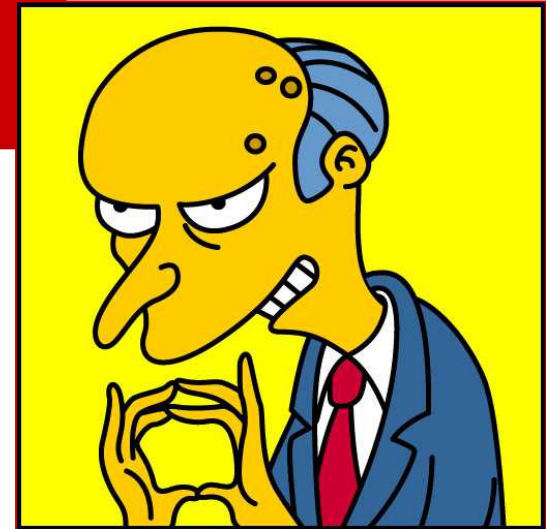




**Monty Burns** muere y va al infierno. El diablo le propone un juego al que sólo podrá jugar una vez. Si gana, irá al **cielo**, y si pierde arderá para siempre en el **infierno**.

Burns sabe además que si juega el juego el primer día, tiene  $1/2$  de posibilidades de ganar, si apuesta el segundo tiene  $2/3$  de posibilidades de vencer, el tercer día  $3/4$ , al cuarto  $4/5$ , y así sucesivamente.

Todo incremento en la probabilidad de ganancia de un juego con apuesta infinita tiene **utilidad infinita**. Por ejemplo, si espera un año para jugar, sus posibilidades de ganar son de  $365/366=0,997268$ , pero si espera un año y un día, sus posibilidades de ganar son de  $366/367=0,997275$ , es decir, se incrementan en 0,000007. Aún así, 0,000007 multiplicado por infinito es infinito...



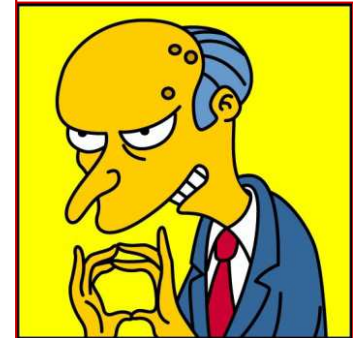


**Monty Burns** muere y va al infierno. El diablo le propone un juego al que sólo podrá jugar una vez. Si gana, irá al **cielo**, y si pierde arderá para siempre en el **infierno**.

Burns sabe además que si juega el juego el primer día, tiene  $1/2$  de posibilidades de ganar, si apuesta el segundo tiene  $2/3$  de posibilidades de vencer, el tercer día  $3/4$ , al cuarto  $4/5$ , y así sucesivamente.

Por otro lado, parece razonable suponer el coste por retrasarse un día en el juego como finito: es un día más de sufrimiento en el infierno. Así, el supuesto beneficio infinito que supone un retraso excederá siempre ese coste. Esta lógica parece sugerir que **Burns** debería esperar eternamente para jugar. Pero, esta estrategia debe ser por la misma razón rechazada: ¿por qué quedarse para siempre en el infierno con la esperanza de incrementar la posibilidad de abandonarlo? Para hacer esto,

**¿no sería mejor arriesgarse y jugar?**





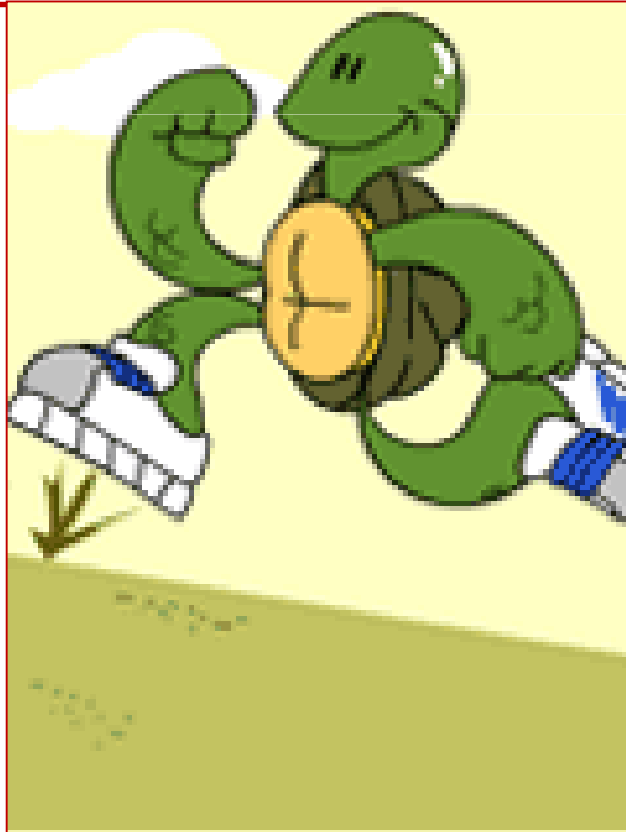
*no me quieras mentir zenon amigo*

*la flecha horadara mi corazon*

*por mas infinitud de infimos trayectos que ha de cubrir*

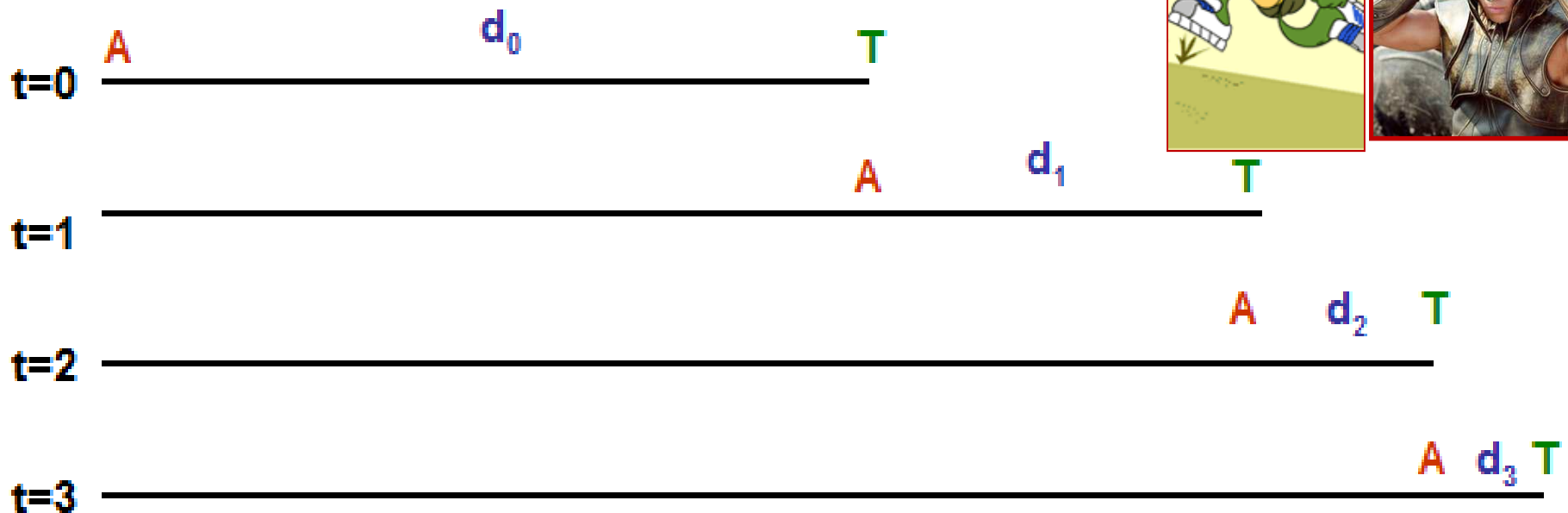
*Jesús Malia, A Zenón de Elea en La cinta de Moebius (2007)*

Se arregla una carrera entre Aquiles y la tortuga. Como Aquiles es mucho más veloz que la tortuga –y es un héroe– permite una cierta ventaja al ‘lentísimo’ animal.



Se arregla una carrera entre Aquiles y la tortuga. Como Aquiles es mucho más veloz que la tortuga –y es un héroe– permite una cierta ventaja al ‘lentísimo’ animal.

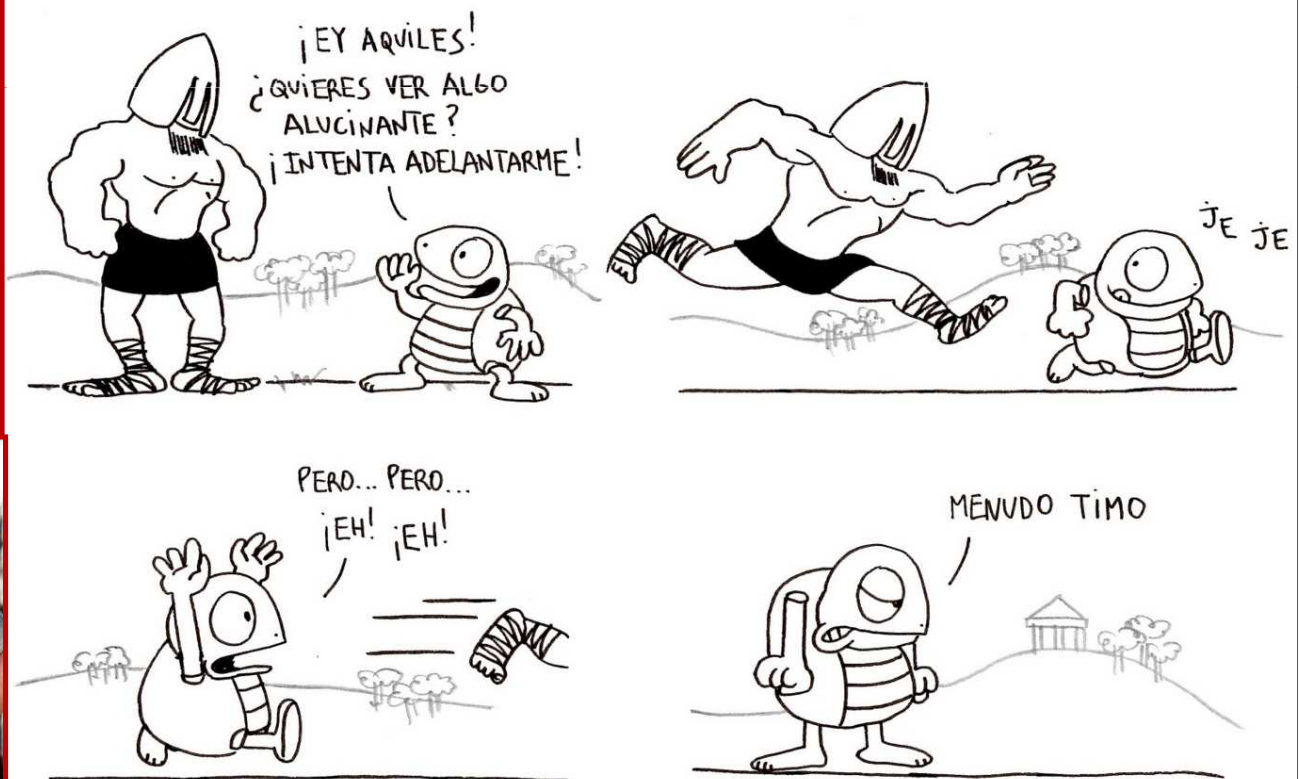
La prueba asombrosa de Zenón es que Aquiles no puede nunca alcanzar a la tortuga, independientemente de lo rápido que corra y de lo larga que sea la carrera: cada vez que el perseguidor llega a un lugar donde ha estado el animal, la tortuga se adelanta un poco...



Se arregla una carrera entre Aquiles y la tortuga. Como Aquiles es mucho más veloz que la tortuga –y es un héroe– permite una cierta ventaja al ‘lentísimo’ animal.

La prueba asombrosa de Zenón es que Aquiles no puede nunca alcanzar a la tortuga, independientemente de lo rápido que corra y de lo larga que sea la carrera: cada vez que el perseguidor llega a un lugar donde ha estado el animal, la tortuga se adelanta un poco...

La paradoja aparece al pensar que todo intervalo de tiempo –o de espacio– es infinitamente divisible.



## 2. Paradojas geométricas

*Se duerme la tangente  
en el punto efímero  
donde la circunferencia orilla  
un encuentro.*

Daniel Ruiz, *Geometría en Poetas* (2011)

Guy Billout







***Los  
Embajadores  
(1533)***

**Holbein el  
joven  
(1497-1543)**

**National  
Gallery de  
Londres**





**Jean de Dinteville  
(1504-1555),  
embajador francés  
en Inglaterra.**





**Jean de Dinteville  
(1504-1555),  
embajador francés  
en Inglaterra.**

**Georges de Selve  
(1508-1541)  
obispo de Lavaur.**





**Jean de Dinteville  
(1504-1555),  
embajador francés  
en Inglaterra.**

**Georges de Selve  
(1508-1541)  
obispo de Lavaur.**

**Relojes solares, un globo  
terráqueo, instrumentos de  
navegación y de astronomía,  
libro de aritmética,...**





**Jean de Dinteville  
(1504-1555),  
embajador francés  
en Inglaterra.**

**Georges de Selve  
(1508-1541)  
obispo de Lavaur.**

**¿Y esto?**

**Relojes solares, un globo  
terráqueo, instrumentos de  
navegación y de astronomía,  
libro de aritmética,...**





Antes de descubrirlo,... un poco de historia. Fecha: **11 de abril de 1533**.

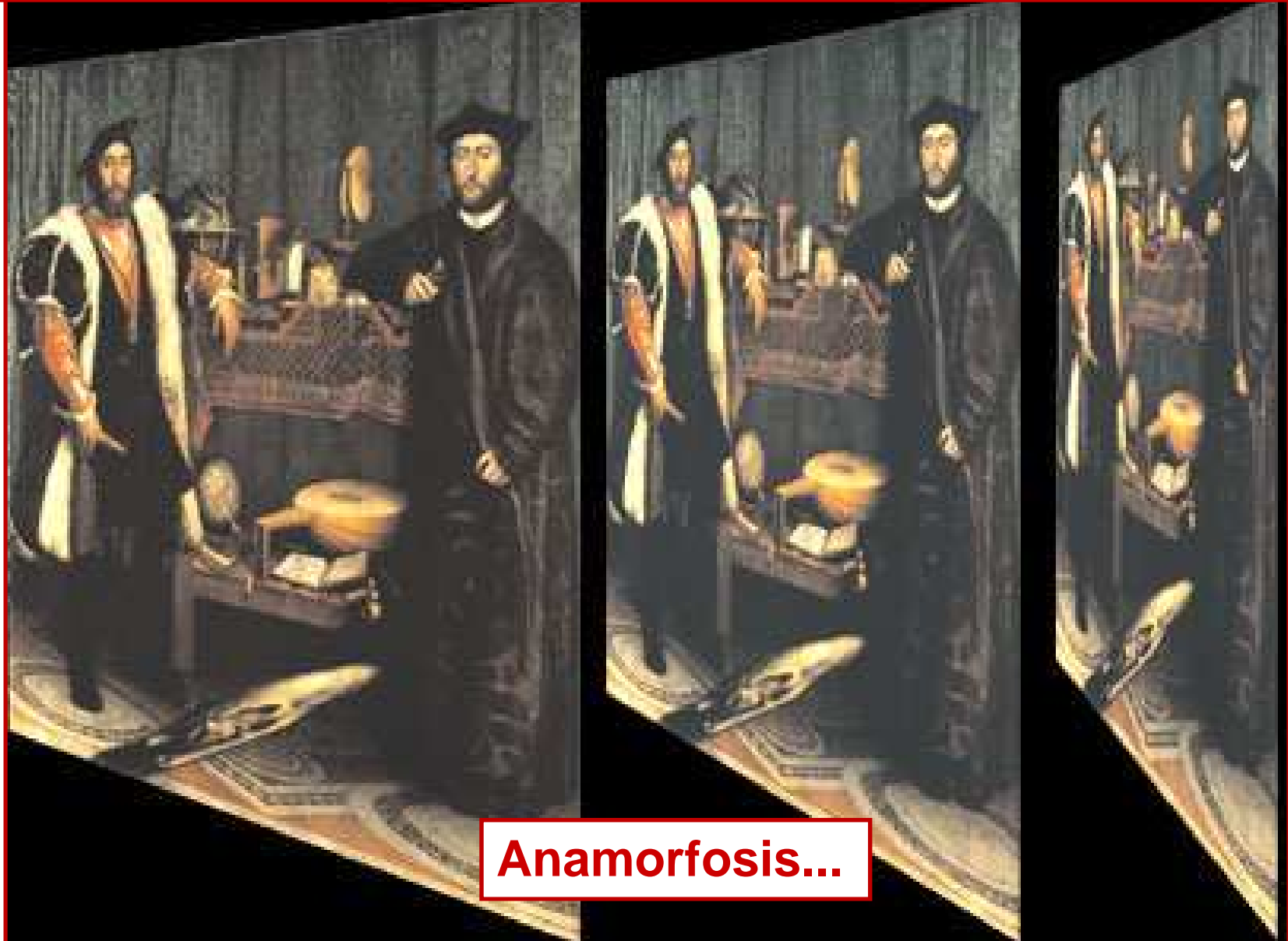
Poco tiempo antes, **Enrique VIII** solicitaba al papa **Clemente VII** anular su matrimonio con **Catalina de Aragón**, ya que de su unión no había nacido ningún heredero varón. El papa no accede a este favor, lo que no impide al monarca desposar en secreto a **Ana Bolena** el 25 de enero de 1533.

A principios de abril, **Thomas Cranmer**, el arzobispo de Canterbury, anula el matrimonio con Catalina y declara a Ana Bolena Reina de Inglaterra.

El hecho no tiene precedentes, y se envía una embajada francesa para intentar una reconciliación con el papa: dos de estos embajadores están representados en el cuadro.

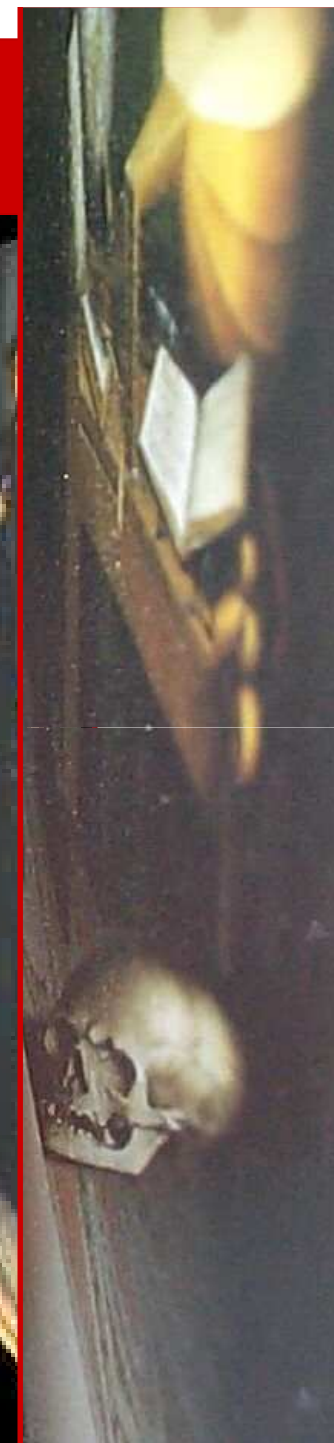


**Y, al salir de la sala, al mirar el cuadro desde otro punto de vista, aparece...**



**Anamorfosis...**

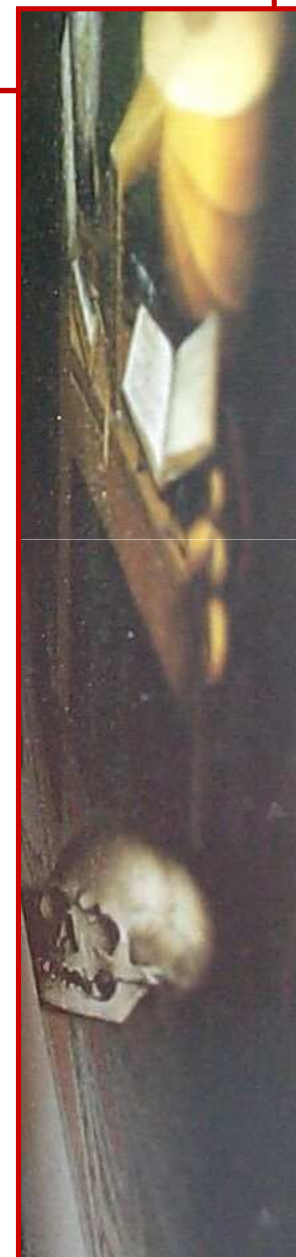
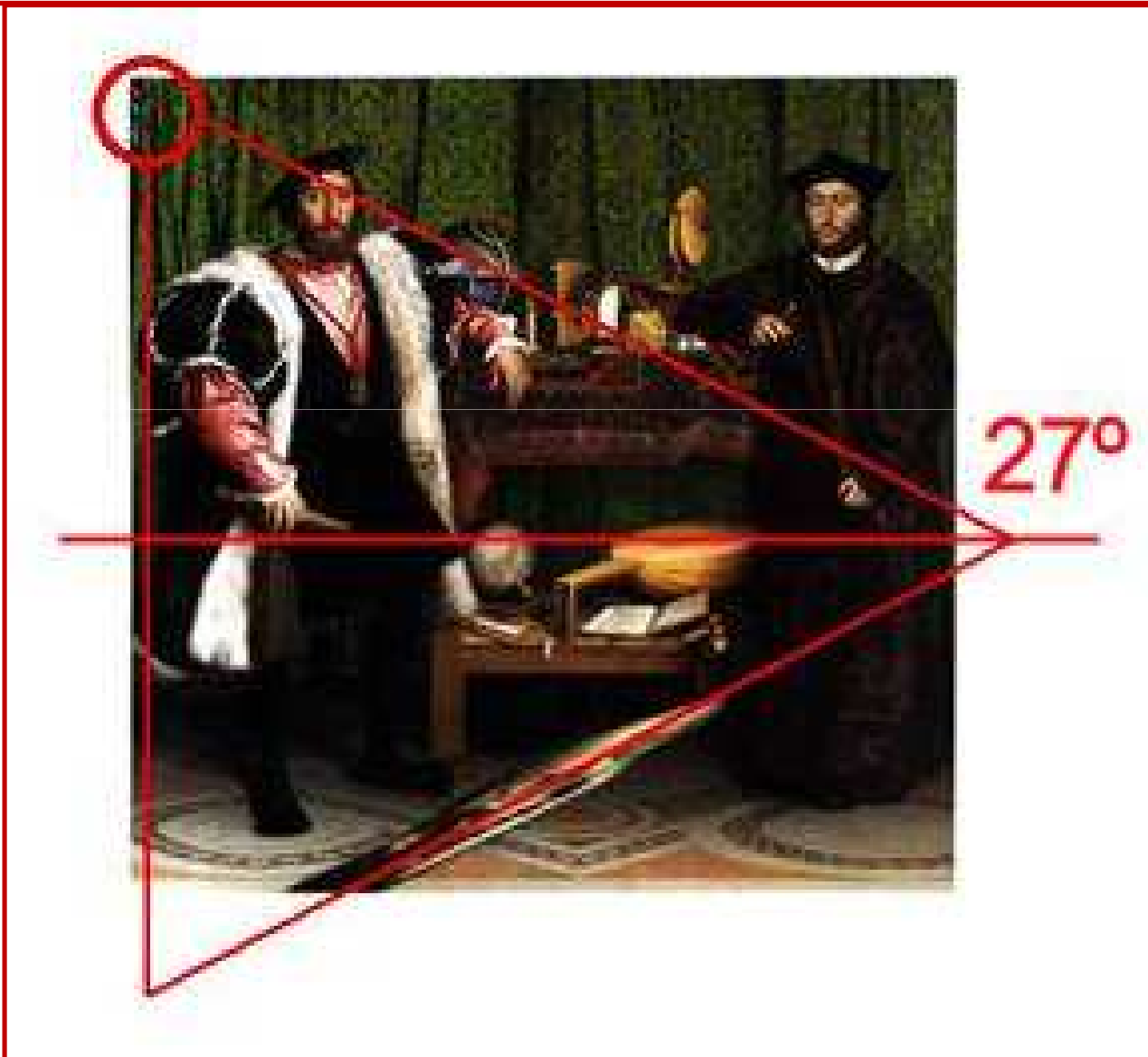
**Y, al salir de la sala, al mirar el cuadro desde otro punto de vista, aparece...**



**Anamorfosis...**

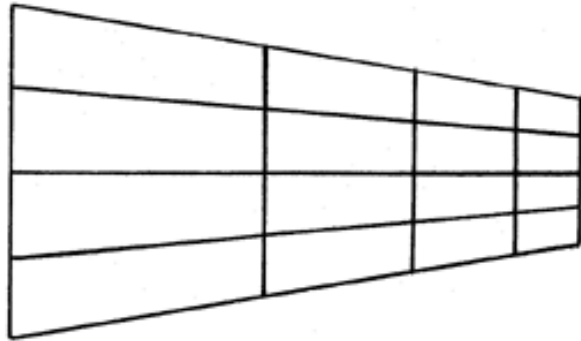
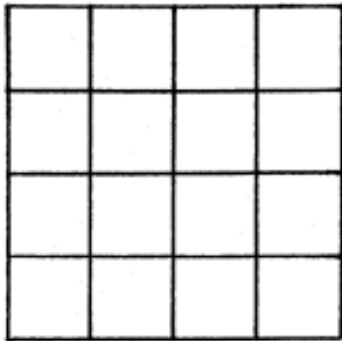
¿Firma del pintor? HOLBEIN = (**bein**) hueso (**hohl**) hueco

¿Muerte de la dinastía (Los Tudor)?



# ¿Qué es una anamorfosis?

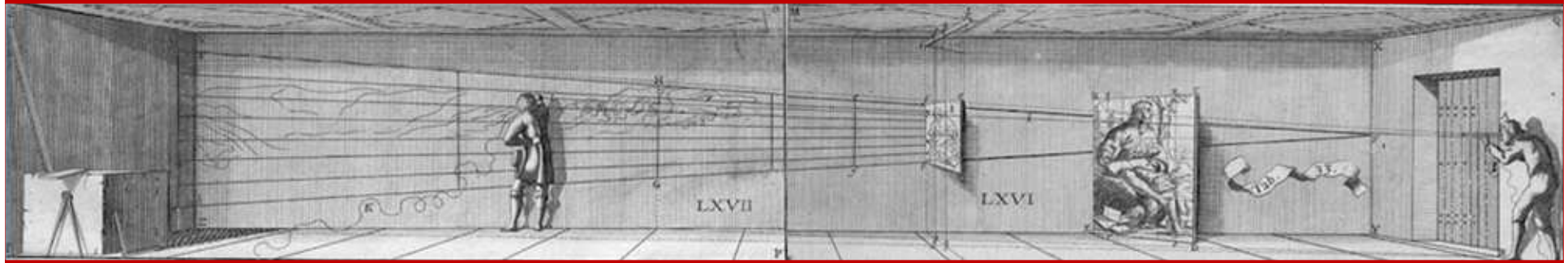
Una **anamorfosis** es una deformación reversible de una imagen a través de procedimientos matemáticos u ópticos.



En este grabado de Dürero, el artista usa un retículo (velo de Alberti) para guardar las proporciones de la modelo.

¿Y si no se coloca el enrejado de forma perpendicular?

La anamorfosis de *Los Embajadores* es de **tipo oblicuo**



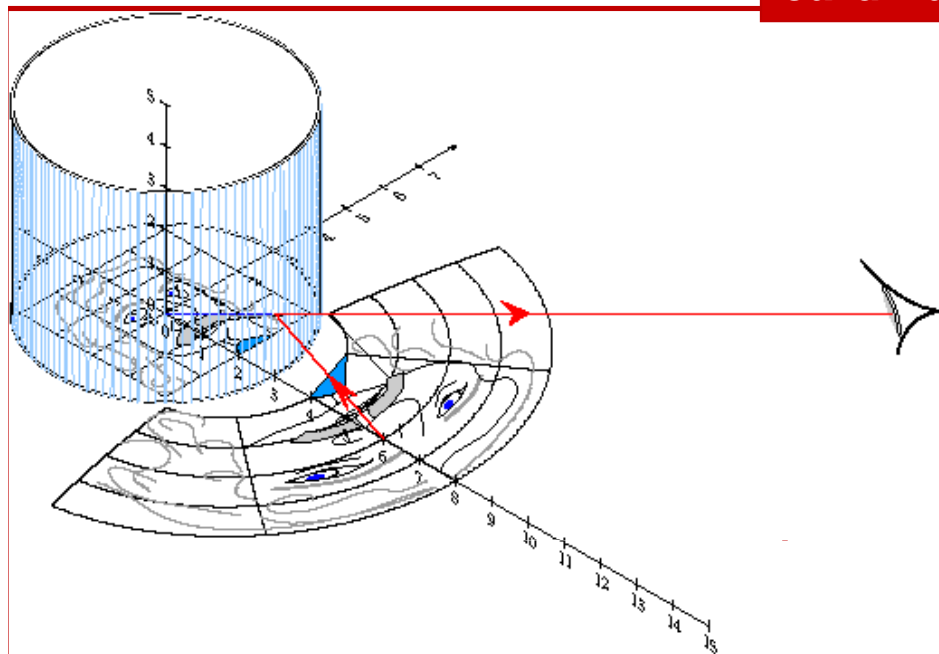
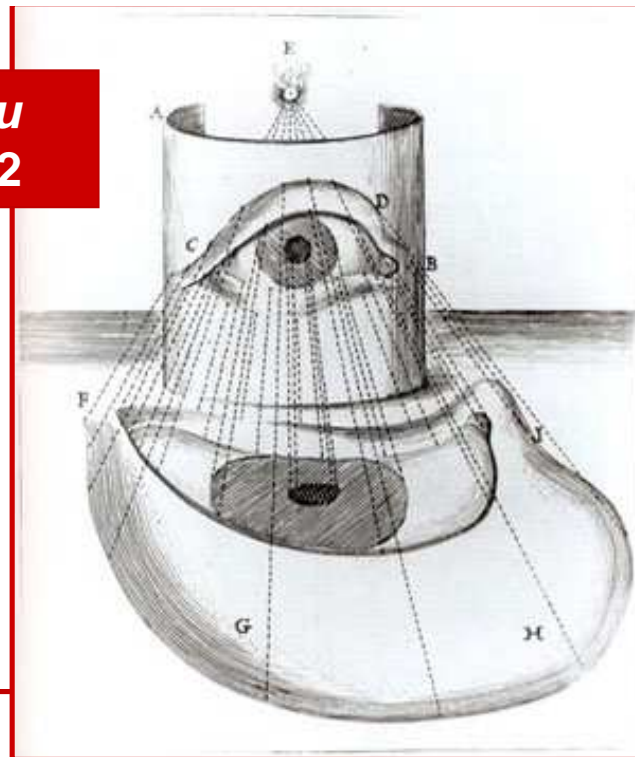
San Juan Evangelista en Patmos, fresco ejecutado en los conventos de los Mínimos en Roma 1642 y en Paris 1644.

Hay anamorfosis de muchos tipos: cilíndricas, cónicas, piramidales, o combinaciones de varias de ellas.



## Anamorfosis cilíndrica

Mario Bettini, *L'Oeil du cardinal Colonna*, 1642



<http://members.aol.com/ManuelLuque3/miroirs.htm>

## Anamorfosis cónica

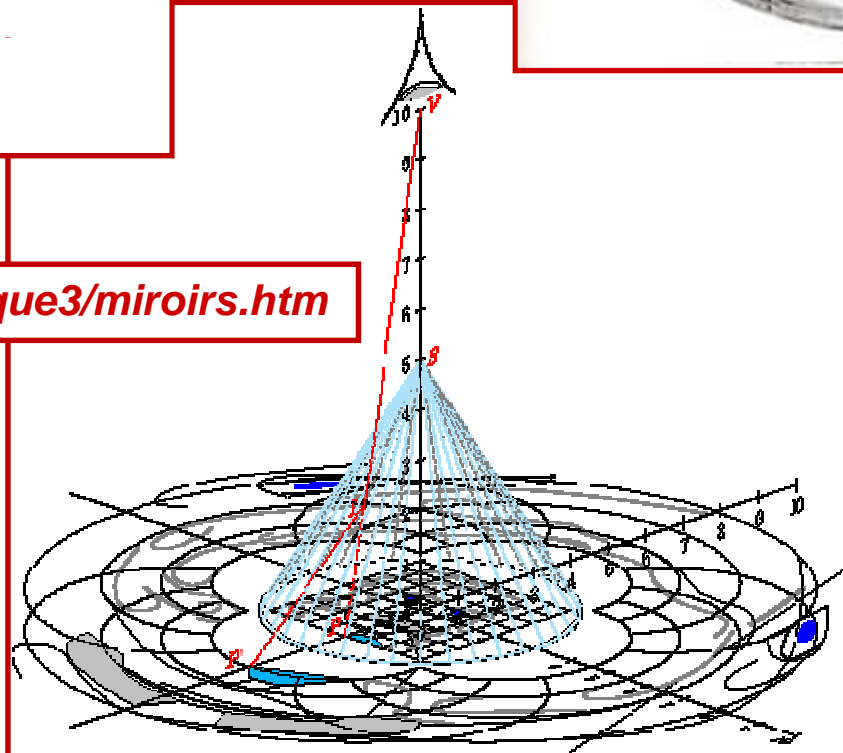
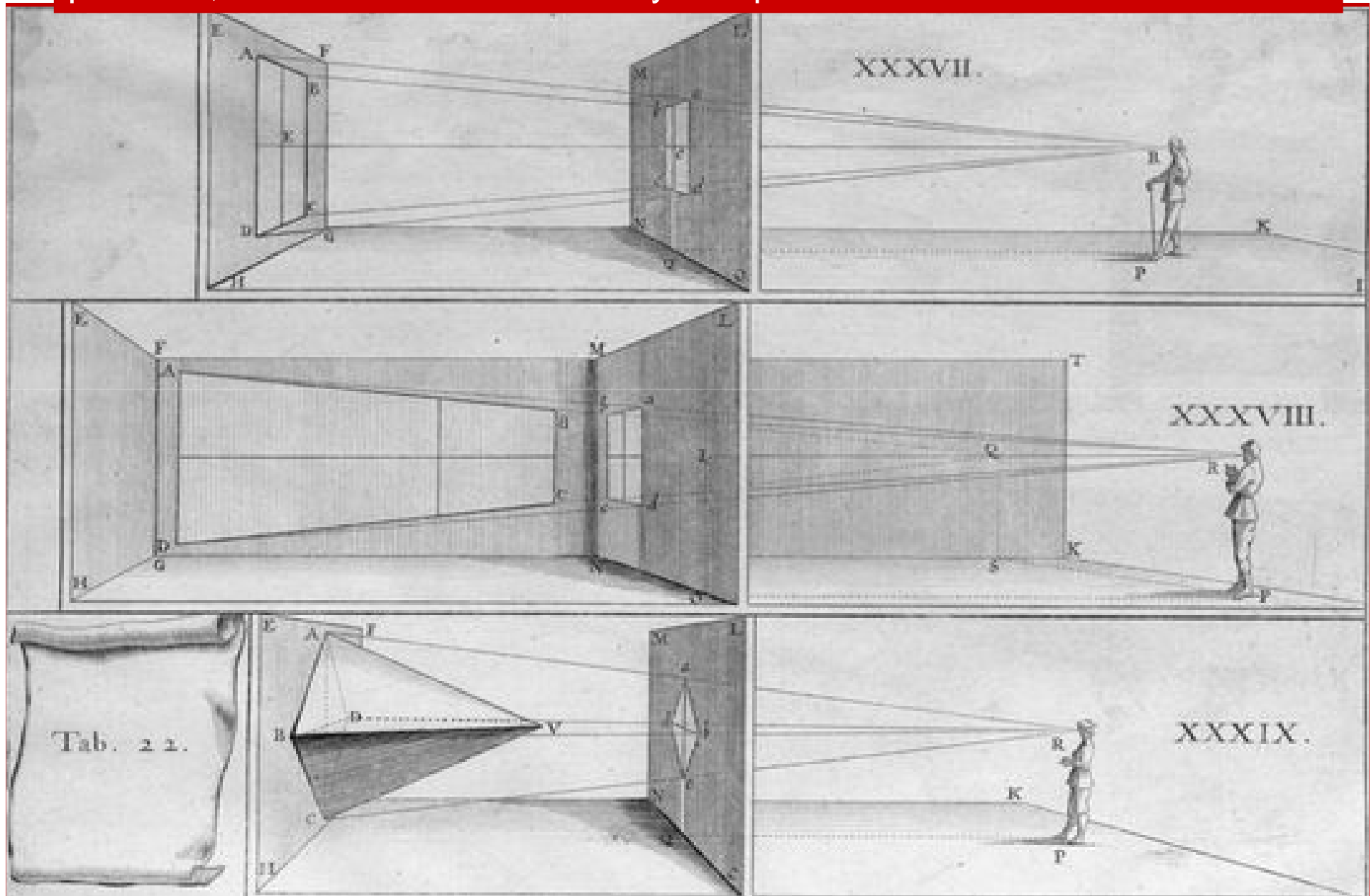


Imagen cualquiera manteniendo las proporciones –preservando la perspectiva–, una anamorfosis oblicua y una piramidal.





Erhard Schön (*Aus, du alter Tor!*, 1538). En la imagen de la izquierda aparece un viejo cortejando a una joven mientras ella le roba la bolsa de dinero –o toma el dinero como pago a ‘sus favores’–y se la da a un joven escondido tras la cortina –¿su amante?, ¿su proxeneta? –.

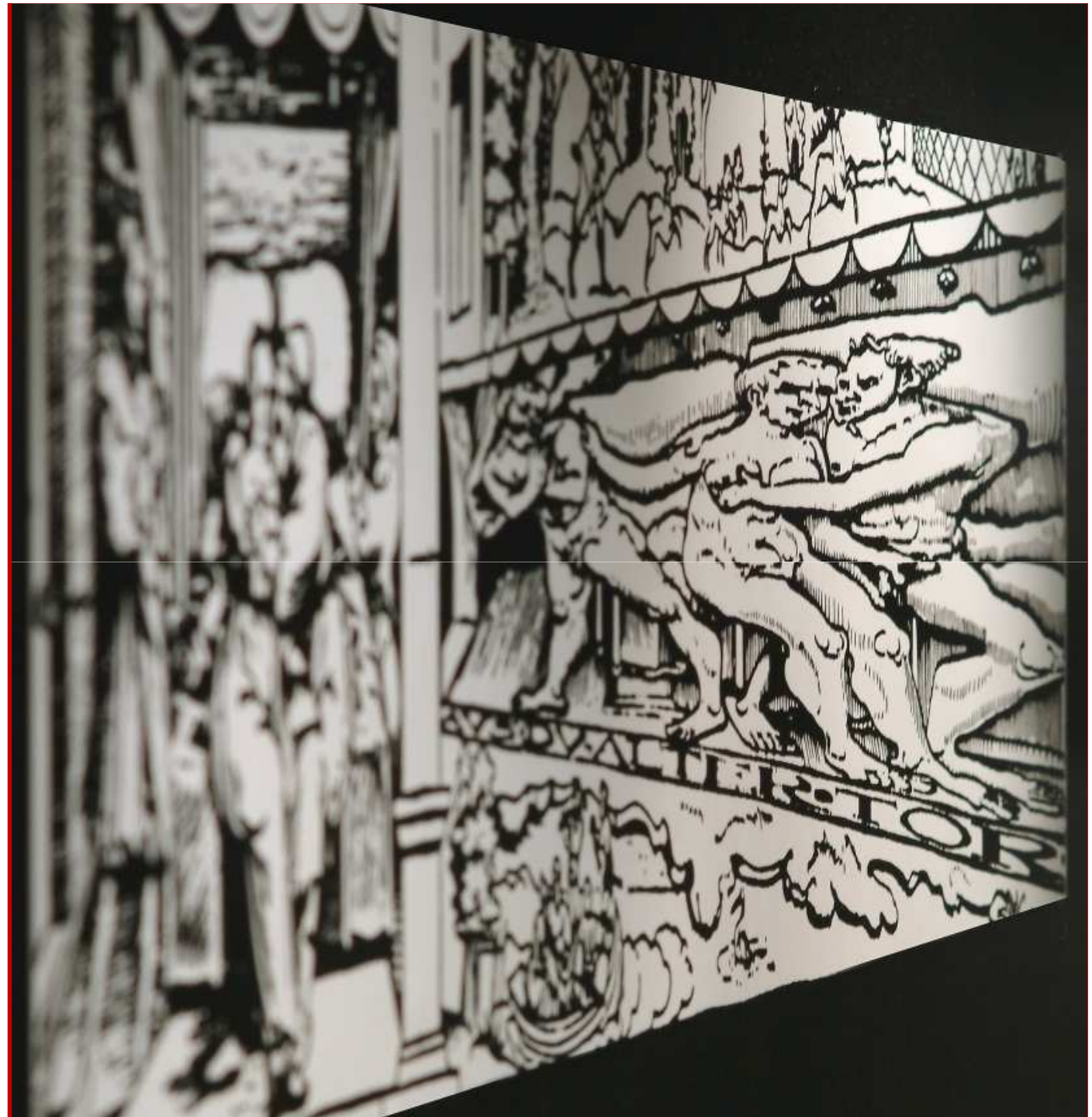
En la imagen distorsionada de la derecha se puede ver frontalmente un paisaje, con cazadores y unas extrañas líneas.





Al observarla desde el ángulo correcto, se descubre el final de la historia: la mujer expulsa al anciano, mientras ella y su amante se dedican a 'otras actividades'.

Schön esconde de este modo una escena erótica que no podía aparecer de manera explícita.





Otra bellísima  
anamorfosis  
cilíndrica de  
Itsván Orosz  
(2007) es:

*Edgar Allan  
Poe: The  
Raven*

en donde tras  
un  
impresionante  
cuervo se  
esconde...







**Anamorfosis cilíndricas**

**Siglo XVIII**  
**Museo del Cinema de Girona**





István Orosz: *La isla misteriosa...*



**István Orosz**

*La isla misteriosa y el retrato de Julio Verne*

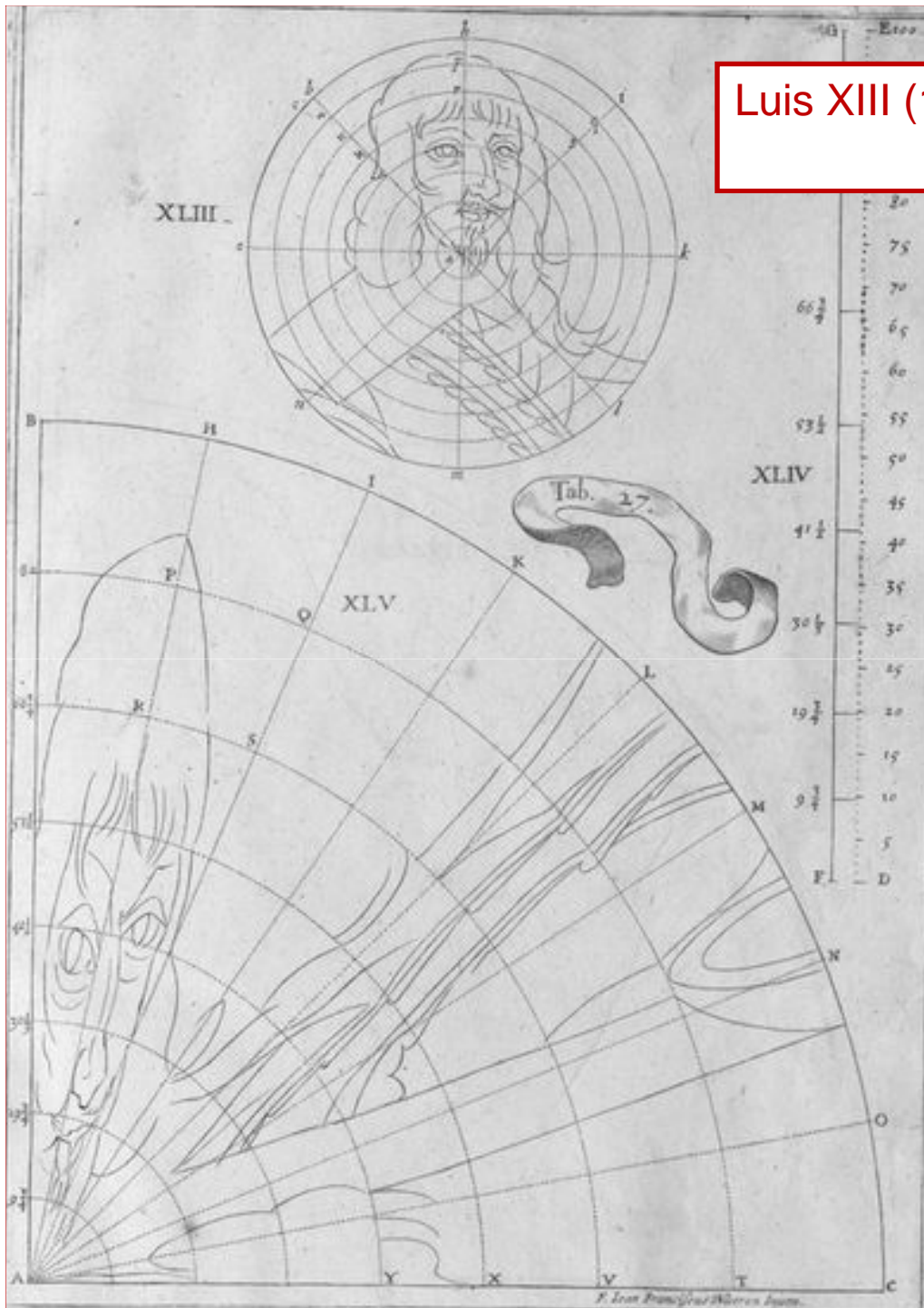


Luis XIII (1638)

Anamorfosis cónica



Siglo XVIII  
Museo del Cinema de  
Girona





# ANAMORPH ME!

Existen programas de libre acceso que permiten realizar anamorfosis. Una de ellas es *Anamorph Me!* que puede descargarse gratuitamente desde: <http://www.anamorphosis.com/software.html>.



Anamorfosis  
oblicua  
desde abajo



# ANAMORPH ME!

Existen programas de libre acceso que permiten realizar anamorfosis. Una de ellas es *Anamorph Me!* que puede descargarse gratuitamente desde: <http://www.anamorphosis.com/software.html>.



Anamorfosis  
oblicua  
desde arriba



# ANAMORPH ME!

Existen programas de libre acceso que permiten realizar anamorfosis. Una de ellas es *Anamorph Me!* que puede descargarse gratuitamente desde: <http://www.anamorphosis.com/software.html>.



Anamorfosis  
cilíndrica

# ANAMORPH ME!

Existen programas de libre acceso que permiten realizar anamorfosis. Una de ellas es *Anamorph Me!* que puede descargarse gratuitamente desde: <http://www.anamorphosis.com/software.html>.

Anamorfosis  
cónica





**Jonty Hurwitz**



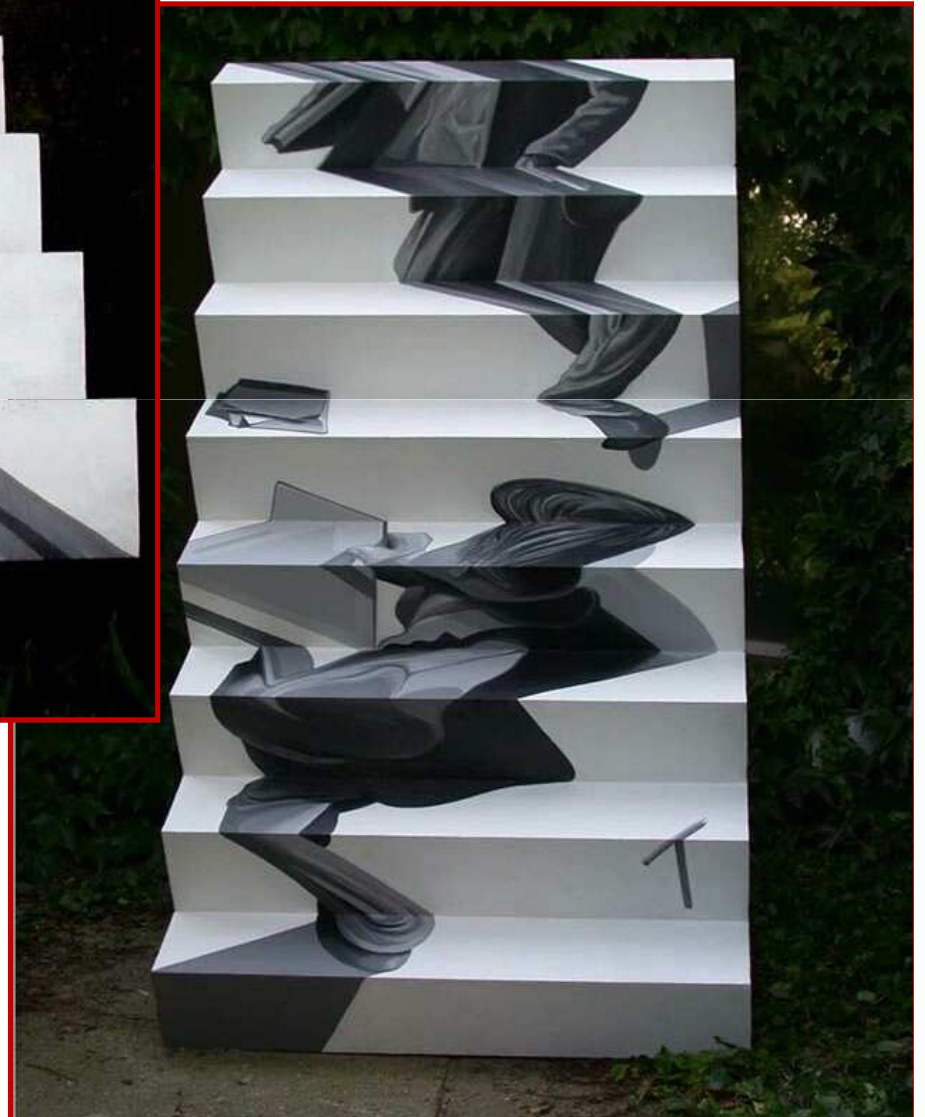
***Lo importante es no dejar de hacerse preguntas (Albert Einstein)***



### **Casa de las Ciencias de Logroño**

**La escultura de Domingo García y Antonio J. Lombillo es un tronco de cono invertido de acero inoxidable y de 2,5 metros de altura.**

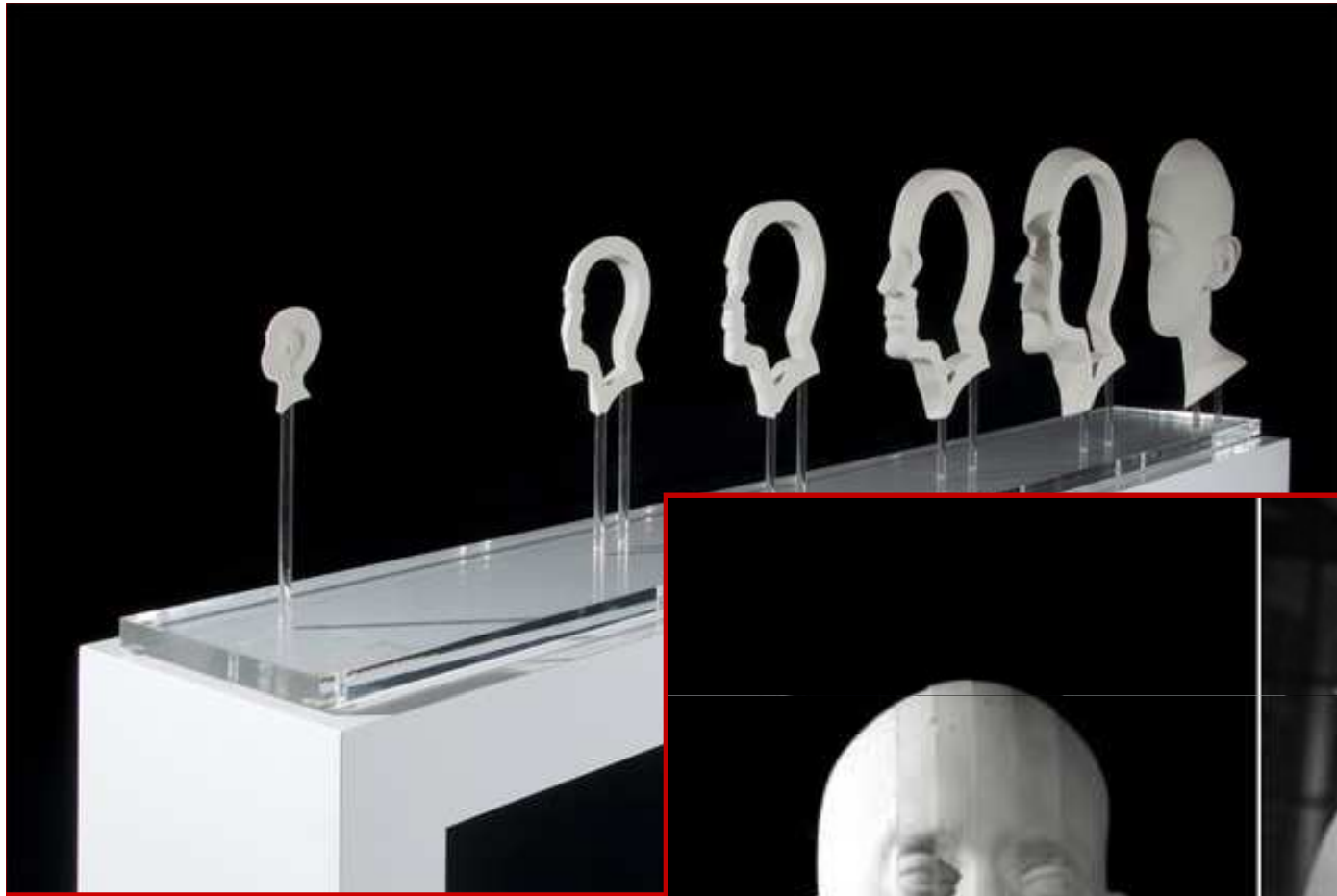




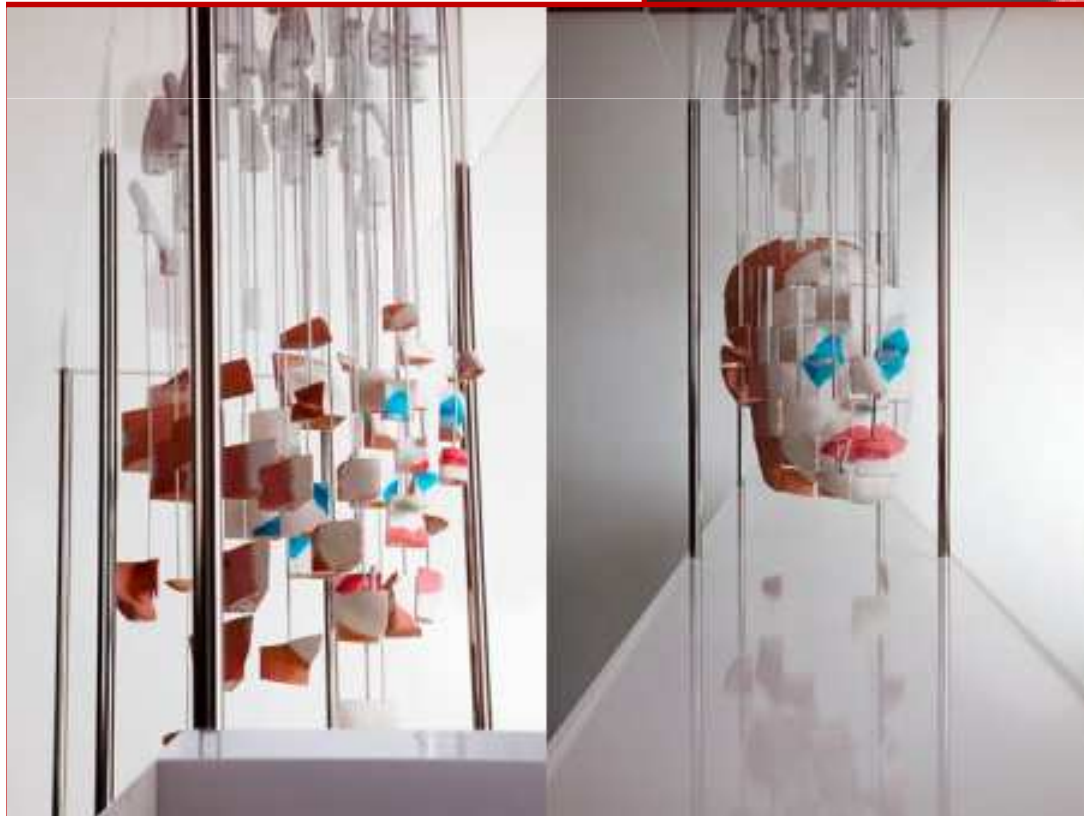
**István Orosz**







**Esculturas  
anamórficas  
Jonty Hurwitz**



**Esculturas  
anamórficas  
Jonty Hurwitz**



**(deceptive outward appearance)**

***Deceptive outward appearance*** (<http://olemartinlundbo.com/>) de ***Ole Martin Lund Bo*** (***Apariencia externa engañosa***).





icre scptiv e-act/vant appearance)





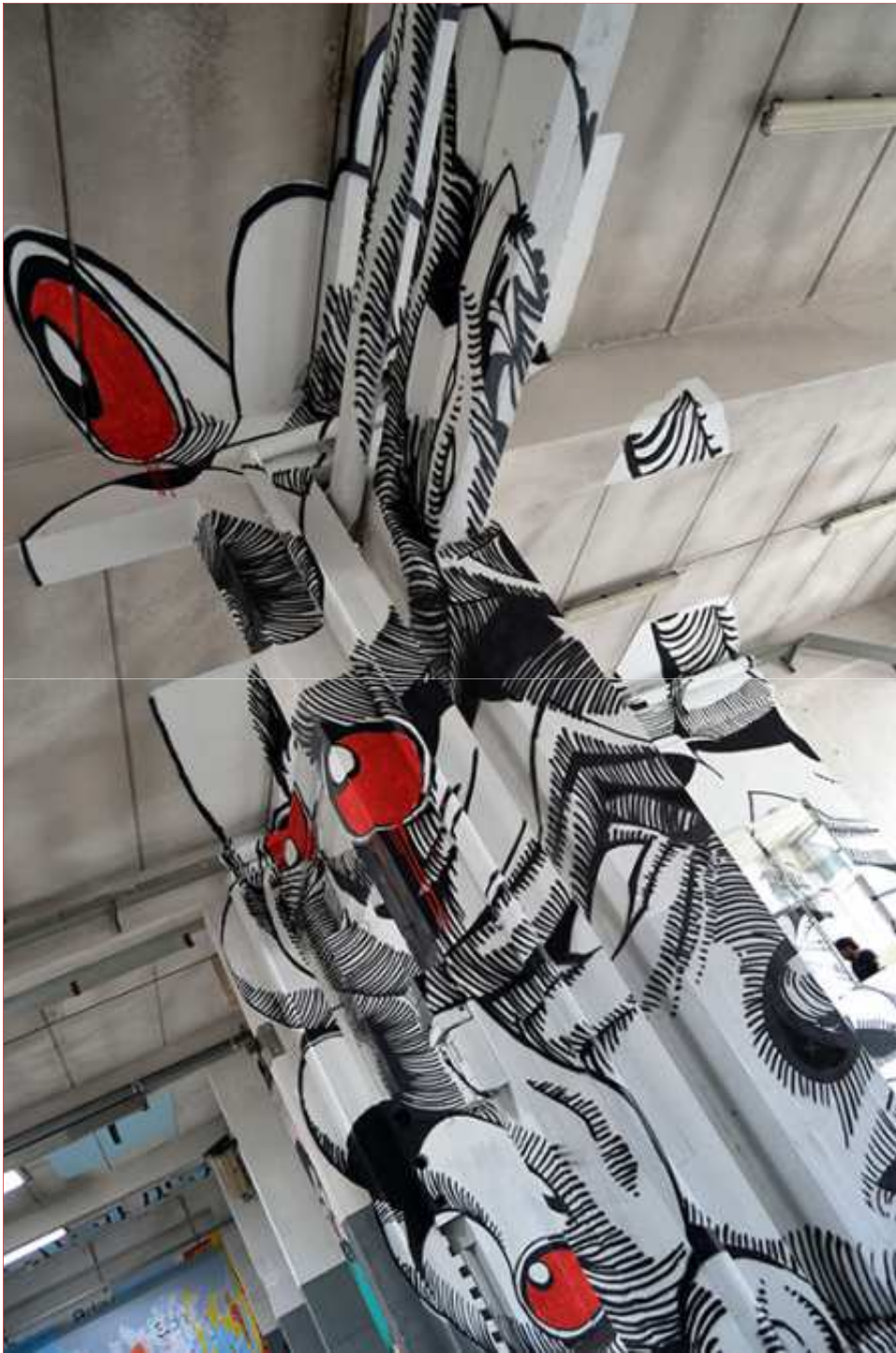






***Le temps déployé*** es una anamorfosis en 3D de Yves Charnay. Es un dodecaedro de acero inoxidable y aluminio, con una altura de 5 metros, una anchura de 6 y una profundidad de 11...











En la mitología griega, **Medusa** era la más terrible de las hermanas Gorgonas: de su cabeza -en lugar de cabellos- salían serpientes venenosas y cualquiera que la mirara quedaba instantáneamente convertido en estatua de piedra.

**Truly Design**  
(2011)

**Eduardo Relero**



**Grandes chorizos**

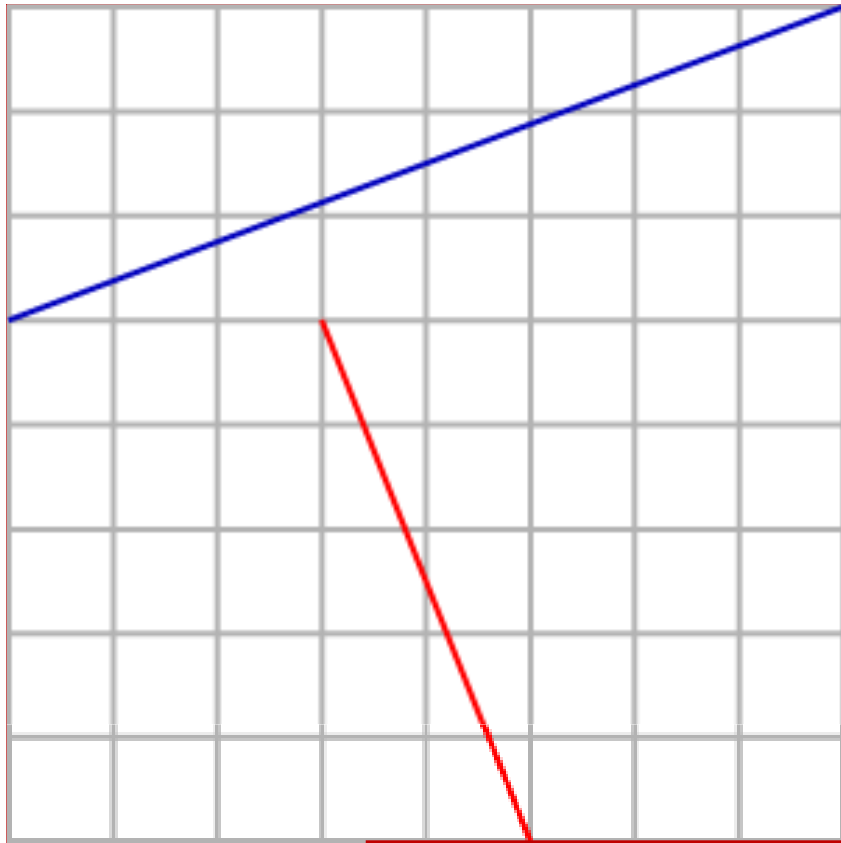




**Las anamorfosis se usan a menudo en señales de tráfico, para que las señales sean correctamente interpretadas por conductoras/as.**

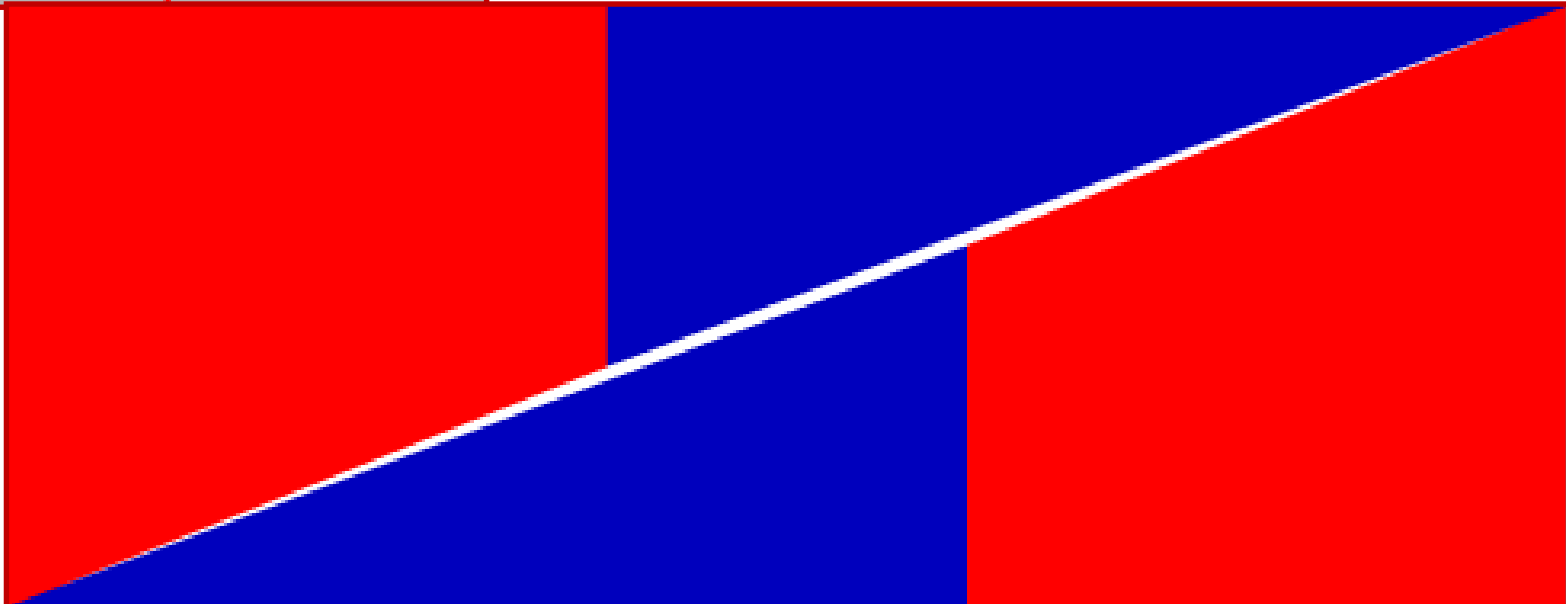
# Desapariciones geométricas

$$64 = 65 ?$$

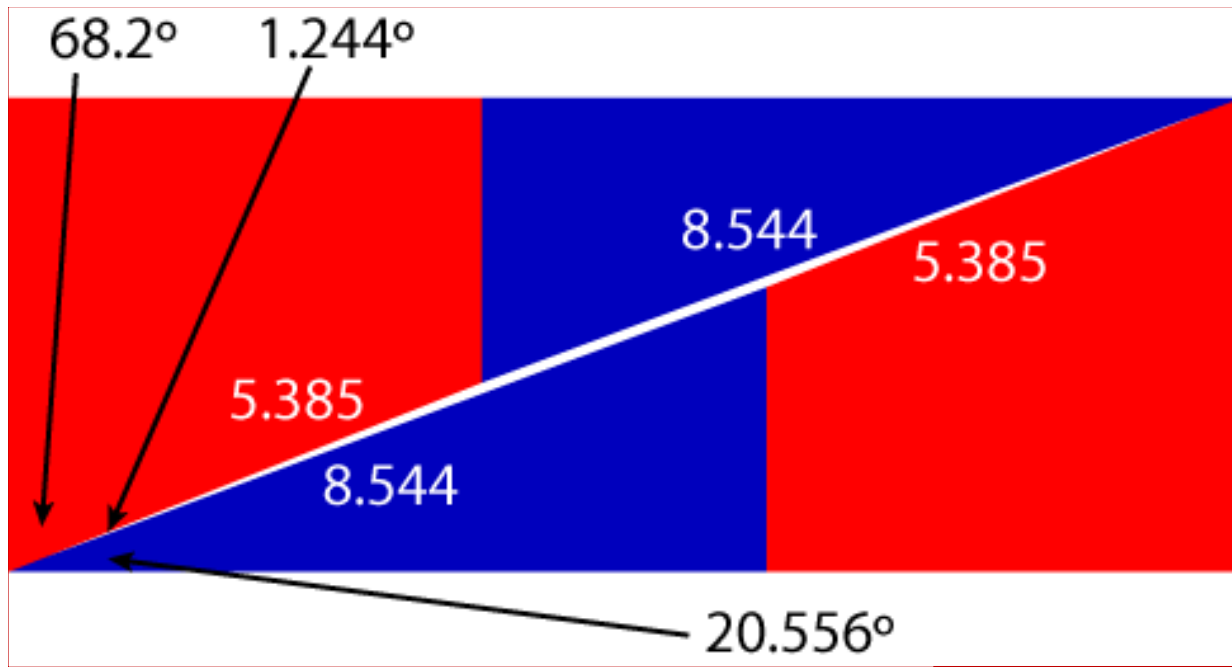


El segmento azul genera dos triángulos y el rojo dos trapezoides, se reajustan...

¿Ves la parte blanca?  
Es un paralelogramo con área 1.

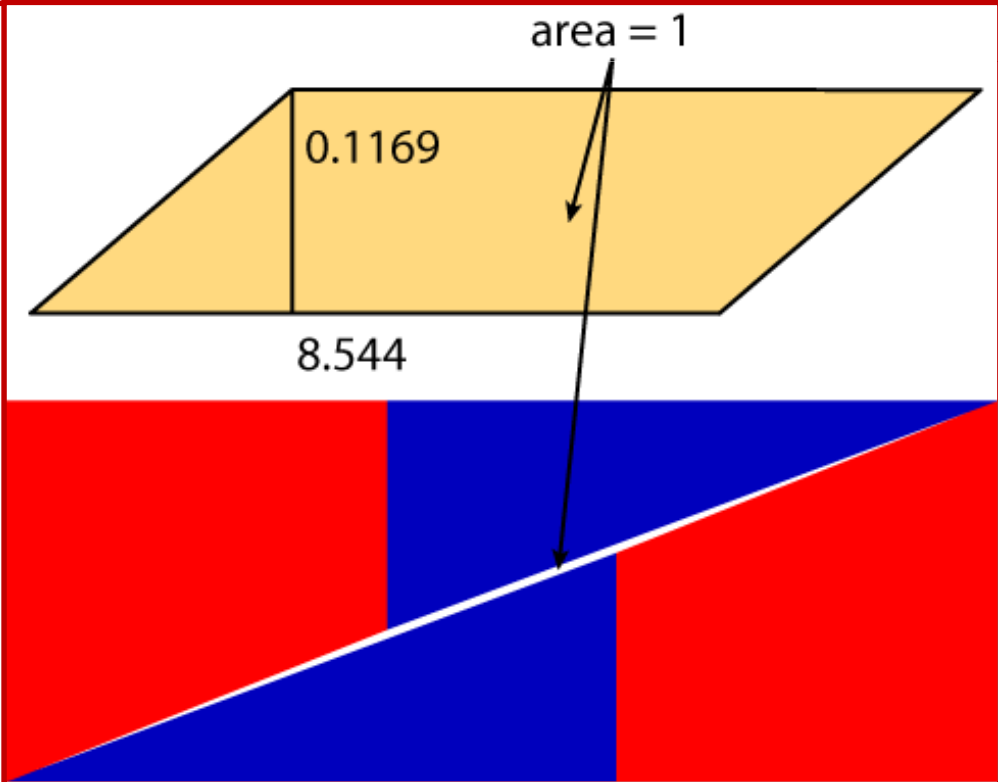






El ángulo agudo del paralelogramo blanco es  $90^\circ - 68.2^\circ - 20.556^\circ = 1.244^\circ$ .

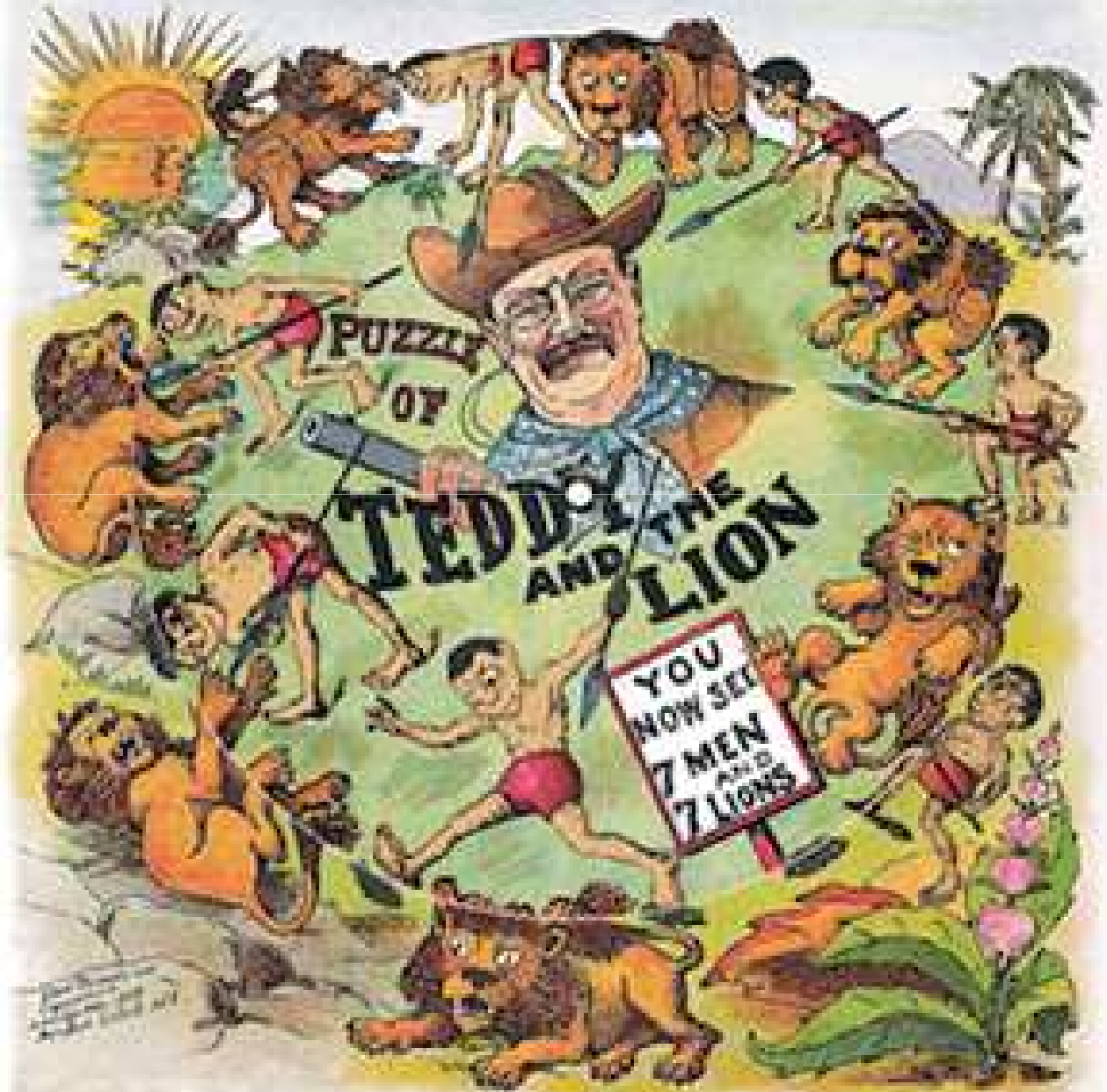
Así, el área del paralelogramo blanco es:  
 $8.544 \times \text{sen}(1.244) \times 5.385 =$   
**0.9988...**

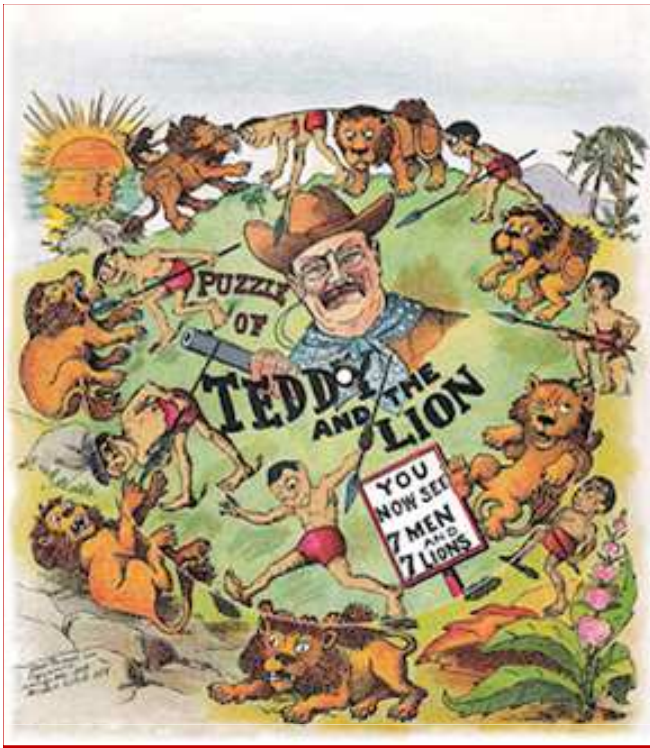


**Sam Loyd**  
**Teddy and the Lion**  
**(1909)**

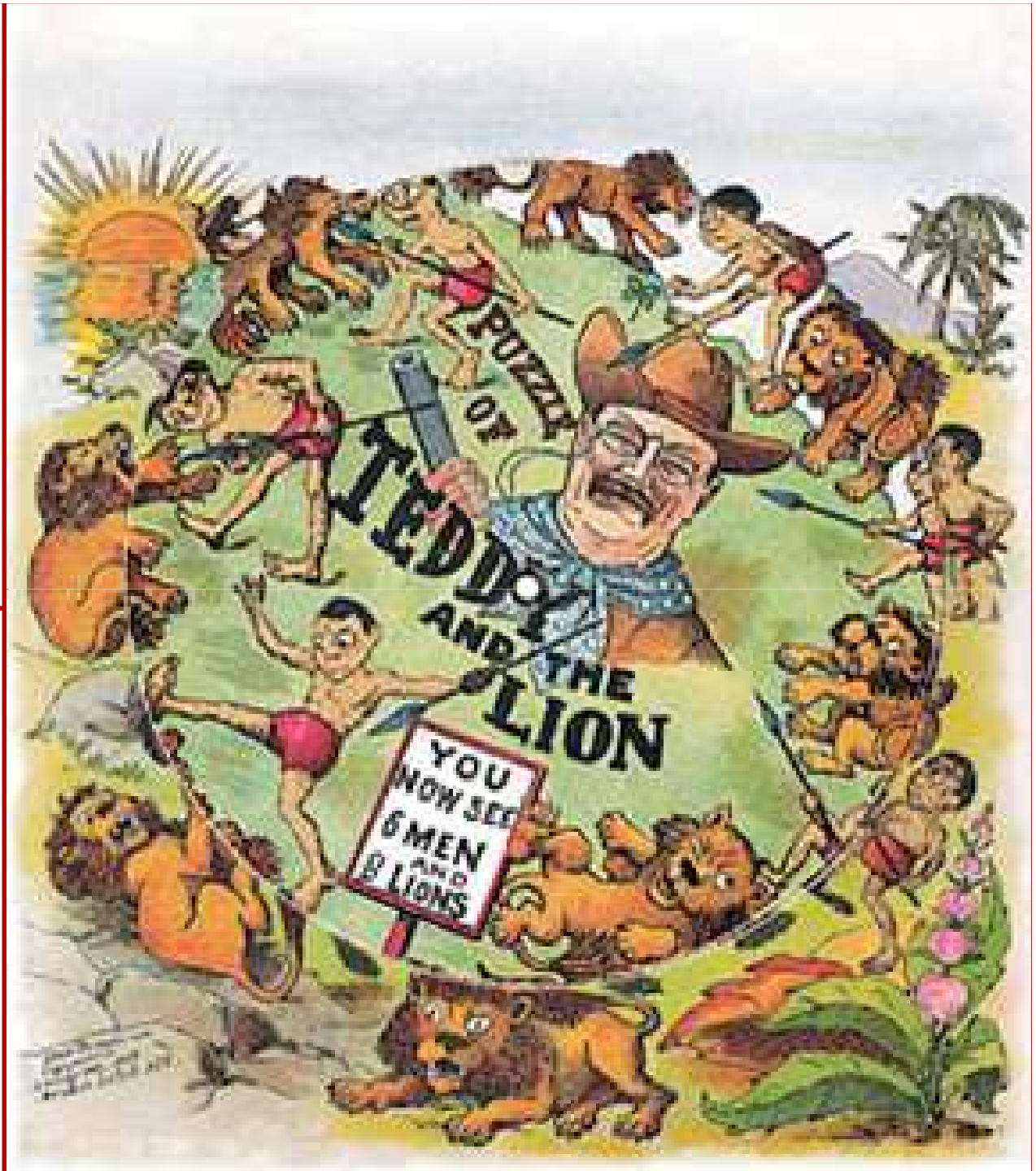
"Teddy" es  
Theodore Roosevelt  
que fue a África a un  
safari en 1909.

**7 hombres y 7**  
**leones... y si**  
**giras el círculo**  
**central...**

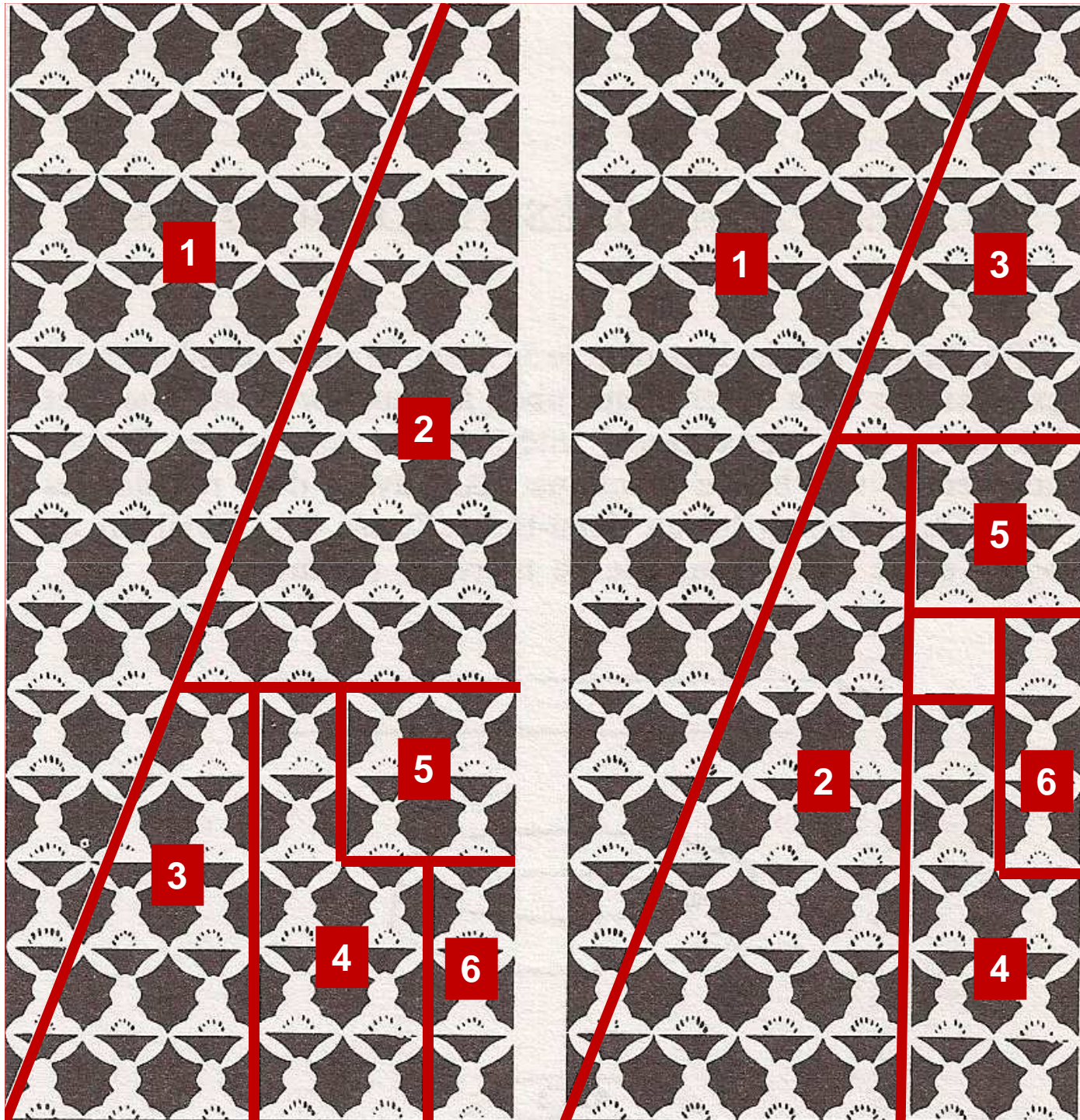




**6 hombres y 8 leones... ¿qué hombre se ha transformado en león?**



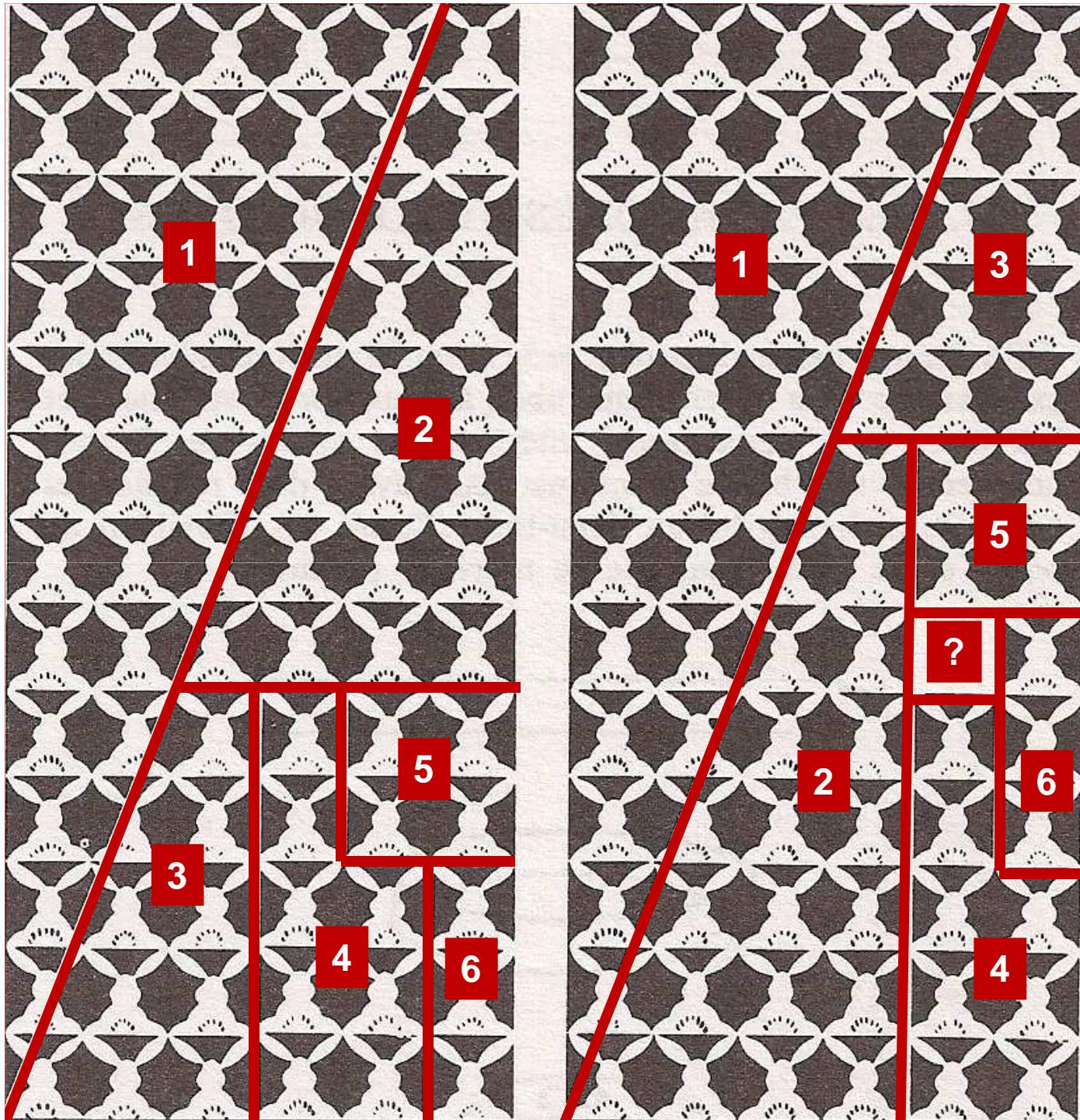




**Paradoja de Curry**  
 El primer rectángulo tiene  $6 \times 13 = 78$  conejos.  
 Tras cortar y recolocar quedan ¡77 conejos!







**Paradoja de Curry**  
 El primer rectángulo tiene  $6 \times 13 = 78$  conejos.  
 Tras cortar y recolocar quedan ¡77 conejos!  
 ¿Dónde ha quedado el conejo que falta?



8 huevos

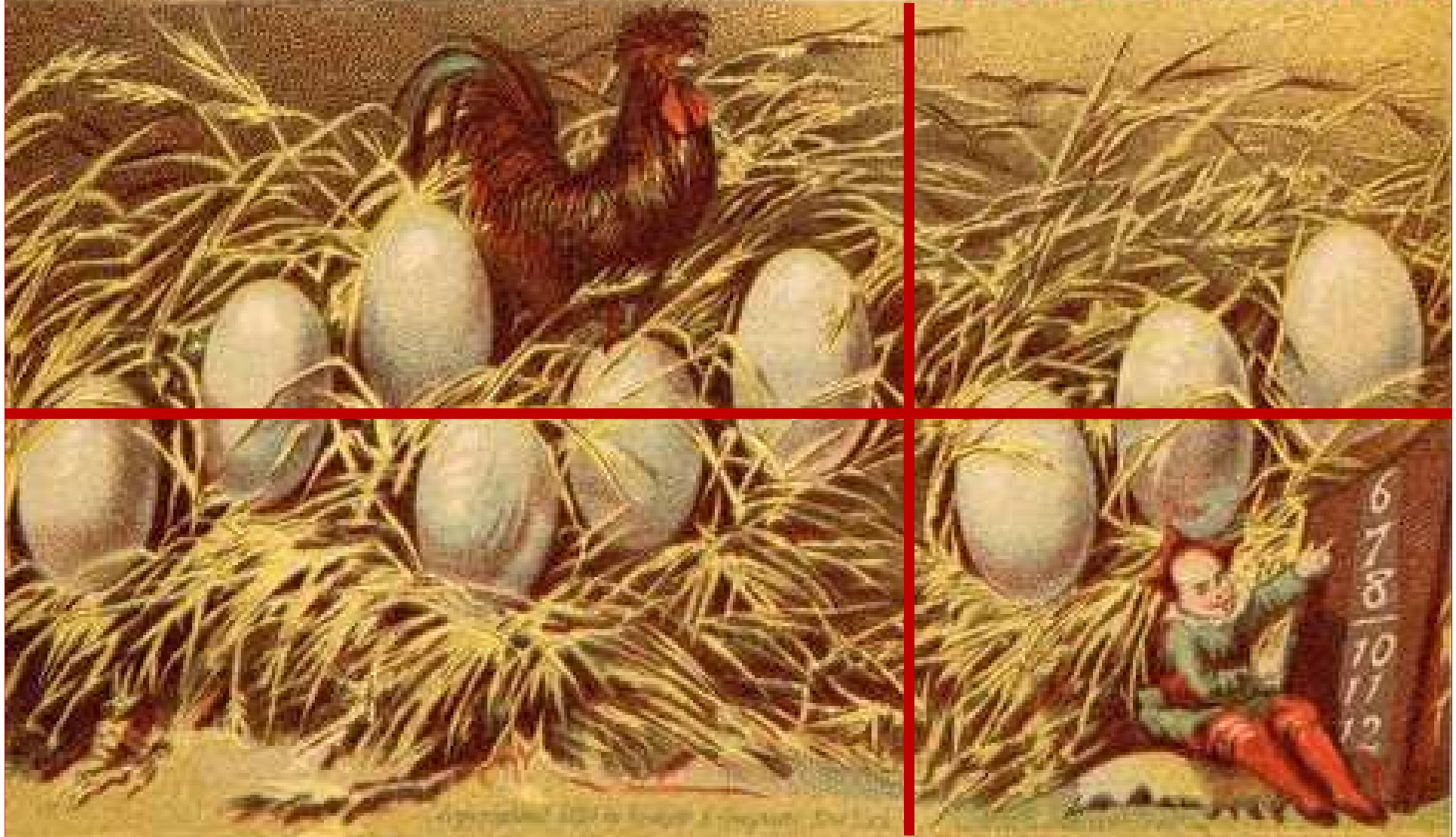
The Magical Eggs, Wemple & Company, 1880





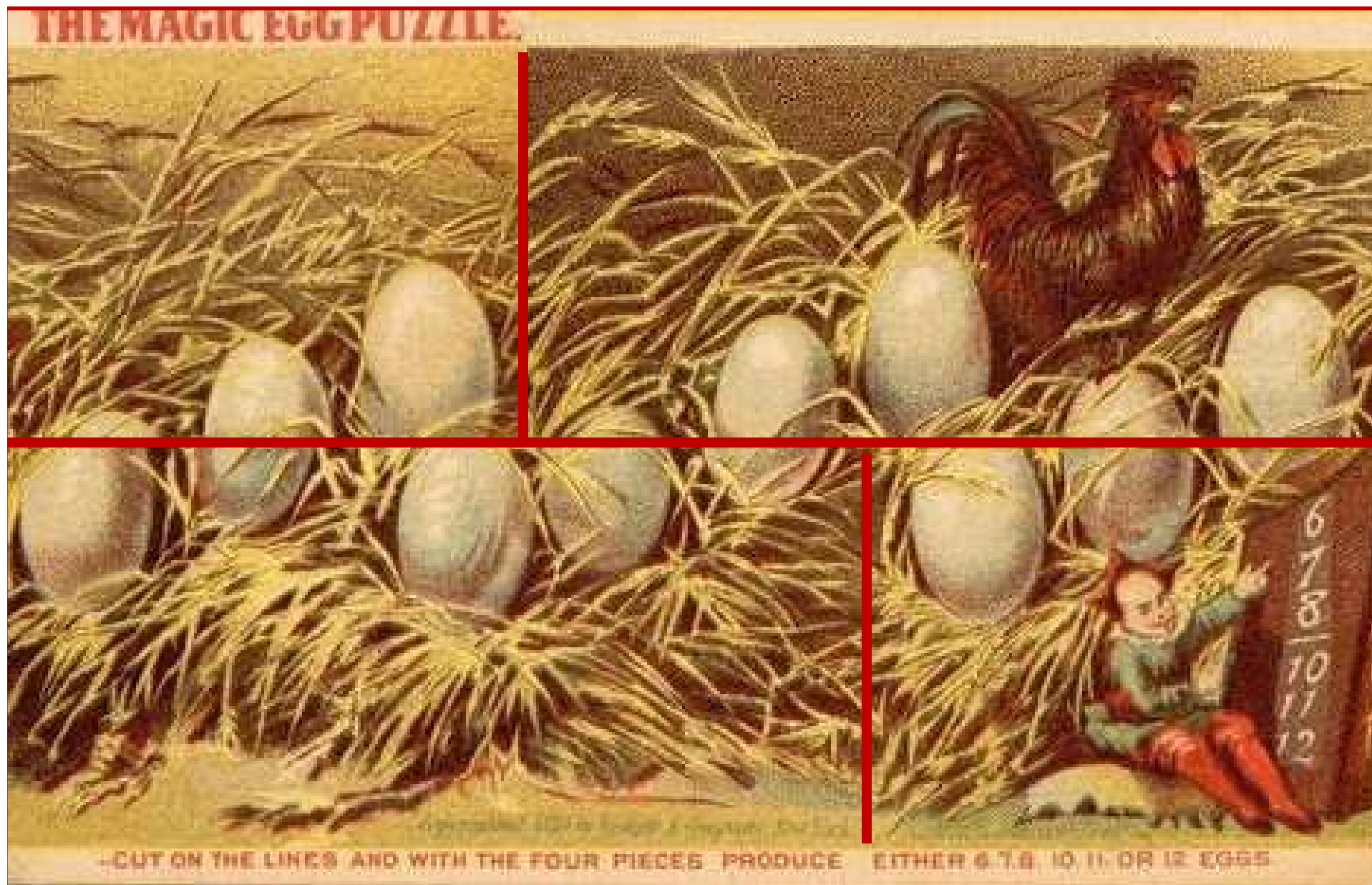
9 huevos

THE MAGIC EGG PUZZLE.



-CUT ON THE LINES AND WITH THE FOUR PIECES PRODUCE EITHER 6, 7, 8, 10, 11, OR 12 EGGS.

10 huevos



# 3. Paradojas lógicas

*Tomen un círculo,  
acaríciendolo, y se  
hará un círculo  
vicioso...*

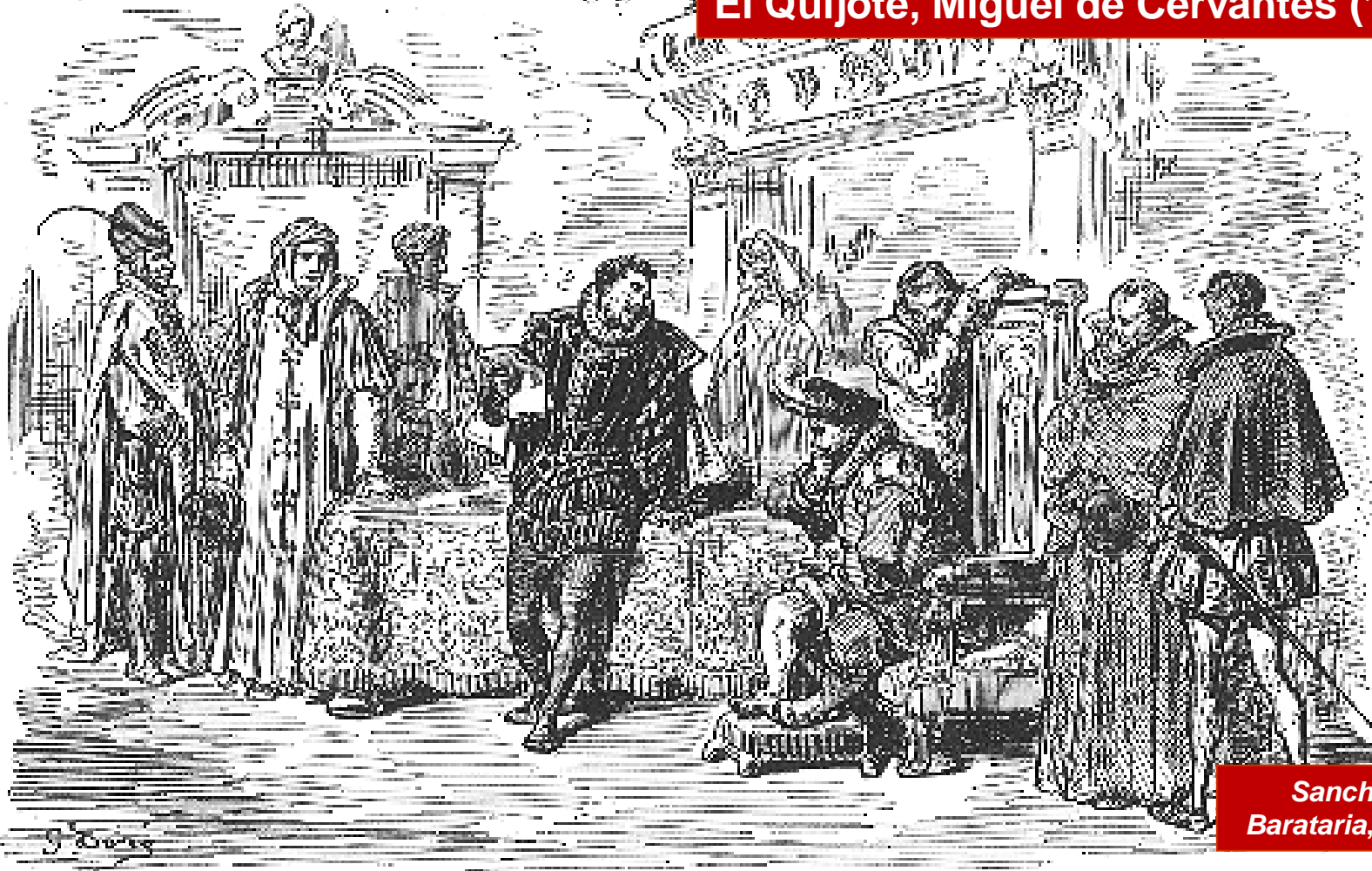
**Eugène Ionesco,**  
*La cantante calva*

**Guy Billout**





## El Quijote, Miguel de Cervantes (1547-1616)



*Sancho Panza en  
Barataria, Gustavo Doré*

En el tiempo que **Sancho** fue gobernador de la **ínsula Barataria**, tuvo que resolver complicadas situaciones que le planteaban sus “súbditos” para que hiciera justicia. Asombró a todos con las atinadas decisiones. Una de las más conocidas, es la siguiente paradoja.

– Señor, un caudaloso río dividía dos términos de un mismo señorío (y esté vuestra merced atento, porque el caso es de importancia y algo dificultoso). Digo, pues, que sobre este río estaba una puente, y al cabo della, una horca y una como casa de audiencia, en la cual de ordinario había cuatro jueces que juzgaban la ley que puso el dueño del río, de la puente y del señorío, que era en esta forma:

**“Si alguno pasare por esta puente de una parte a otra, ha de jurar primero adónde y a qué va; y si jurare verdad, déjenle pasar, y si dijere mentira, muera por ello ahorcado en la horca que allí se muestra, sin remisión alguna”. [...]**

Sucedió, pues, que tomando juramento a un hombre, juró y dijo que para el juramento que hacía, que **iba a morir en aquella horca que allí estaba, y no a otra cosa**. Repararon los jueces en el juramento y dijeron:

**“Si a este hombre le dejamos pasar libremente, mintió en su juramento, y, conforme a la ley, debe morir; y si le ahorcamos, él juró que iba a morir en aquella horca, y, habiendo jurado verdad, por la misma ley debe ser libre”.**

Pídese a vuesa merced, señor gobernador, qué harán los jueces con tal hombre.



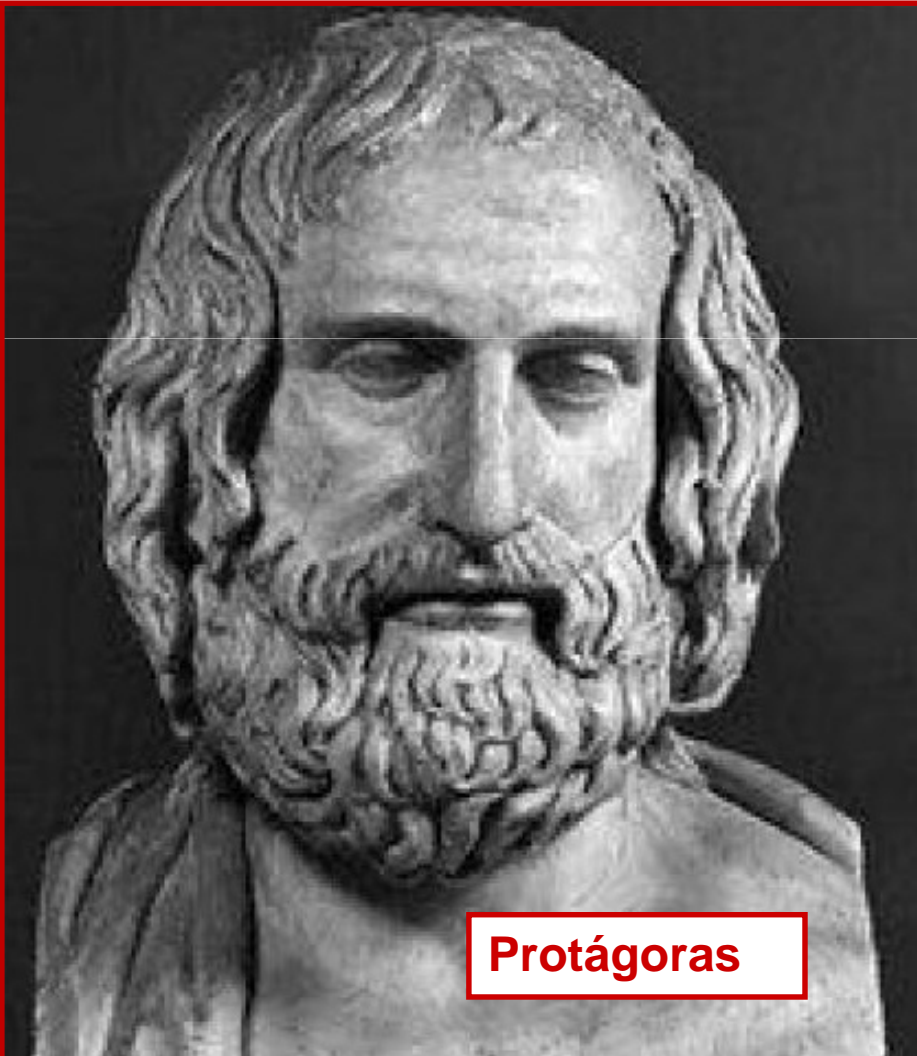
Sócrates. *¿No hay ninguna manera de eliminar estas paradojas?*

*Teeteto. Hay una manera muy simple, Sócrates.*

Sócrates. *¿Cuál es?*

*Teeteto. Evitarlas, como hace casi todo el mundo, y no preocuparse por ellas.*

Karl Popper, 1983

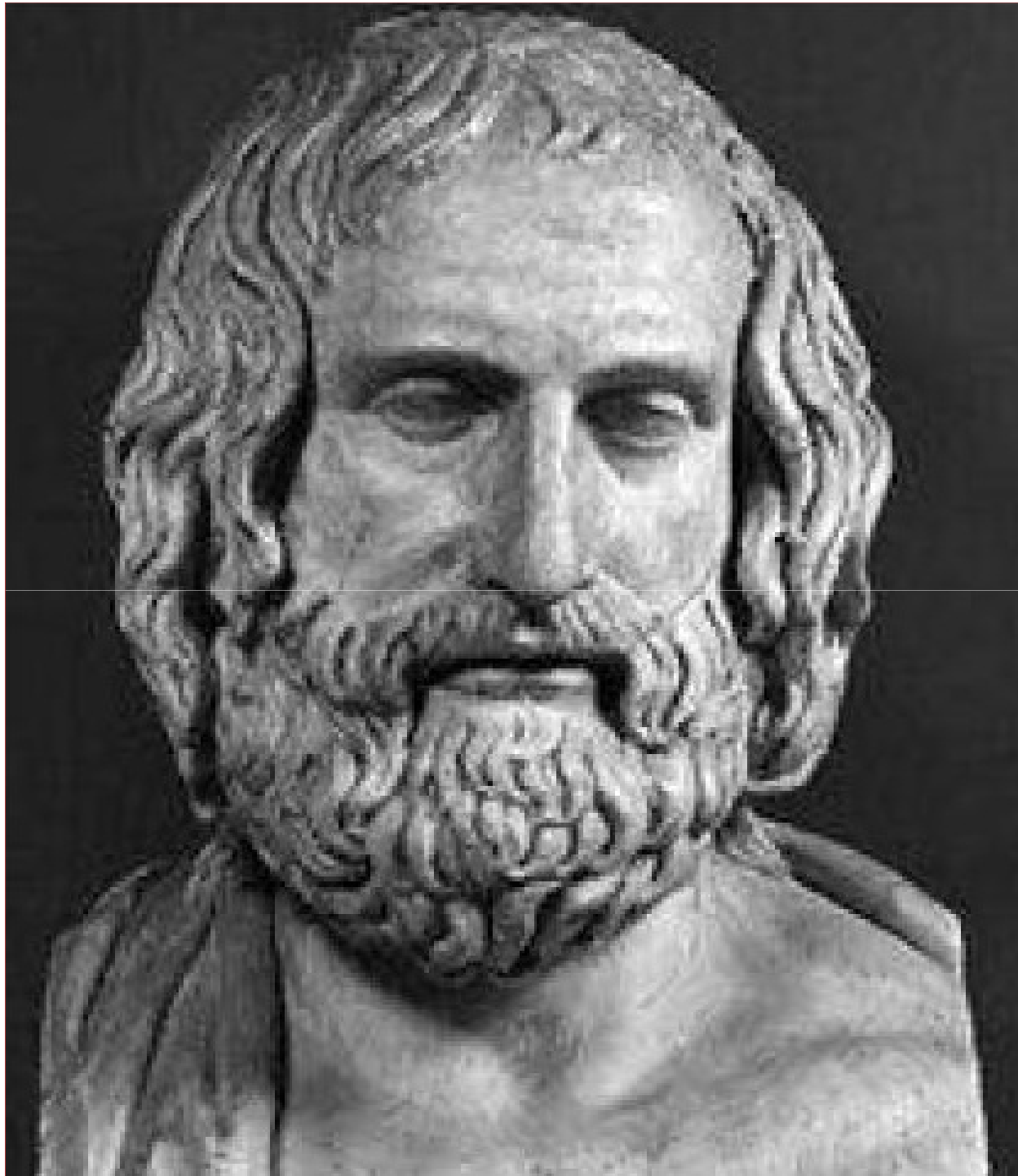


**Protágoras**

El pleito de los honorarios tiene lugar entre el maestro Protágoras y su discípulo Evatlo: el maestro acoge a Evatlo en su academia con la condición de que **'le pague los honorarios del curso al ganar su primer pleito'**.

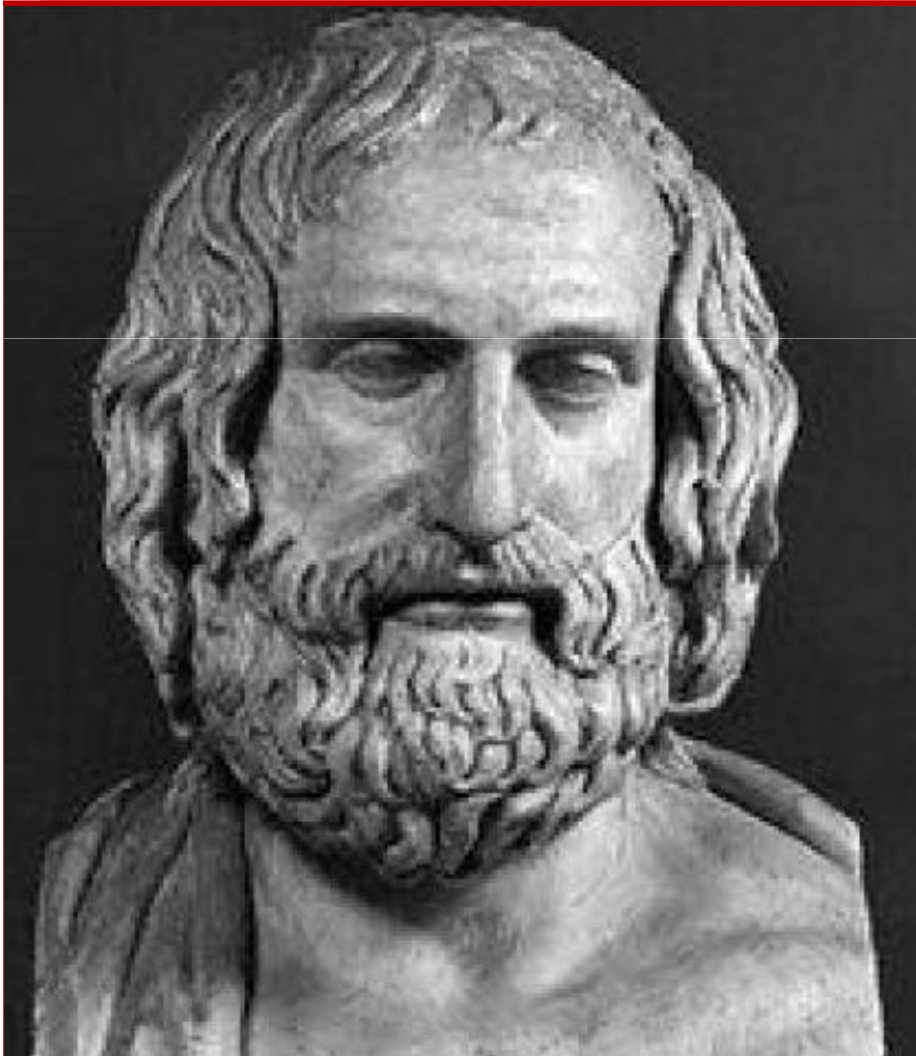
Terminado el curso, Evatlo no tiene ningún cliente para representar... pero Protágoras demanda a su discípulo, con lo que se plantea un pleito en el que ambos representan sus intereses argumentando...





**Evatlo:** *Tanto si gano como si pierdo este pleito, en ningún caso tendré obligación de pagar a Protágoras. Si gano el pleito no tendré que pagar ya que el Juez habrá desestimado la demanda. Si lo pierdo, no habré ganado mi primer pleito y por lo tanto no se habrá cumplido la condición que me obligaba pagar los honorarios.*

**Evatlo:** *Tanto si gano como si pierdo este pleito, en ningún caso tendré obligación de pagar a Protágoras. Si gano el pleito no tendré que pagar ya que el Juez habrá desestimado la demanda. Si lo pierdo, no habré ganado mi primer pleito y por lo tanto no se habrá cumplido la condición que me obligaba pagar los honorarios.*

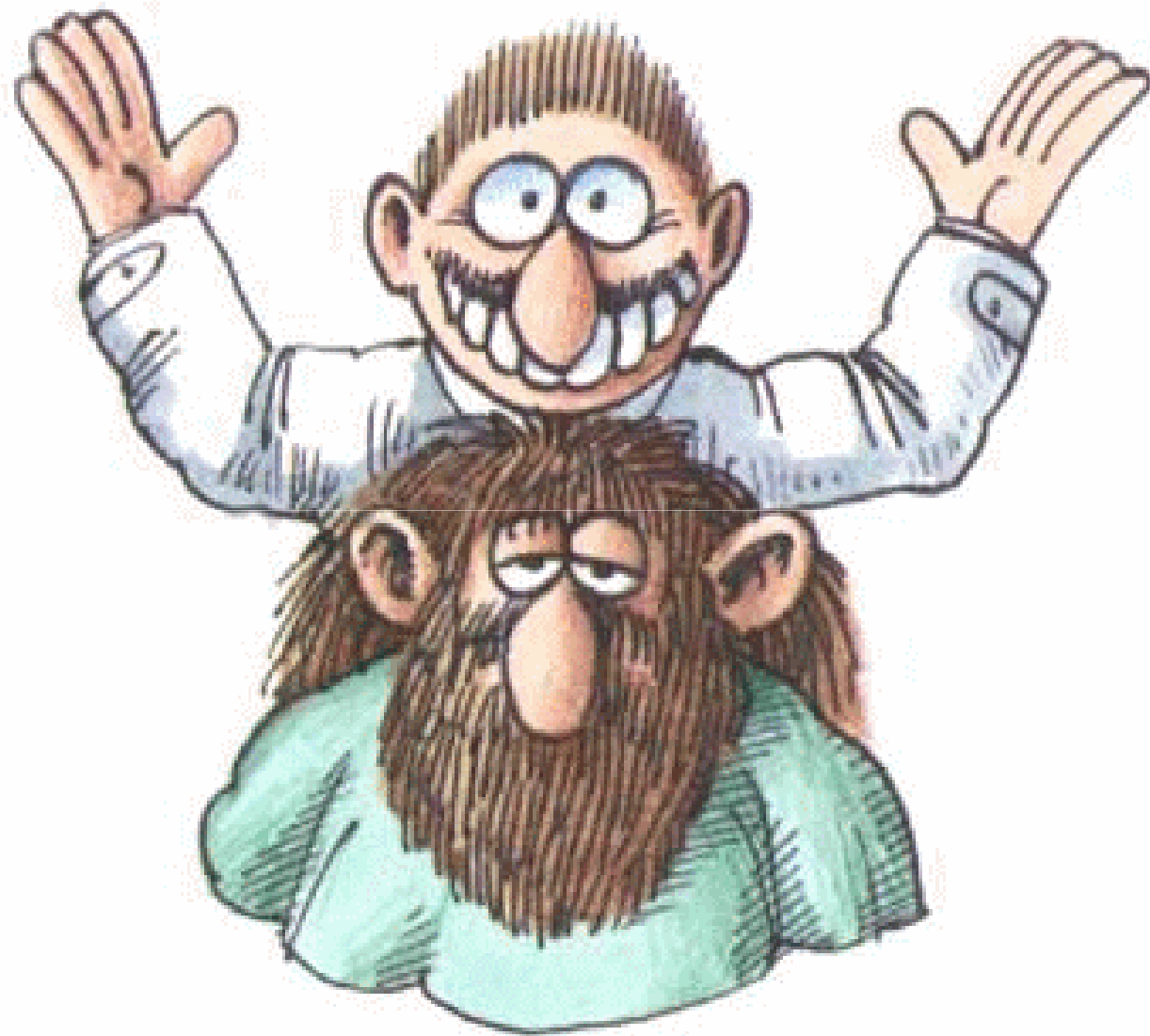


**Protágoras:** *Tanto si gano como si pierdo este pleito, Evatlo tendrá obligación de pagarme. Si gano la demanda, tendrá que pagarme pues ésta es la cuestión que se debate en este pleito. Y si la pierdo, también tendrá que pagarme, porque significará que ha ganado su primer pleito; es decir se habrá cumplido la condición de nuestro acuerdo.*

¿Quién de los dos tiene razón? ¿O no la tendrá ninguno? ¿Cómo solucionar este pleito?

En  
**Barbilandia**,  
el barbero,  
**Jon**, afeita a  
los que no  
se afeitan a  
sí mismos.

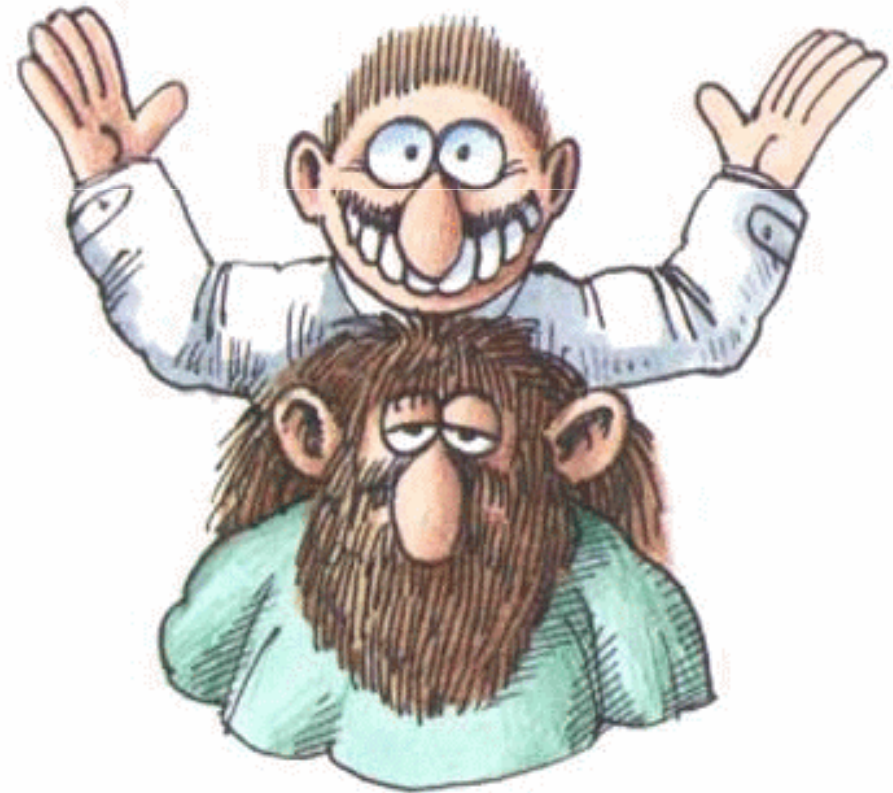
*¿Quién  
afeita al  
barbero de  
Barbilandia?*



[www.HelloCrazy.com](http://www.HelloCrazy.com)



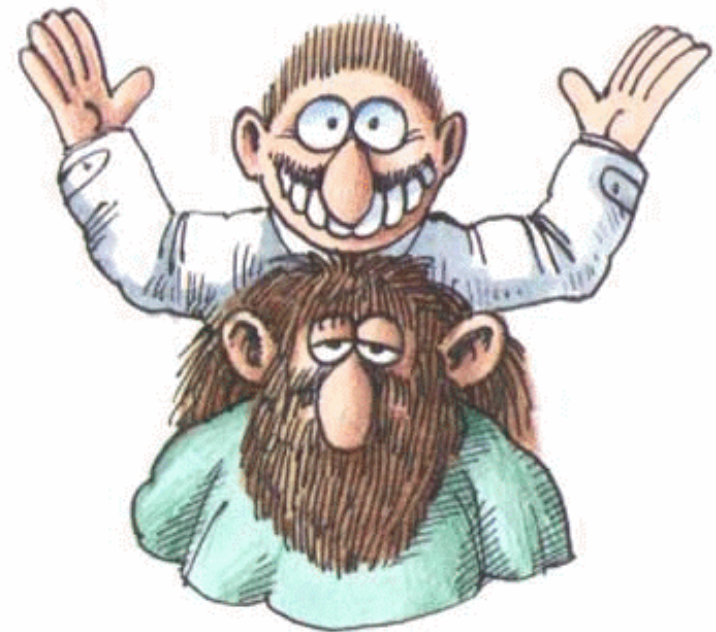
Si Jon no se afeita a sí mismo, será una de las personas de Barbilandia que no se afeitan a sí mismas...



[www.HelloCrazy.com](http://www.HelloCrazy.com)

Si Jon no se afeita a sí mismo, será una de las personas de Barbilandia que no se afeitan a sí mismas...

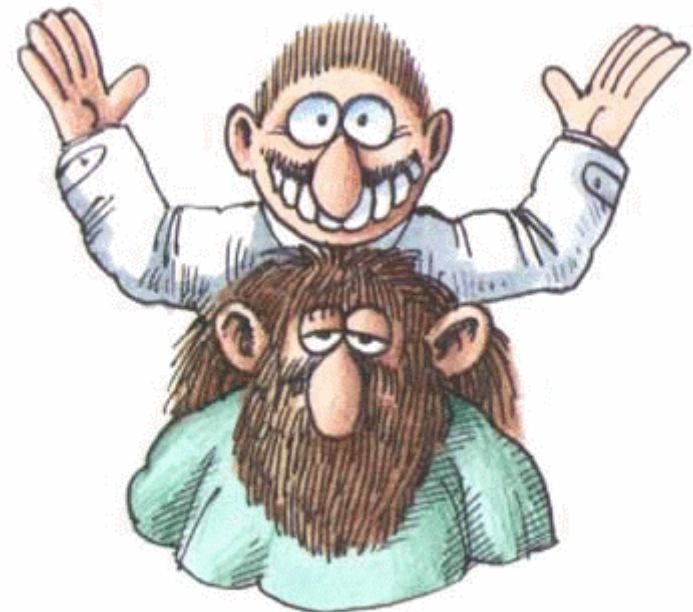
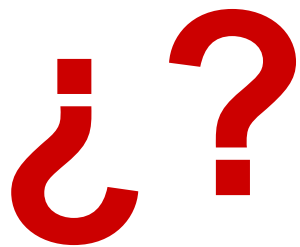
...con lo cual **Jon** debería de afeitarse, siendo por lo tanto una de las personas que se afeitan a sí mismas...



Si Jon no se afeita a sí mismo, será una de las personas de Barbilandia que no se afeitan a sí mismas...

... con lo cual **Jon** debería de afeitarse, siendo por lo tanto una de las personas que se afeitan a sí mismas...

... no debiendo por tanto afeitarse...





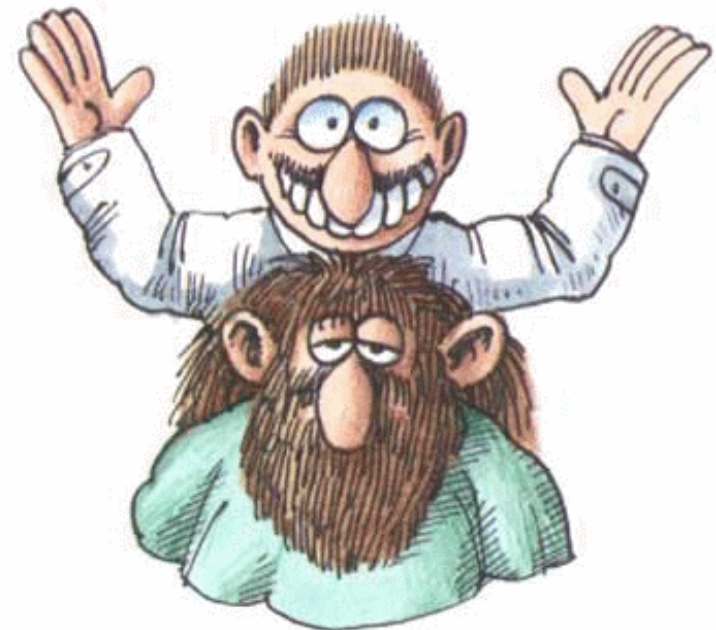
Si Jon no se afeita a sí mismo, será una de las personas de Barbilandia que no se afeitan a sí mismas...

...con lo cual **Jon** debería de afeitarse, siendo por lo tanto una de las personas que se afeitan a sí mismas...

... no debiendo por tanto afeitarse...

Bertrand Russel define su famosa *teoría de tipos*, donde se eliminan los conjuntos auto-contradictorios, así que **Jon**, el barbero de Barbilandia...

**¡NO EXISTE!**



## 4. Paradojas de la predicción

***Un caballo bayo y una vaca parda son tres:  
el caballo,  
la vaca,  
y el conjunto caballo y vaca.***

**Hui Tzu (siglo III)**

**Tres islas  
*Itsvan Orosz***



# La paradoja del condenado

**En la Edad Media, un rey de reconocida sinceridad, pronuncia su sentencia:**



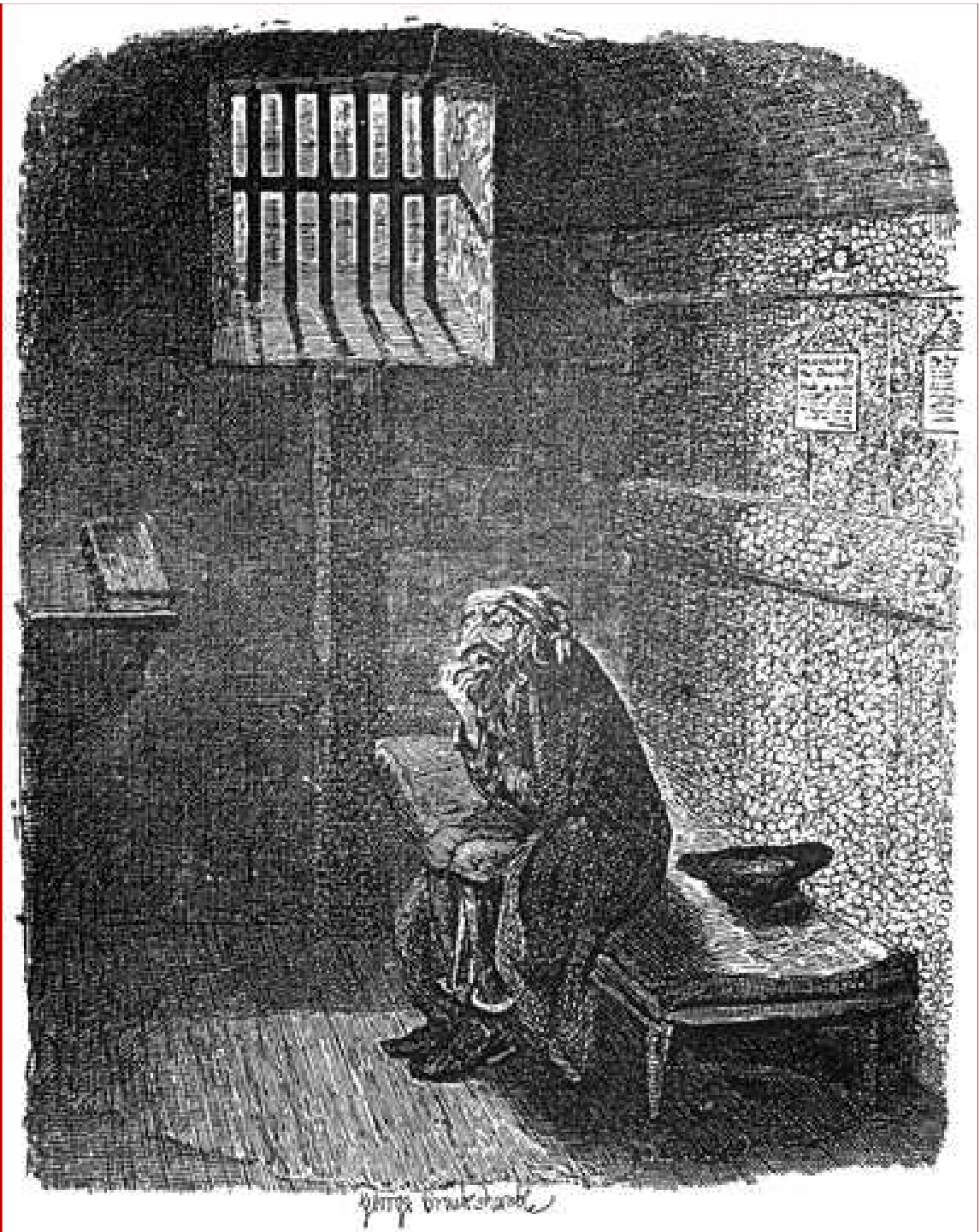
*Una mañana de este mes serás ejecutado, pero no lo sabrás hasta esa misma mañana, de modo que cada noche te acostarás con la duda, que presiento terrible, de si esa será tu última sobre la Tierra...*



**En la soledad de su celda,  
el reo argumenta:**

***Si el mes tiene 30 días, es evidente que no podré ser ajusticiado el día 30, ya que el 29 por la noche sabría que a la mañana siguiente habría de morir... Así que el último día posible para cumplir la sentencia es el 29.***

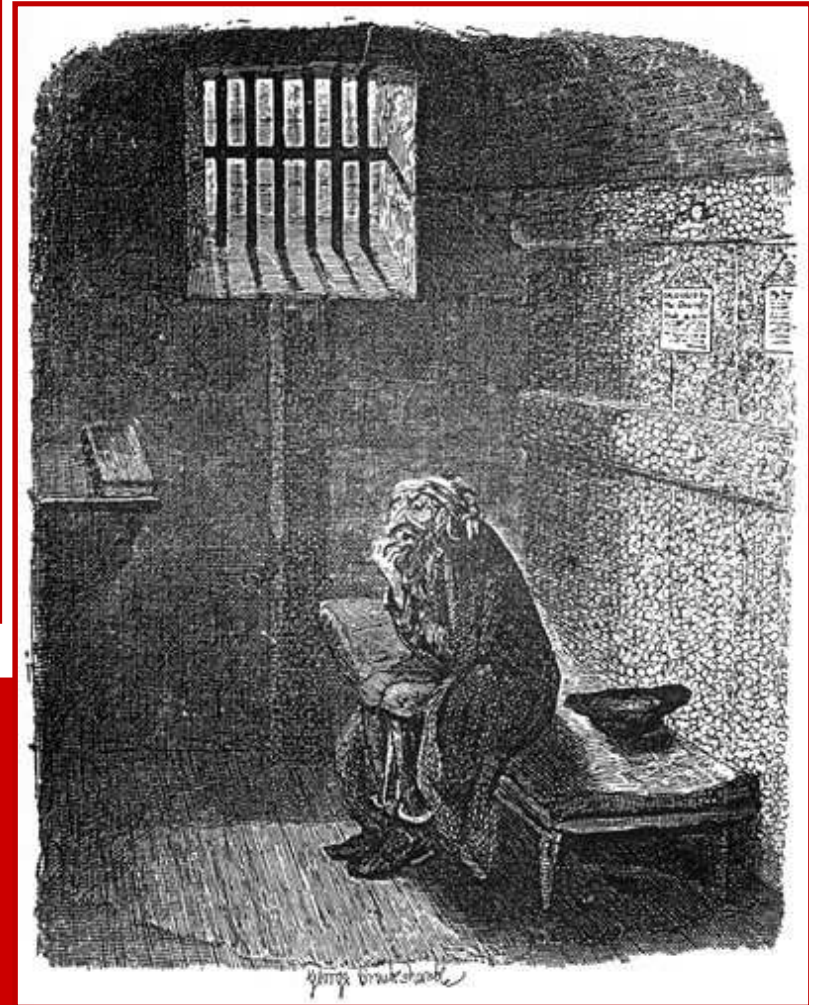
***Pero entonces, el 28 por la noche tendré la certeza de que por la mañana seré ejecutado...***



**En la soledad de su celda, el reo argumenta:**

*Si el mes tiene 30 días, es evidente que no podré ser ajusticiado el día 30, ya que el 29 por la noche sabría que a la mañana siguiente habría de morir. Así que el último día posible para cumplir la sentencia es el 29. Pero entonces, el 28 por la noche tendré la certeza de que por la mañana seré ejecutado...*

**Continuando de este modo, el prisionero concluye triunfalmente que la condena es de ejecución imposible, y comienza a dormir aliviado, aguardando que transcurra el mes para pedir su libertad...**



Pero, **SORPRESA**, un día cualquiera –por ejemplo el día **13**–, el verdugo, con el hacha afilada en la mano, despierta al reo... que instantes más tarde es decapitado.

**La sentencia se cumple literalmente...**

*¿Dónde ha fallado el razonamiento del condenado?*





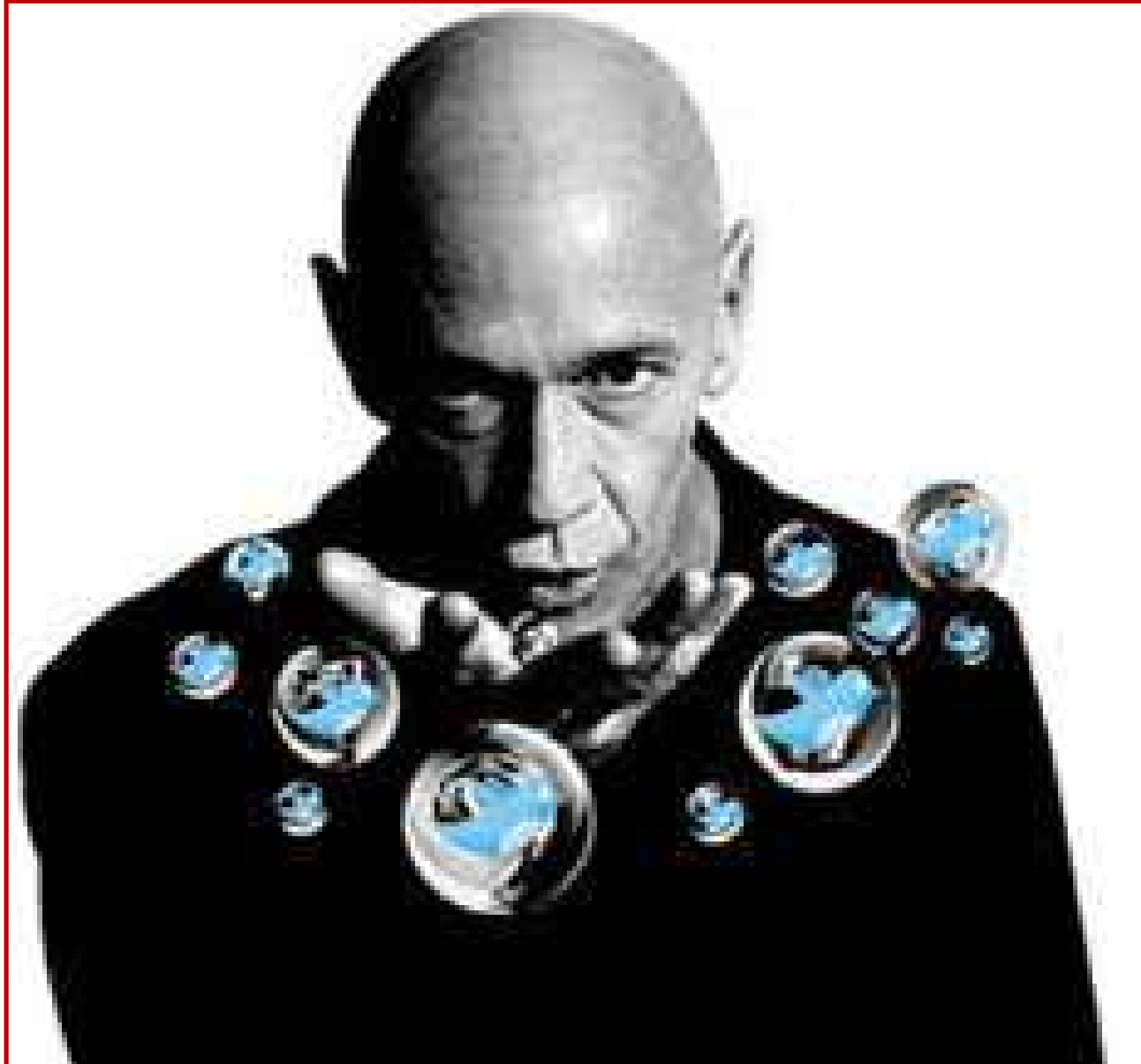
Una solución puede pasar por la noción fundamental de que no es lo mismo el día 30, más el día 29, más el día 28, etc., que **el mes**.

Un conjunto es diferente y contiene cualidades distintas de la mera adición de sus partes.

El análisis individual, día por día, por parte del prisionero es irreprochable... pero el defecto de su argumento aparece cuando atribuye al conjunto **(este mes)** las mismas y exclusivas cualidades que poseían sus partes **(cada día)**, no advirtiéndole que el conjunto **mes** ha incorporado algunas características: entre otras la de contener...

**... días sorpresa.**

El *hombre calvo*: ¿describirías a un hombre con un pelo en la cabeza como calvo?

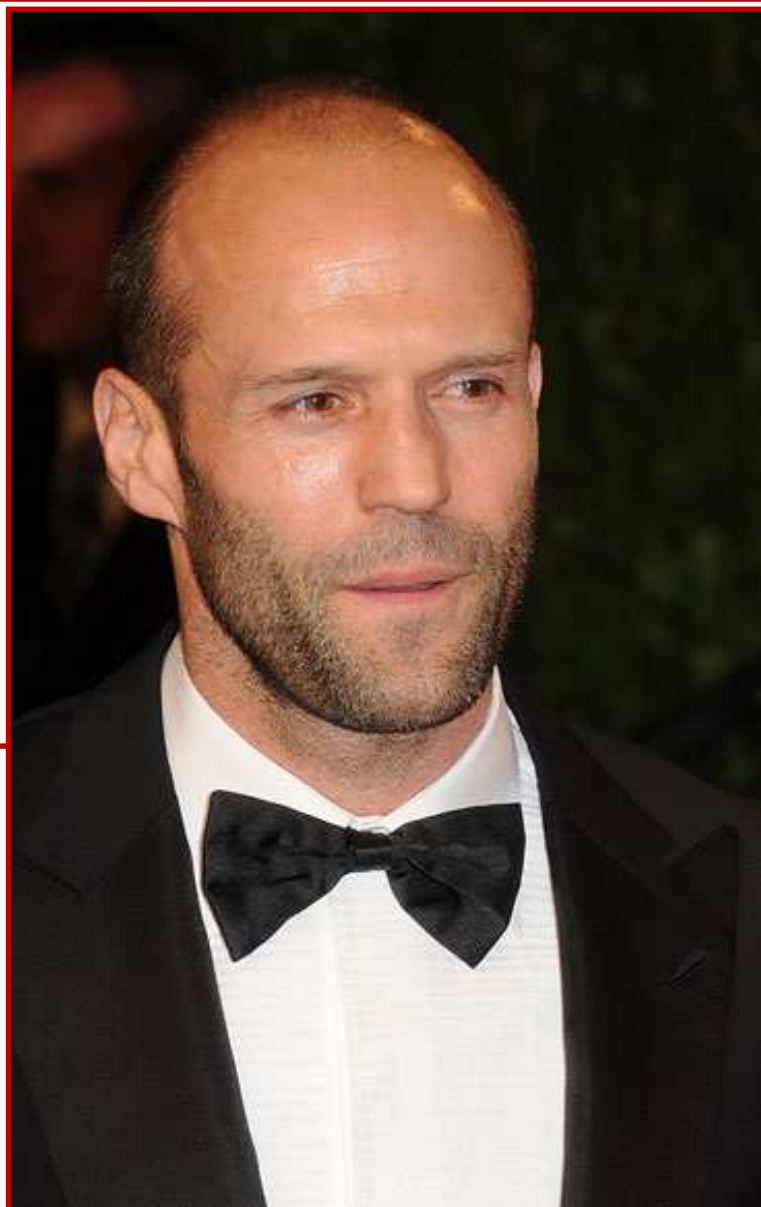


El *hombre calvo*: ¿describirías a un hombre con un pelo en la cabeza como calvo?





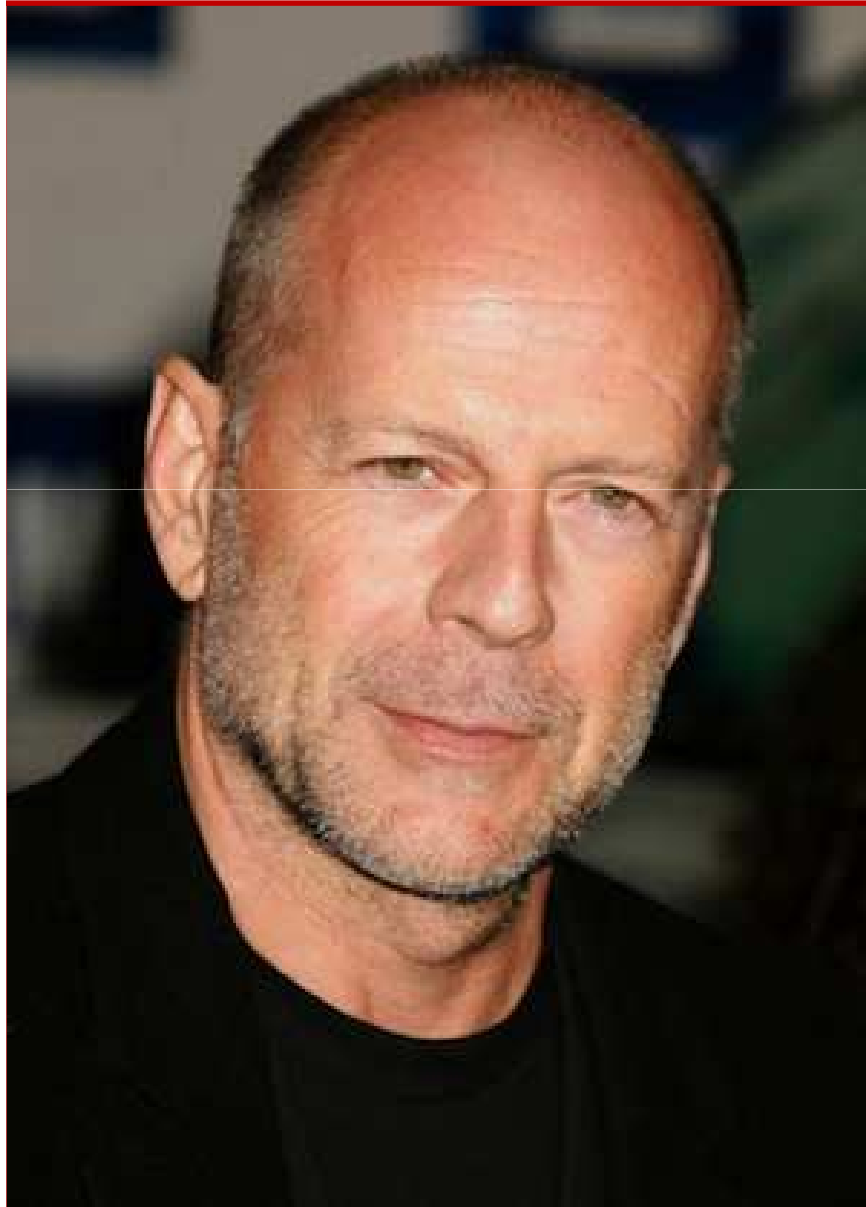
El *hombre calvo*: ¿describirías a un hombre con un pelo en la cabeza como calvo?



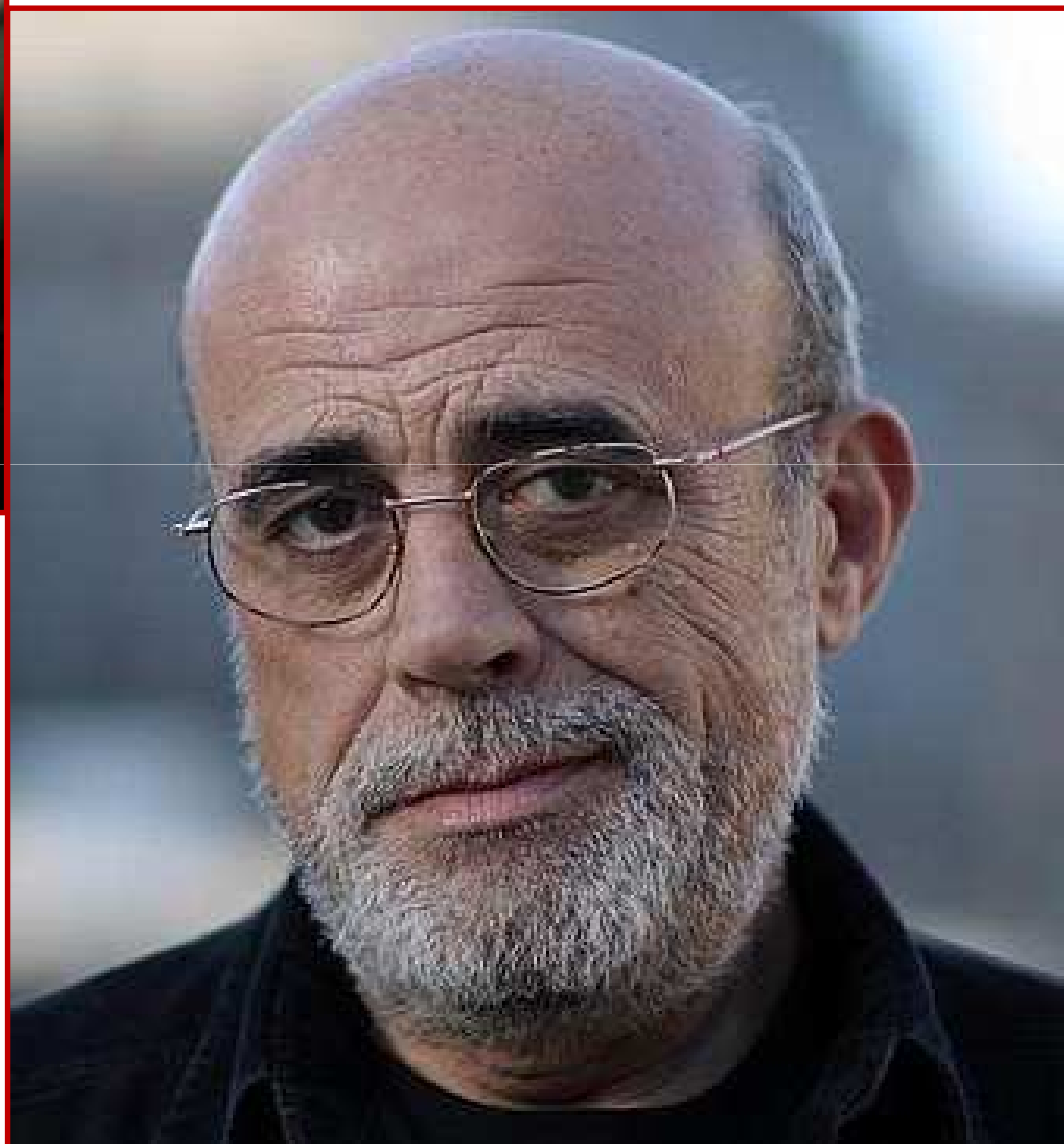
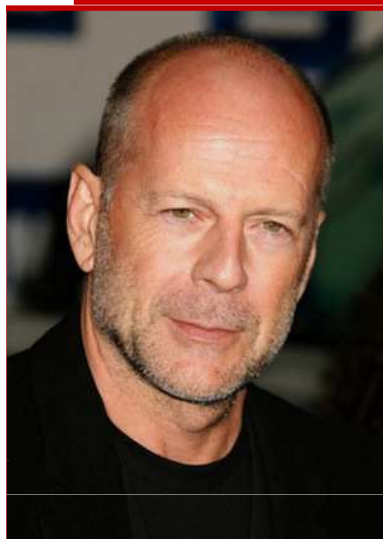
El *hombre calvo*: ¿describirías a un hombre con un pelo en la cabeza como calvo?



El *hombre calvo*: ¿describirías a un hombre con un pelo en la cabeza como calvo?



El *hombre calvo*: ¿describirías a un hombre con un pelo en la cabeza como calvo?





Me conté ayer los cabellos de la cabeza y tenía 3.000.000..., y no soy calva. Si con esta cantidad no soy calva tampoco lo seré si me arranco una cana, es decir, con 2.999.999 pelos seguiría sin ser calva... pero entonces, si me quito otro pelo, tampoco lo sería, es decir, no sería calva con 2.999.998 pelos.

Continuando de este modo, es claro que con 3 pelos no sería ...



¿



**Acercamiento a lenguaje ideal; lo esencial es la precisión, la vaguedad del lenguaje natural es un defecto a eliminar: Frege y Russell.**

?



**Acercamiento a lenguaje ideal; esencial la precisión, la vaguedad del lenguaje natural es un defecto a eliminar: Frege y Russell.**

**Utilización de lógicas multivaluadas (no clásicas), como la lógica difusa de Goguen y Zadeh.**



¿



Acercamiento a lenguaje ideal; esencial la precisión, la vaguedad del lenguaje natural es un defecto a eliminar: Frege y Russell.

Utilización de lógicas multivaluadas (no clásicas), como la lógica difusa de Goguen y Zadeh.

... Aceptar la paradoja...

?

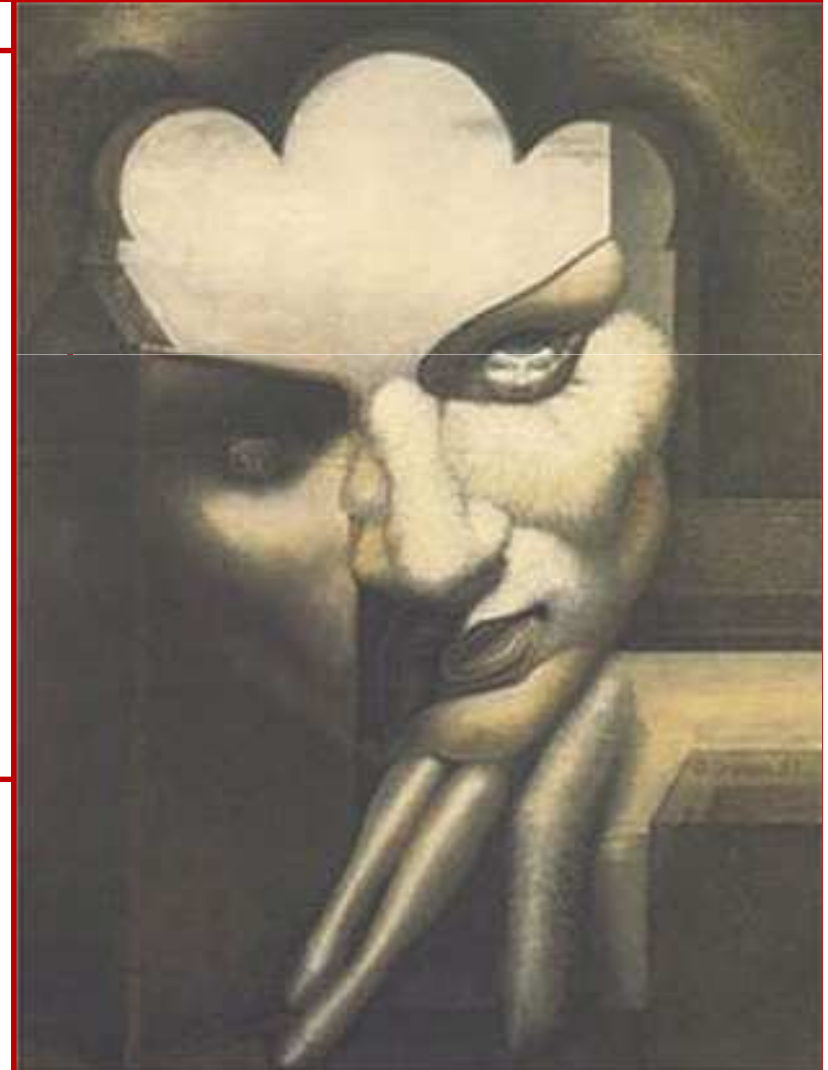


## 5. Paradojas de la probabilidad

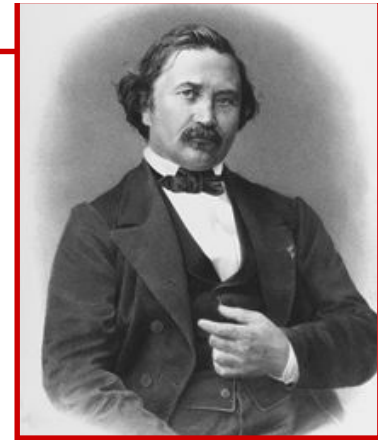
*Pero de todos es sabido que a las niñas nos gustan las miniaturas, y nunca podremos resistirnos a una muñeca rusa hecha de dados cada vez más pequeños, uno dentro de otro hasta el abismo.*

**Sofía Rhei, *Alicia tira los dados para abolir el azar en Alicia volátil* (2010)**

**Octavio Ocampo  
Marlena**



Consideremos una circunferencia  $C$  y una cuerda  $AB$  trazada al azar sobre ella.



*¿Cuál es la probabilidad  $p$  de que esta cuerda sea más larga que el lado del triángulo equilátero inscrito en la circunferencia?*

Abordando el problema de diferentes maneras, Bertrand obtuvo tres resultados distintos. ¿Cómo es posible?

La pregunta clave es:

*¿Qué significa **trazar una cuerda al azar**?*

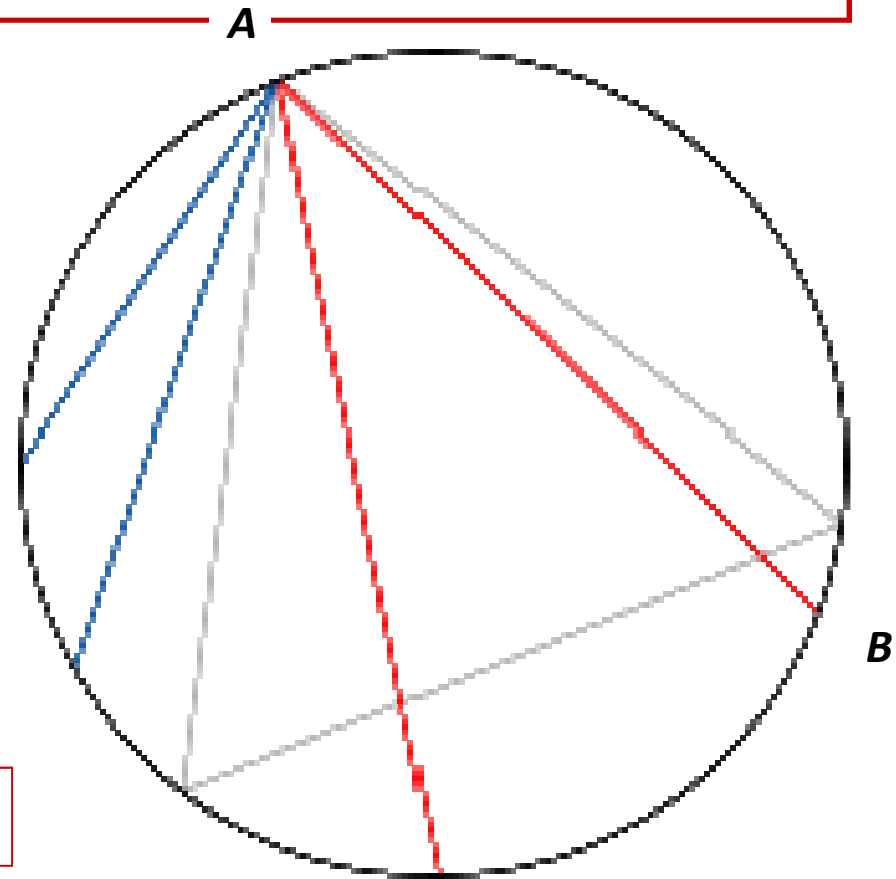
**Respuesta 1:** Elegimos **A** y **B** al azar sobre **C**.

Elegimos **A** al azar sobre **C** y lo hacemos coincidir con uno de los vértices del triángulo inscrito. Para que la cuerda **AB** sea más larga que el lado del triángulo, **B** deberá elegirse sobre el arco de circunferencia determinado por el lado del triángulo opuesto al vértice **A**.

Como el triángulo determina tres arcos isométricos, la respuesta es:

$$p=1/3.$$

Se muestran cuatro posibles cuerdas: las azules son más cortas y las rojas más largas que el lado del triángulo.



**Respuesta 2:** Elegimos **AB** teniendo en cuenta su distancia **d** al centro **O** de **C**.

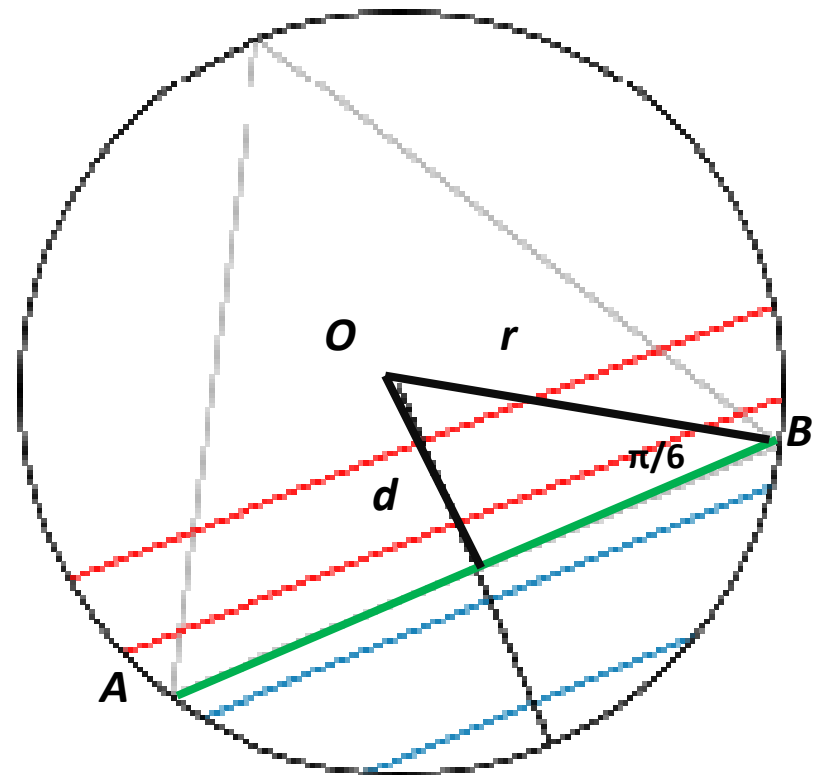
Si el radio de **C** es **r**, en el caso extremo marcado en color verde, tenemos:  **$d = r \operatorname{sen} (\pi/6) = r/2$** ,

y por lo tanto, para que la cuerda **AB** sea más larga que el lado del triángulo, la distancia **d** al centro **O** de **C** no deberá exceder **r/2**.

Pero, la distancia maximal de una cuerda al centro de la circunferencia es **r**, por lo que la respuesta es

$$p=1/2.$$

Se muestran cuatro posibles cuerdas: las azules son más cortas y las rojas más largas que el lado del triángulo. La cuerda verde indica el caso en que la cuerda coincide con la longitud del triángulo.





**Respuesta 3:** Elegimos  **$AB$**  teniendo en cuenta la posición de su punto medio.

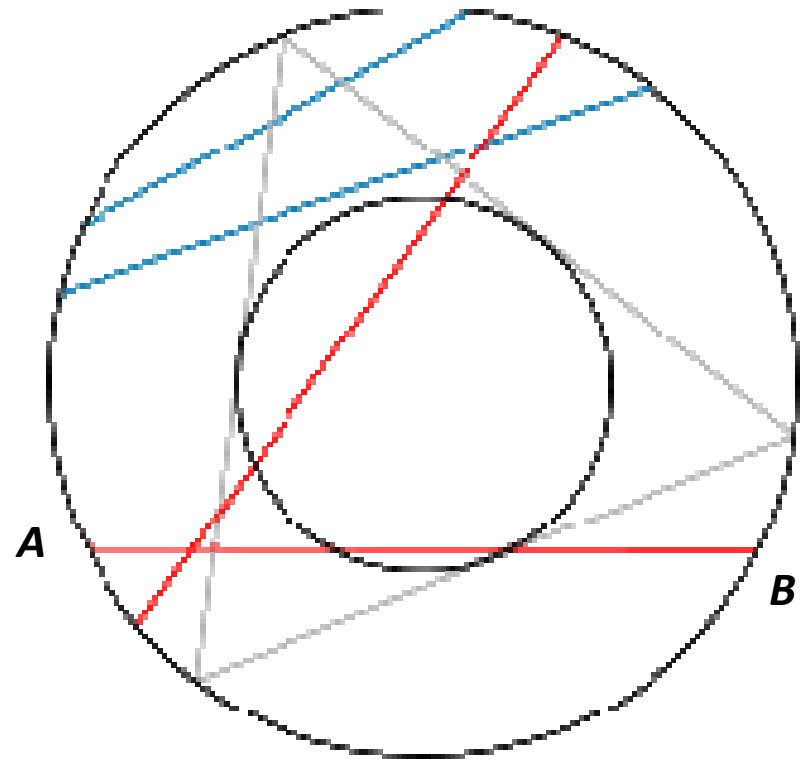
Para que la cuerda  **$AB$**  sea más larga que el lado del triángulo, su punto medio debe de estar dentro del círculo inscrito en el triángulo, que es de radio  **$r/2$** .

Por lo tanto, la probabilidad  **$p$**  buscada es la razón entre el área del círculo inscrito ( **$\pi r^2/4$** ) y el área del círculo determinado por  **$C$**  ( **$\pi r^2$** ).

Es decir,

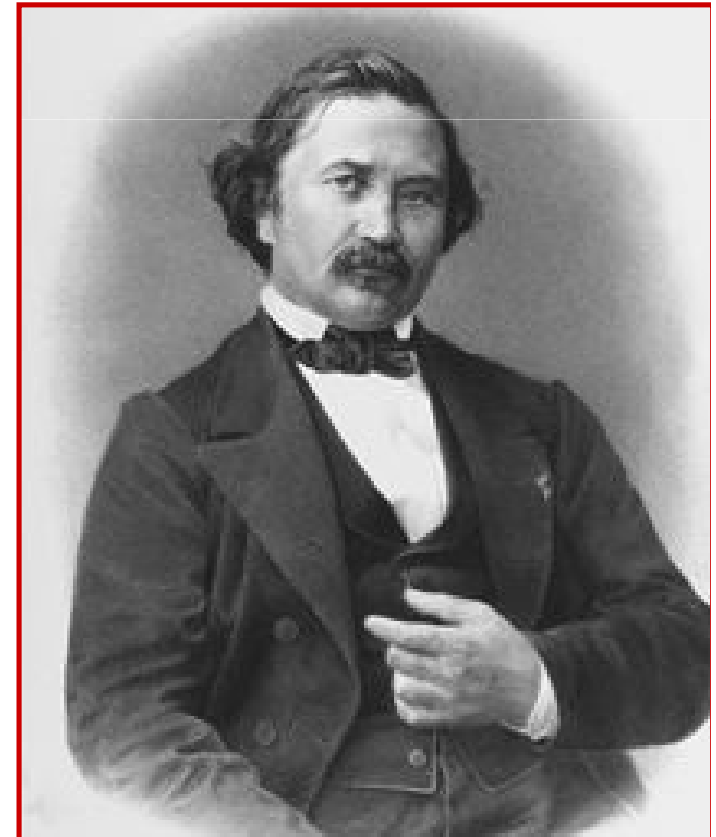
$$p=1/4.$$

Se muestran cuatro posibles cuerdas: las azules son más cortas y las rojas más largas que el lado del triángulo.

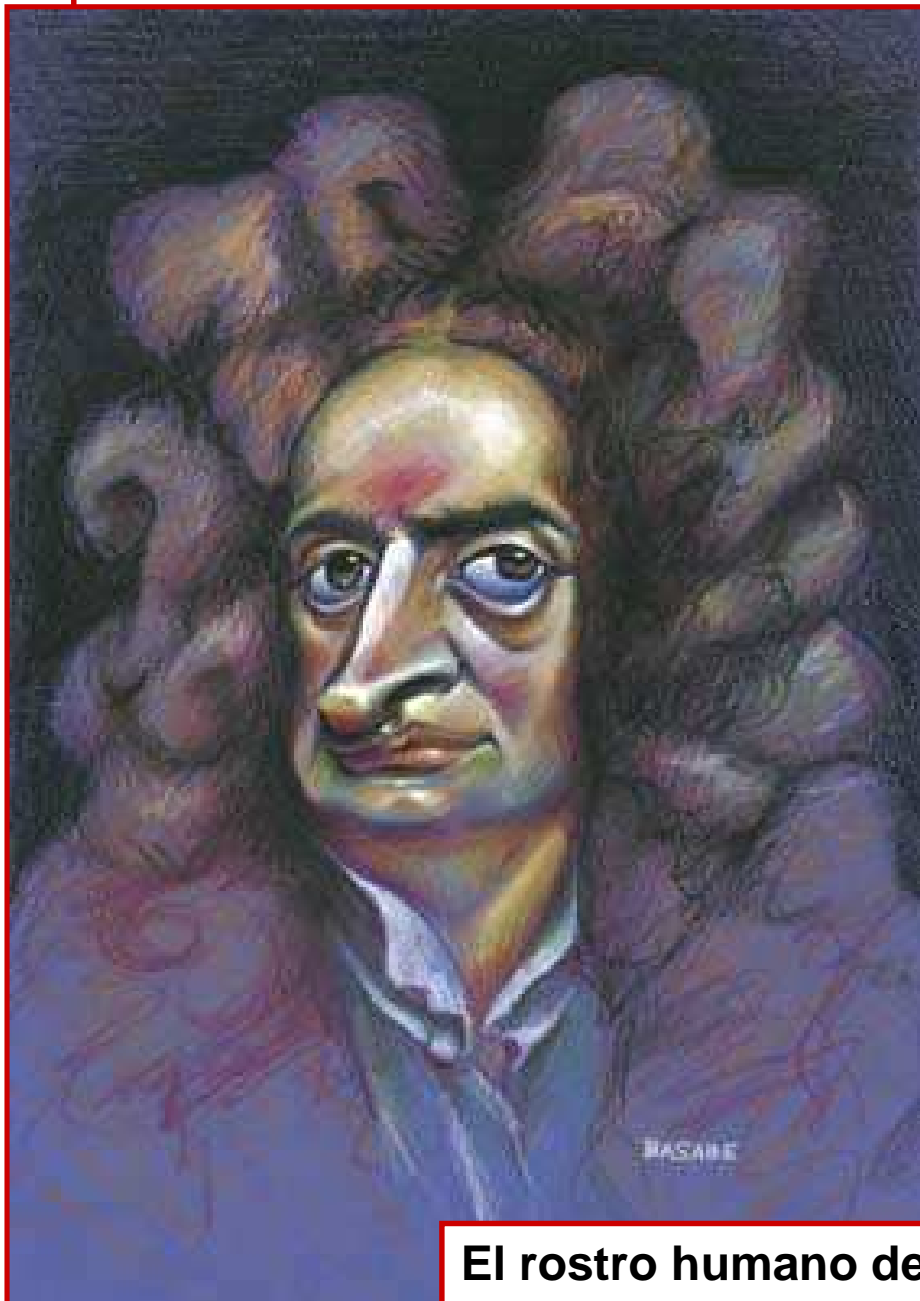


Hemos llegado a tres respuestas diferentes al argumentar de distintas maneras, y las tres son correctas: hemos jugado con el azar eligiendo de manera aleatoria los **puntos finales**, la distancia al centro o el **punto medio de la cuerda**.

¿Cuál es el problema? Es la vaguedad del enunciado: el método que produce la variable aleatoria no está bien determinado, y ello puede dar lugar a manipulaciones 'inconscientes'.

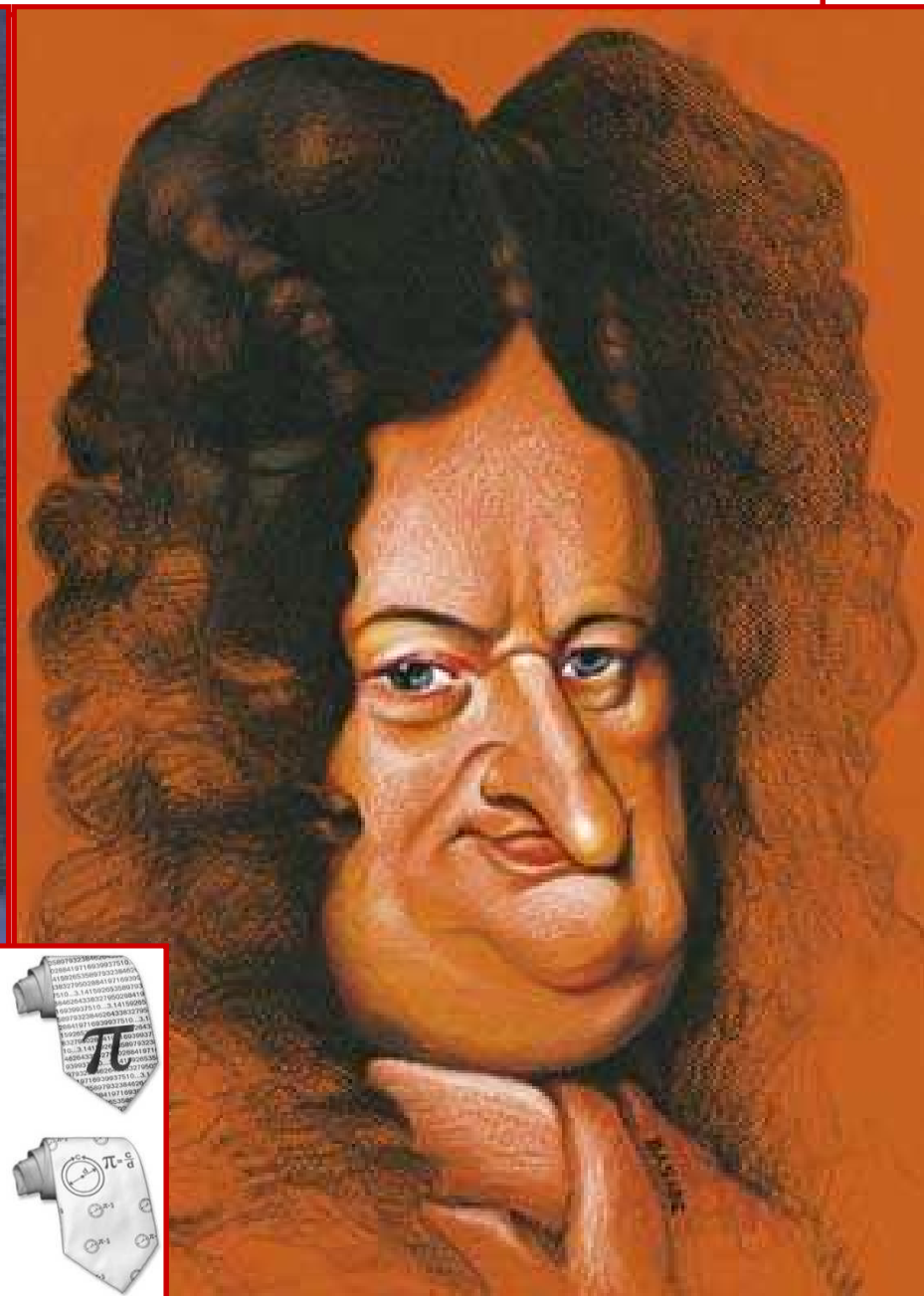
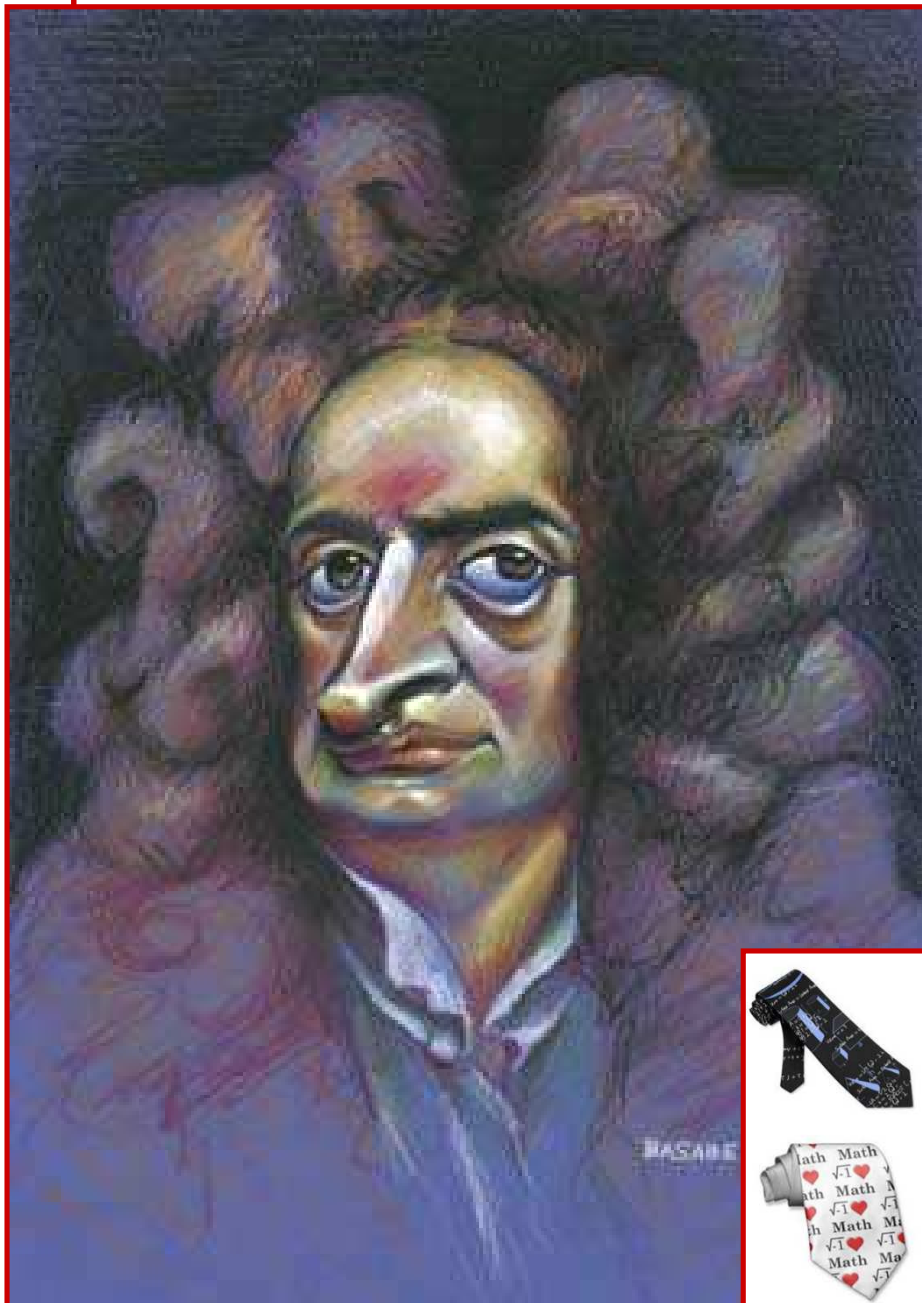


**Isaac** y **Carlos** discuten sobre quien la tiene más larga...



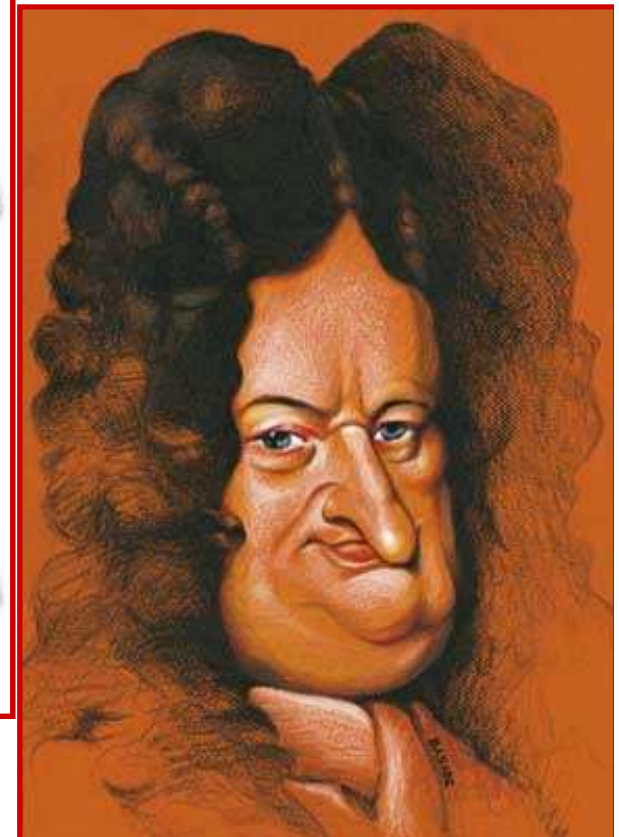
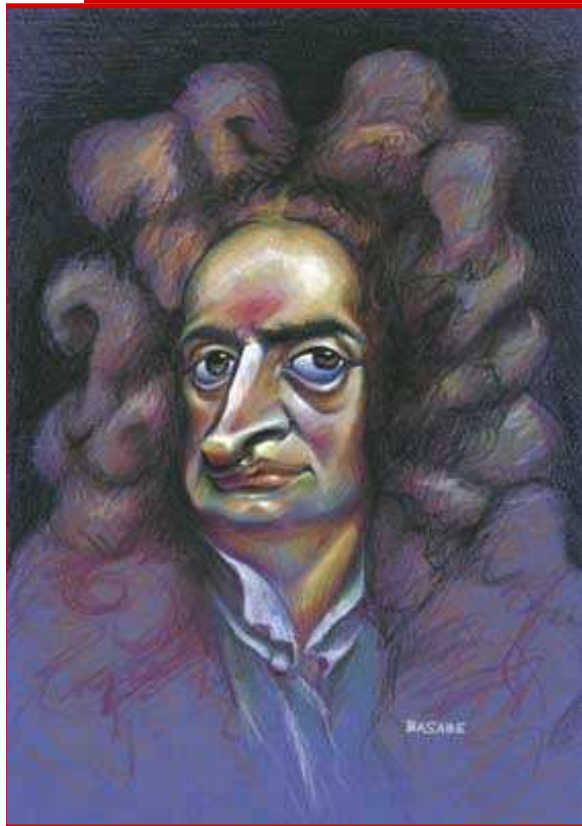
**El rostro humano de las Matemáticas, RSME**

**Isaac** y **Carlos** discuten sobre quien la tiene más larga...



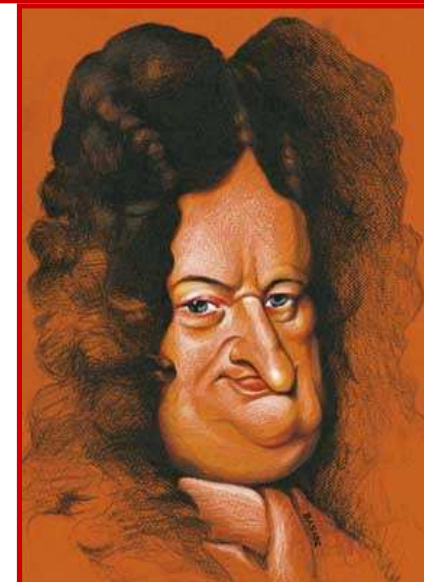
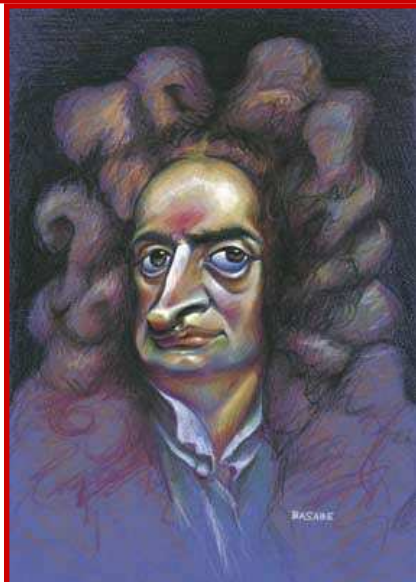


**Isaac** y **Carlos** tienen una preciosa corbata matemática para ocasiones especiales. **Isaac** propone a **Carlos** el siguiente juego: aquel que tenga la corbata más larga se la regala al otro. **Carlos** –que sabe que **Isaac** no juega siempre limpio – razona de la siguiente manera:



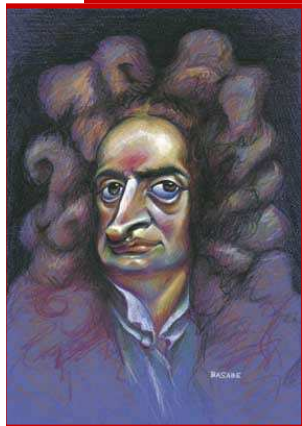
**Isaac** y **Carlos** tienen una preciosa corbata matemática para ocasiones especiales. **Isaac** propone a **Carlos** el siguiente juego: aquel que tenga la corbata más larga se la regala al otro. **Carlos** –que sabe que **Isaac** no juega siempre limpio – razona de la siguiente manera:

Mi corbata mide **C** centímetros. Hay **1** posibilidad sobre **2** de que mi corbata sea más larga que la de **Isaac**, es decir, hay un 50% de posibilidades de perder mi corbata de longitud **C**. En caso contrario, ganaré la corbata de **Isaac** que mide **I** y es más larga que la mía.

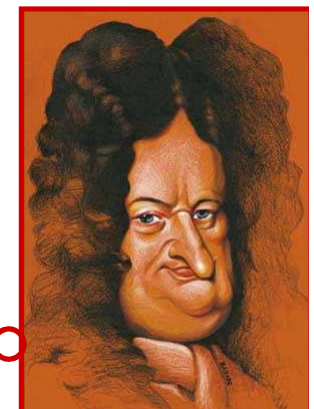


**Isaac** y **Carlos** tienen una preciosa corbata matemática para ocasiones especiales. **Isaac** propone a **Carlos** el siguiente juego: aquel que tenga la corbata más larga se la regala al otro. **Carlos** –que sabe que **Isaac** no juega siempre limpio – razona de la siguiente manera:

Mi corbata mide **C** centímetros. Hay 1 posibilidad sobre 2 de que mi corbata sea más larga que la de **Isaac**, es decir, hay un 50% de posibilidades de perder mi corbata de longitud **C**. En caso contrario, ganaré la corbata de **Isaac** que mide **I** y es más larga que la mía.



Así, en el 50% de los casos pierdo **C** y en el 50% de los casos gano **más** que **C**. La ganancia media es positiva, así que jugaré con **Isaac**.





El juego es simétrico, así que **Isaac** puede hacer exactamente el mismo razonamiento para concluir que el juego le es favorable.

Pero esto es **paradójico**... Debe de haber algún error. En efecto, el razonamiento se realiza en un caso ideal que puede no existir:

1. supone que todas las longitudes posibles e imaginables de corbatas tienen la misma probabilidad de existir,
2. y conjetura que dada una longitud cualquiera **L**, la mitad de las corbatas es de longitud mayor y la otra mitad es de longitud menor...





El juego es simétrico, así que **Isaac** puede hacer exactamente el mismo razonamiento para concluir que el juego le es favorable.

Pero esto es **paradójico**... Debe de haber algún error. En efecto, el razonamiento se realiza en un caso ideal que puede no existir:

1. supone que todas las longitudes posibles e imaginables de corbatas tienen la misma probabilidad de existir,
2. y conjetura que dada una longitud cualquiera **L**, la mitad de las corbatas es de longitud mayor y la otra mitad es de longitud menor...

Si la corbata de **Carlos** midiera 1 metro... **Isaac** lo tendría fácil para ganar...



Si la corbata de **Carlos** midiera 1 metro...  
**Isaac** lo tendría fácil para ganar...

Es decir, el error viene de aplicar el **principio de indiferencia** –en ausencia de datos precisos, las probabilidades entre los distintos casos son iguales–.

Para jugar a este juego, habría que dar **una probabilidad** a cada longitud de corbata previsible: por ejemplo, si **C** es igual a un metro... la probabilidad de encontrar corbatas más largas que un metro seguro que es menor que la de topar con una más corta...



**La paradoja  
de Kraichik**



**Juan** es hipocondríaco.

Un amigo le ha hablado de una enfermedad genética, la **retrocapirosclerosis**, que se manifiesta sólo a partir de los 40 años: los que contraen la enfermedad, entienden al revés gran parte de las cosas que se les dice (aunque conservan el resto de sus facultades mentales intactas).

Es una enfermedad muy rara... Sólo la padece **1** persona entre **un millón**.

**TOPSY**

FOR THE PHARMACEUTICAL-WEALTHY.  
BUT ABRAHAM KNOWS ITS REALLY



BARACK HAS A NEW PLAN  
THAT WILL HOPEFULLY BE HEALTHY

**TURVY**

**Juan** es hipocondríaco. Un amigo le ha hablado de una enfermedad genética, la **retrocapiroscosis**, que se manifiesta sólo a partir de los 40 años: los que contraen la enfermedad, entienden al revés gran parte de las cosas que se les dice (aunque conservan el resto de sus facultades mentales intactas). Es una enfermedad muy rara... Sólo la padece **1** persona entre **un millón**.

**Juan** cumple en unos días los 40 y quiere saber si contraerá la enfermedad.

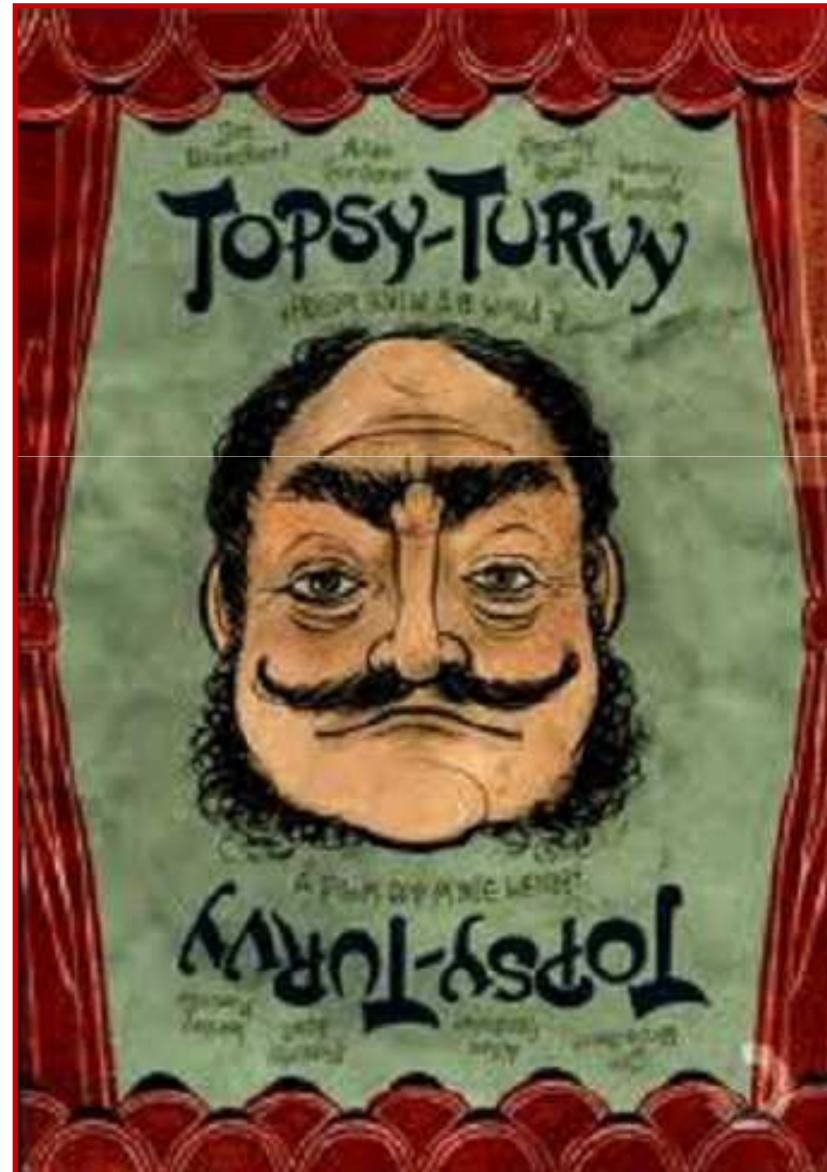
Existe un test genético que permite averiguar a una persona si padecerá la enfermedad antes de contraerla...

Pero el test falla **1** vez sobre **1.000**.

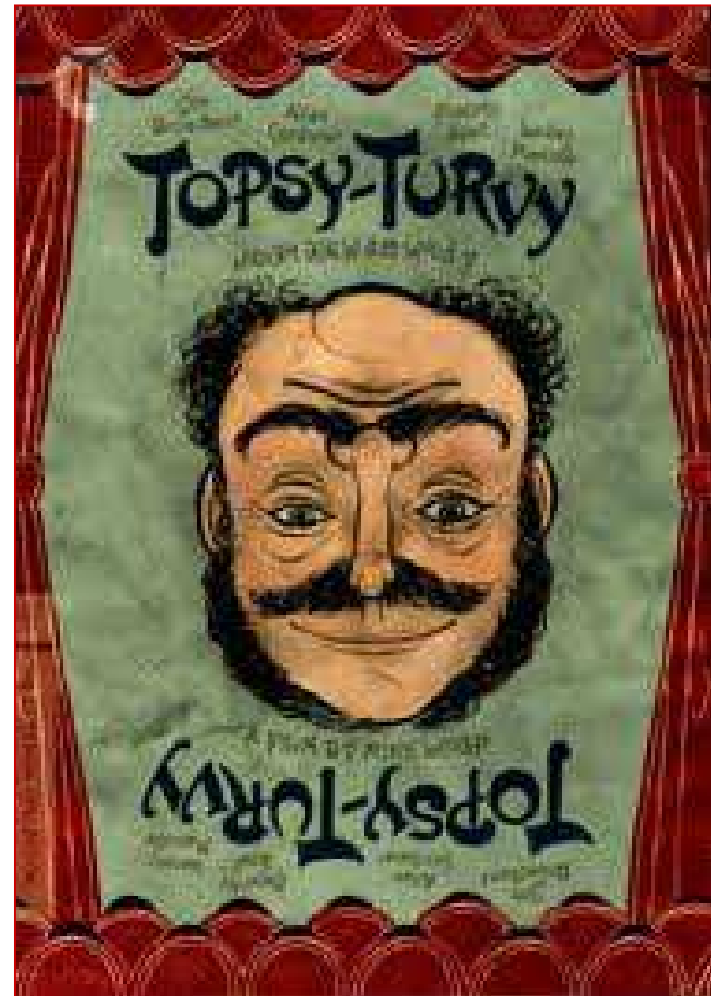
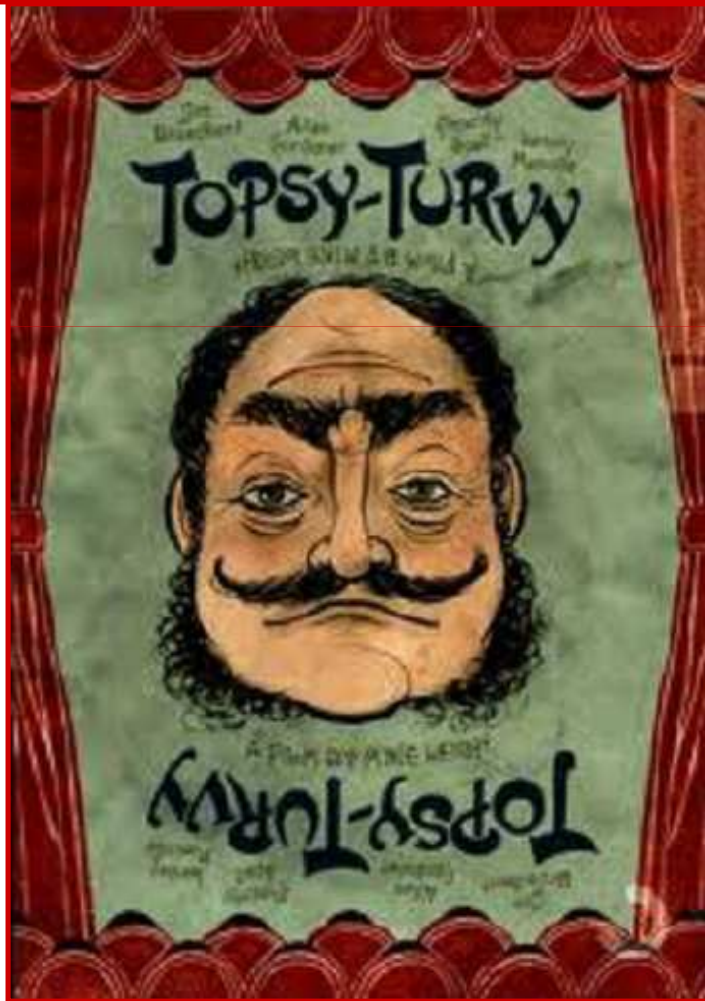




**Juan** pasa el test, y unos días más tarde, el médico le dice: “tu test en *retrocapiroscosis* ha dado positivo...”



**Juan** pasa el test, y unos días más tarde, el médico le dice: “tu test en *retrocapiroscosis* ha dado positivo... Pero no te preocupes, tienes sólo **1** posibilidad sobre **1.000** de estar enfermo.”



**Juan** pasa el test, y unos días más tarde, el médico le dice: “tu test en *retrocapiroscosis* ha dado positivo... Pero no te preocupes, tienes sólo **1** posibilidad sobre **1.000** de estar enfermo.”

**Juan** piensa: Eso es absurdo. Si el test se equivoca **1** vez de cada **1.000** y mi test es positivo, la probabilidad de estar enfermo es del **99,9%**...



**Juan** pasa el test, y unos días más tarde, el médico le dice: “tu test en **retrocapiroscosis** ha dado positivo... Pero no te preocupes, tienes sólo **1** posibilidad sobre **1.000** de estar enfermo.”

**Juan** piensa: Eso es absurdo. Si el test se equivoca **1** vez de cada **1.000** y mi test es positivo, la probabilidad de estar enfermo es del **99,9%**...

A lo mejor ya soy víctima de la enfermedad y aunque el médico me ha dicho “tu test en **retrocapiroscosis** ha dado negativo” yo he entendido “tu test en **retrocapiroscosis** ha dado positivo”... y entonces probablemente no estaría enfermo... Pero, ¿cómo se ha invertido sólo su primera frase?





**Juan** piensa: Eso es absurdo. Si el test se equivoca **1** vez de cada **1.000** y mi test es positivo, la probabilidad de estar enfermo es del **99,9%**...

A lo mejor ya soy víctima de la enfermedad y aunque el médico me ha dicho “tu test en **retrocapiroscosis** ha dado negativo” yo he entendido “tu test en **retrocapiroscosis** ha dado positivo”... y entonces probablemente no estaría enfermo... Pero, ¿se ha invertido sólo su primera frase?

O a lo mejor mi enfermedad me ha hecho invertir sólo el sentido de la segunda frase, y en realidad el médico ha dicho:

“tu test en **retrocapiroscosis** ha dado positivo... Pero **preocúpate**, porque tienes **1** posibilidad sobre **1.000** de no estar enfermo.”

**Juan** piensa: Eso es absurdo. Si el test se equivoca **1** vez de cada **1.000** y mi test es positivo, la probabilidad de estar enfermo es del **99,9%**...

A lo mejor ya soy víctima de la enfermedad y aunque el médico me ha dicho “tu test en **retrocapiroscosis** ha dado negativo” yo he entendido “tu test en **retrocapiroscosis** ha dado positivo”... y entonces probablemente no estaría enfermo... Pero, ¿se ha invertido sólo su primera frase?

O a lo mejor mi enfermedad me ha hecho invertir sólo el sentido de la segunda frase, y en realidad el médico ha dicho:

“tu test en **retrocapiroscosis** ha dado positivo... Pero **preocúpate**, porque tienes **1** posibilidad sobre **1.000** de no estar enfermo.”



En realidad, **Juan** divaga: lo que ha dicho el médico está bien: es la **paradoja de los falsos positivos**.

Si hacemos pasar el test a **100 millones** de personas, habrá aproximadamente **100** personas enfermas, y para casi todas estas 100 personas, el test será positivo (la fiabilidad del test es del **99,9%**), con lo que es muy probable que se equivoque para **1 ó 2** de esas 100 personas ...



Si hacemos pasar el test a **100 millones** de personas, habrá aproximadamente **100** personas enfermas, y para casi todas estas 100 personas, el test será positivo (la fiabilidad del test es del **99,9%**), con lo que es muy probable que se equivoque para **1** ó **2** de esas 100 personas ...

Para las **99.999.900** personas restantes, el test se equivocará aproximadamente **1** vez por **1.000**, es decir, aproximadamente **100.000** veces. Son **los falsos positivos** y su gran cantidad la clave de la explicación. A causa de ellos, en total entre las **100.000+100** personas aproximadamente para las que el test es positivo, no hay más que unas **100** que están enfermas. Es decir, entre las personas con test positivo, hay aproximadamente **1/1000** que están realmente enfermas...





De hecho es un problema de **probabilidades condicionadas**: si la probabilidad de estar enfermo es de  $1/1.000.000$  y el test se equivoca con probabilidad de  $1/1000$ , entonces la probabilidad de estar enfermo sabiendo que el test ha dado positivo es de:

**1/1002**

Así que **Juan** puede estar tranquilo...

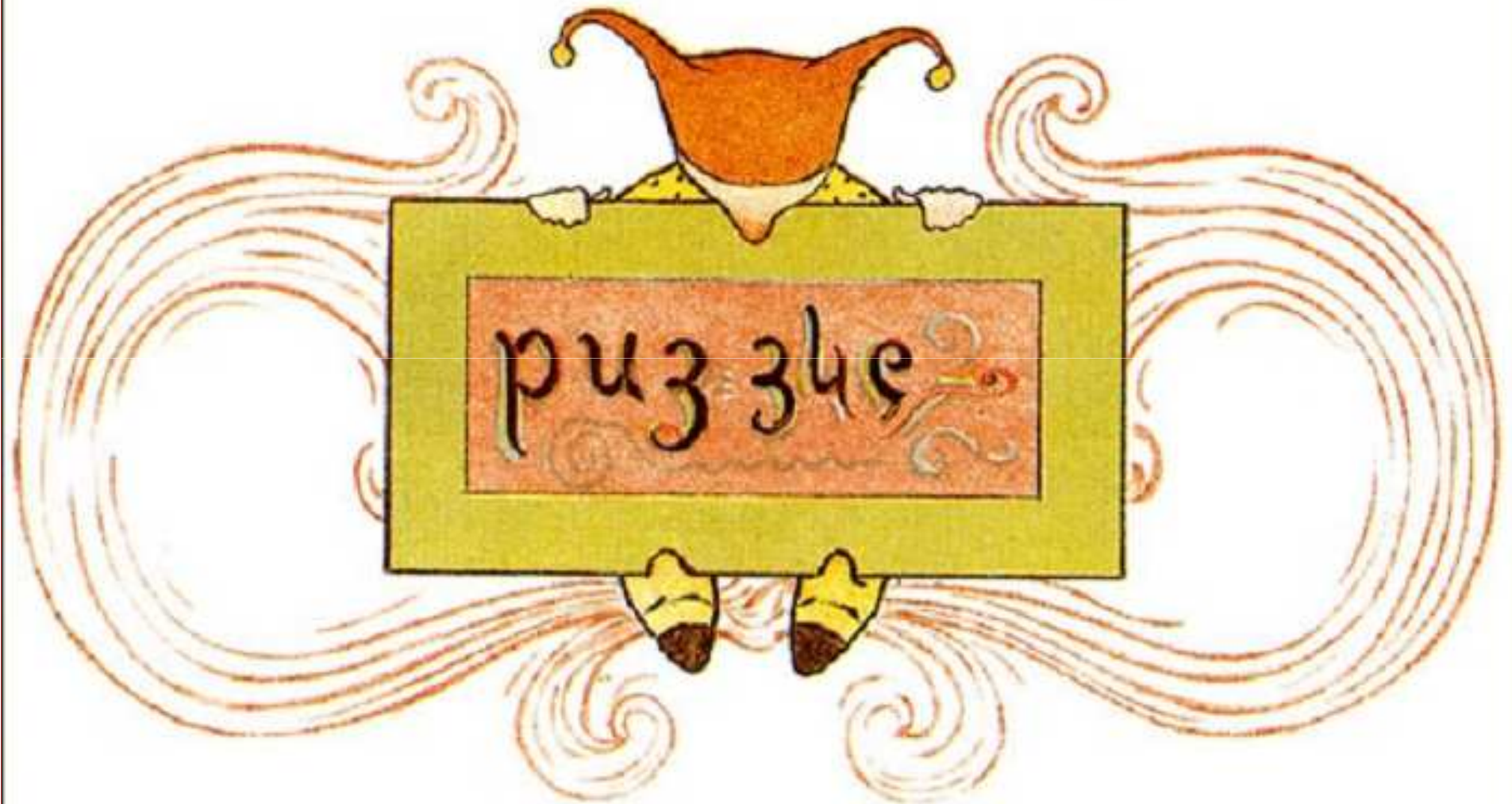
Ahora si se hace otro test y también le da positivo, ya debería empezar a preocuparse...

TOPSY  
BUT ABRAHAM KNOWS ITS REALLY  
FOR THE PHARMACEUTICAL-WEALTHY.



BARACK HAS A NEW PLAN  
THAT WILL HOPEFULLY BE HEALTHY  
TURVY

We find the ending of this book in plainest text asserted.



And now appears a mystic word, but if it be inverted,

**G  
R  
A  
C  
I  
A  
S**

