# Dinámica transversa de foliaciones y grafos de grupos *

**Marta Macho Stadler**

Universidad del País Vasco–Euskal Herriko Unibertsitatea

Una foliación es una descomposición de una variedad en subvariedades, dispuestas localmente como las hojas de un libro, pero cuya disposición global es mucho más complicada.

Nuestro trabajo se centra en la representación de la estructura transversa de una foliación a través de diferentes grupoides, a partir de los que se pueden definir invariantes C*-algebraicos y K-teóricos.

En este póster, estudiamos la dinámica transversa de una foliación a través de grafos de grupos (asociados a determinadas transversales totales) Morita–equivalentes al grupoide de holonomía de la foliación.

---

**Definición 1.** Un grafo orientado es $\Gamma = (\Gamma^0, \Gamma^1, s, r)$, donde:

(i) $\Gamma^0$ y $\Gamma^1$ son los vértices y las aristas, respectivamente;

(ii) las aplicaciones de incidencia $s, r : \Gamma^1 \longrightarrow \Gamma^0$ asocian a cada arista $a \in \Gamma^1$, su origen $s(a) \in \Gamma^0$ y extremo $r(a) \in \Gamma^0$.

$\Gamma$ es localmente finito, si sus vértices tienen orden (cardinal de las aristas de incidencia) finito.

**Definición 2.** Sean $\Gamma$ un grafo orientado y $T$ la unión disjunta de $\Gamma^0$ y $\Gamma^1 \times [0,1]$, donde $\Gamma^0$ y $\Gamma^1$ están provistos de la topología discreta. Sobre $T$ se considera la relación de equivalencia:

$$(a,0) \sim s(a) \quad \text{y} \quad (a,1) \sim r(a), \quad a \in \Gamma^1.$$

El cociente $R(\Gamma) = T/\sim$, es la realización topológica de $\Gamma$.

**Definición 3.** Un grafo localmente finito y orientado de grupos es:

(i) un grafo $\Gamma = (\Gamma^0, \Gamma^1, s, r)$ localmente finito y orientado,

(ii) para cada $s \in \Gamma^0$ y $a \in \Gamma^1$, se tienen grupos $G_s$ y $H_a$ y homomorfismos:

$$S_a : H_a \longrightarrow G_{s(a)} \quad \text{y} \quad R_a : H_a \longrightarrow G_{r(a)}.$$

En [HM], se asocia de manera canónica a toda foliación casi sin holonomía de tipo finito $(M, \mathcal{F})$, un grafo finito y orientado de grupos abelianos de tipo finito, $\Gamma(\mathcal{F})$ (el grafo de la foliación), que es Morita–equivalente al grupoide de holonomía de $\mathcal{F}$.

Este grafo puede pensarse como un grupoide transverso relativamente a una cierta transversal total a la foliación.

**Ejemplos.** Dos ejemplos simples de las técnicas de [HM] son:

**(Ej1)** Sea la foliación de Reeb $(\mathbb{S}^3, \mathcal{R})$: tiene una única hoja compacta $C \simeq \mathbb{T}^2$ y $\mathbb{S}^3 - C$ consta de dos componentes $U_1$ y $U_2$.

El grafo de la foliación posee una arista única (la hoja $C$) y dos vértices (los abiertos $U_1$ y $U_2$).

Los grupos que definen el grafo son:

(i) sobre el vértice $U_1$, $G_{U_1} \simeq \mathbb{Z}$ es el grupo de holonomía de la foliación inducida $(U_1, \mathcal{F}_{U_1})$;

(ii) sobre el vértice $U_2$, $G_{U_2} \simeq \mathbb{Z}$ es el grupo de holonomía de la foliación inducida $(U_2, \mathcal{F}_{U_2})$;

(iii) $H_C \simeq \mathbb{Z}^2$ es el grupo de holonomía de $C$.

Los homomorfismos del grafo (que expresan la contribución de cada componente conexa a la holonomía de $C$), son:

(1) $R_C : H_C \longrightarrow G_{U_1}$, donde $R_C(m,n) = n$, y

(2) $S_C : H_C \longrightarrow G_{U_2}$, donde $S_C(m,n) = m$.

**(Ej2)** Sea la foliación $\mathcal{F}$ sobre el toro $\mathbb{T}^2$, con una única hoja compacta $C \simeq \mathbb{S}^1$ y el resto de las hojas rectas (obtenido, por suspensión de un homeomorfismo de $\mathbb{S}^1$, con un único punto fijo). $\mathbb{T}^2 - C$ tiene una única componente conexa $U$.

El grafo de esta foliación consiste en una arista única (la hoja $C$) y un vértice único (el abierto $U$).

Los grupos que definen el grafo representan:

(i) sobre el vértice $U$, $G_U \simeq \mathbb{Z}$ el grupo de holonomía de la foliación inducida $(U, \mathcal{F}_U)$;

(ii) $H_C \simeq \mathbb{Z}$ es el grupo de holonomía de la hoja compacta $C$.

El homomorfismo del grafo es la identidad $R_C : H_C \longrightarrow G_U$.

Nos interesa generalizar este tipo de resultados a foliaciones arbitrarias, y en este momento, nuestro plan de trabajo es:

(1) asociar a ciertos espacios foliados $(M, \mathcal{F})$ un (o un límite inductivo de) grafo localmente finito y orientado de grupos;

(2) estos grafos representarían el grupoide de holonomía de una transversal completa, y así, serían Morita-equivalentes al grupoide de holonomía de $\mathcal{F}$;

(3) se trataría entonces de construir la realización topológica $M_\Gamma$ de este grafo: el espacio topológico obtenido estaría provisto de una relación de equivalencia $\sim_\Gamma$ inducida por los grupos definiendo el grafo. Se obtiendría así una laminación $(M_\Gamma, \mathcal{F}_\Gamma)$, más sencilla de manejar que $(M, \mathcal{F})$, y por equivalencia de Morita, tendríamos información, entre otros, sobre la C*-álgebra de la foliación $C^*(M, \mathcal{F})$.

Comenzaremos este plan de trabajo completando los casos no cubiertos en [HM] para las foliaciones casi sin holonomía, para posteriormente, sustituir los grupos abelianos por grupos mediables (y grupos más generales) e investigar ejemplos de foliaciones conocidos.

## Bibliografía

**[C]** A. Connes, Non commutative Geometry, Academic Press, 1994.

**[HH]** G. Hector and U. Hirsch, Introduction to the Geometry of Foliations (A and B), Friedr. Vieweg and Sohn, 1986 and 1987.

**[HM]** G. Hector et M. Macho Stadler, *Isomorphisme de Thom pour les feuilletages presque sans holonomie*, Comptes Rendues de l'Académie des Sciences, Série I, 325 (9), 1015-1018, 1997.

**[R]** J. Renault, *C*-algebras of groupoids and foliations*, Proc. Symposia Pure Maths. Vol 38, 339-350, 1982.

*Trabajo parcialmente financiado por Proyecto UPV–EHU 00127.310-E-14790