TOPOLOGÍA GENERAL

Primera parte

Curso 2009-2010

Marta Macho Stadler
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencia y Tecnología
Universidad del País Vasco–Euskal Herriko Unibertsitatea
Barrio Sarriena s/n, 48940 Leioa
e-mail: marta.macho@ehu.es
http://www.ehu.es/∼mtwmastm
Tlf: 946015352 Fax: 946012516

Portada: Bernicles, de **Jean-Yves Piffard**, http://www.piffard.ch/

Índice general

Introducción

0.1. ¿Qué es la topología?

... Además de aquella parte de la geometría que trata sobre cantidades y que se ha estudiado en todo tiempo con gran dedicación, el primero que mencionó la otra parte, hasta entonces desconocida, fue G. Leibniz, el cual la llamó geometría de la posición. Leibniz determinó que esta parte se tenía que ocupar de la sola posición y de las propiedades provenientes de la posición en todo lo cual no se ha de tener en cuenta las cantidades, ni su cálculo... Por ello, cuando recientemente se mencionó cierto problema que parecía realmente pertenecer a la geometría, pero estaba dispuesto de tal manera que ni precisaba la determinación de cantidades ni admitía solución mediante el cálculo de ellas, no dudé en referirlo a la geometría de la posición... **L. Euler**

La topología es probablemente la más joven de las ramas clásicas de las matemáticas. En contraste con el álgebra, la geometría y la teoría de los números, cuyas genealogías datan de tiempos antiguos, la topología aparece en el siglo XVII, con el nombre de *analysis situs*, es decir, *análisis de la posición*.

De manera informal, la topología se ocupa de aquellas propiedades de las figuras que permanencen invariantes, cuando son plegadas, dilatadas, contraidas o deformadas, de modo que no aparezcan nuevos puntos, o se hagan coincidir puntos diferentes. La transformación permitida presupone, en otras palabras, que hay una correspondencia biunívoca entre los puntos de la figura original y los de la transformada, y que la deformación hace corresponder *puntos próximos* a *puntos próximos*. Esta última propiedad se llama *continuidad*, y lo que se requiere es que la transformación y su inversa sean ambas continuas: trabajamos con *homeomorfismos*.

En topología se trabaja con los mismos objetos que en geometría, pero de modo distinto: las distancias o los ángulos no son importantes, ni siquiera la alineación de los puntos. En topología, un círculo es equivalente a una elipse; una bola no se distingue de un cubo: se dice que la bola y el cubo son objetos *topológicamente equivalentes*, porque se pasa de una al otro mediante una transformación continua y reversible.

0.2. Un poco de historia

En 1679, G. Leibniz (1646–1716) publica su famoso libro *Characteristica Geometrica*, en el que (en términos modernos) intenta estudiar más las propiedades topológicas que las puramente métricas de las figuras. Insiste en que, aparte de la representación coordenada de figuras, "*se necesita de otro análisis, puramente geométrico o lineal, que también defina la posición (situs), como el álgebra define la magnitud*".

Los matemáticos en el siglo XVIII muestran poco interés en la topología, con la excepción de L. Euler (1707–1783) cuyo genio comprende todas las matemáticas. En 1736, Euler publica un artículo con la solución al famoso *Problema de los puentes de Königsberg*, titulado *"Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis"*. El título ya indica que Euler es consciente de que está trabajando con una clase diferente de matemática, en la que la geometría ya no es importante.

El siguiente paso en esta *liberación* de la matemática también se debe a Euler. En 1750 escribe una carta a C. Goldbach (1690–1764) en la que da la famosa *fórmula de Euler* para un poliedro: $v - l + c = 2$, donde v es en número de vértices del poliedro, l es el número de lados y c el número de caras. Esta fórmula, de asombrosa simplicidad, parece que fue olvidada por Arquímedes (287 AC–212 AC) y R. Descartes (1596–1650), aunque los dos escribieron extensamente sobre poliedros. Esto parece deberse a que para todos los anteriores a Euler, parecía imposible pensar en propiedades geométricas sin que la medida estuviera involucrada. Euler publica los detalles de esta fórmula en 1752 en dos artículos, donde da una demostración basada en la disección de sólidos en *rodajas tetraédricas*. Euler pasa por alto algunos problemas en su prueba; por ejemplo, supone que los sólidos son convexos.

A.J. Lhuilier (1750–1840) continúa el camino iniciado por Euler con su fórmula poliédrica. En 1813, publica un importante trabajo, donde indica que la fórmula de Euler es falsa para sólidos con asas sobre ellos: si un sólido tiene g asas (un *asa* es un toro adjuntado al espacio), Lhuilier prueba que la fórmula se escribe $v - l + c = 2 - 2g$. Éste es el primer resultado conocido sobre *invariantes topológicos*.

A.F. Möbius (1790–1868) publica una descripción de la banda que lleva su nombre en 1865. Intenta escribir la propiedad de *unicidad de cara* de la banda, en términos de falta de orientabilidad.

J.B. Listing (1802–1882) es el primero en usar la palabra *topología*. Sus ideas topológicas se deben principalmente a su maestro C.F. Gauss (1777–1855). Listing escribe un artículo en 1847 llamado *"Vorstudien zur Topologie"* y en 1861, publica otro artículo, en el que describe la banda de Möbius (cuatro años antes que Möbius) y estudia la noción de *conexión* de las superficies. Listing no es el primero en examinar las componentes conexas de las superficies; B. Riemann (1822-1866) estudia este concepto en 1851 y de nuevo en 1857 cuando introduce las *superficies de Riemann*.

C. Jordan (1838-1922) publica en 1882 su *"Cours d'Analyse"*, que contiene pruebas rigurosas de resultados topológicos intuitivamente obvios sobre curvas en el plano, introduciendo además otro método para estudiar la conexión de las superficies.

Listing examina la conexión en el espacio euclídeo de dimensión tres, pero E. Betti (1823–1892) extiende estas ideas a dimensiones arbitarias.

La idea de conexión es descrita con rigor por H. Poincaré (1854–1925) en una serie de artículos bajo el título de *"Analysis situs"* en 1895. Poincaré introduce el concepto de *homología* y da una definición precisa de los *números de Betti* asociados a un espacio. E. de Jonquières (1820–1901) generaliza en 1890 la fórmula para poliedros convexos de Euler a poliedros no necesariamente convexos. Asímismo, en relación con la conexión, Poincaré introduce el concepto de *grupo fundamental* de una variedad y la noción de *homotopía*.

Un segundo camino en el cual se desarrolla la topología es a través de la generalización de ideas de *convergencia*. Este proceso se inicia en realidad en 1817 cuando B. Bolzano (1781–1848) asocia la convergencia con un subconjunto acotado infinito de números reales, en vez de pensar exclusivamente en convergencia de sucesiones de números.

G. Cantor (1845–1918) introduce en 1872 el concepto de conjunto *derivado* (o familia de puntos límite) de un conjunto. Define los subconjuntos *cerrados* de la recta real como aquellos conteniendo a su conjunto derivado e introduce la idea de conjunto *abierto*, un concepto clave en la topología de conjuntos. Y se define el concepto de *entorno de un punto*.

En 1906, M. Fréchet (1878–1973) llama a un espacio *compacto* si cada subconjunto infinito acotado contiene un punto de acumulación. Fréchet es capaz de extender la noción de convergencia de un espacio euclídeo, definiendo los *espacios métricos*. Prueba que los conceptos de abierto y cerrado de Cantor se extienden naturalmente a espacios métricos.

En el Congreso Internacional de Matemáticos de Roma de 1909, F. Riesz (1880–1956) propone un nuevo acercamiento axiomático a la topología, basado en una definición conjuntista de puntos límite, sin un concepto de distancia subyacente. Unos cuantos años más tarde, en 1914, F. Hausdorff (1868–1942) define los entornos a través de cuatro axiomas, de nuevo sin consideraciones métricas. Este trabajo de Riesz y Hausdorff realmente da lugar a la definición de espacio topológico abstracto.

Hay una tercera vía en la que los conceptos topológicos entran en las matemáticas, a saber, a través del análisis funcional. Esta es un área que surge de la física matemática y la astronomía, debido a que los métodos del análisis clásico eran inadecuados al abordar algunos tipos de problemas.

J. Hadamard (1865–1963) introduce la palabra *funcional* en 1903 cuando estudia los funcionales lineales F de la forma $F(f) = \lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_a^b f(x)g_n(x)dx$. Fréchet continúa el desarrollo de esta teoría, definiendo la derivada de un funcional en 1904.

E. Schmidt (1876–1959) examina en 1907 la noción de convergencia en espacios de funciones; la distancia se define a través un producto interior. S. Banach (1892–1945) realiza un paso posterior en la abstracción en 1932, cuando pasa de los espacios con producto interior a los espacios normados.

Poincaré desarrolla muchos de sus métodos topológicos cuando estudia ecuaciones diferenciales ordinarias que provienen del estudio de ciertos problemas astronómicos. Esta colección de métodos se transforma en una completa teoría topológica en 1912, con los estudios de L.E.J. Brouwer (1881–1966).

0.3. Organización de este documento

Este documento está organizado en 7 capítulos, el primero de repaso de nociones sobre teoría de conjuntos y los otros corresponden a los 6 primeros temas del programa de la asignatura *Topología General* del curso 2009/2010.

Cada uno de los temas consta de definiciones, propiedades con algunas de las demostraciones más complicadas y una extensa colección de ejemplos. Al final de cada capítulo aparece una relación de problemas, algunos de ellos elementales, otros ya más elaborados, otros son una mera excusa para introducir algún ejemplo de espacio importante,... en donde se deben aplicar las propiedades estudiadas en la parte teórica. Están marcados con $*$ aquellos que deben hacerse y entregarse como parte del trabajo del curso.

Leioa, septiembre 2009

Capítulo 1

Repaso de algunas nociones básicas

1.1. Nociones de Lógica

La Lógica es una herramienta básica en Matemáticas; damos aquí un breve repaso de algunos conceptos fundamentales.

1.1.1. Símbolos y conectores

En Matemáticas, es fundamental la utilización de símbolos y conectores que sirven para modificar o combinar sentencias.

Definición 1.1. Los siguientes símbolos se llaman *cuantificadores*:

1) el *cuantificador universal*: $\forall$ (para todo);

2) el *cuantificador existencial*: $\exists$ (existe).

Definición 1.2. También es esencial el uso de los llamados *conectores*:

1) la *negación*: no;

2) la *conjunción*: $\wedge$ (y);

3) la *disyunción*: $\vee$ (o);

4) la *implicación*: $\Longrightarrow$ (si –, entonces);

5) la *doble implicación*: $\Longleftrightarrow$ (si y sólo si, es equivalente a).

El manejo es sencillo, pero es preciso tener cuidado al utilizarlos. Por ejemplo, si $\mathfrak{P}$ y $\mathfrak{Q}$ son propiedades relativas a los elementos de un conjunto X (definición 1.11), para expresar que x cumple $\mathfrak{P}$, se escribirá $\mathfrak{P}(x)$. Y entonces:

Proposición 1.1. *El enunciado* $\mathfrak{P}(x) \vee \mathfrak{Q}(x)$*, significa una de las tres posibilidades (mutuamente excluyentes) siguientes:*

(i) $\mathfrak{P}(x)$ *y* $\mathfrak{Q}(x)$*;*

(ii) $\mathfrak{P}(x)$ *y no-*$\mathfrak{Q}(x)$*;*

(iii) no-$\mathfrak{P}(x)$ *y* $\mathfrak{Q}(x)$.

Proposición 1.2. *Un enunciado se niega de la siguiente manera:*

1) no-$(\forall x \in X, \mathfrak{P}(x))$ *es lo mismo que decir que* $(\exists x \in X :$ *no-*$\mathfrak{P}(x))$*;*

2) no-$(\exists x \in X : \mathfrak{P}(x))$ *equivale a* $(\forall x \in X,$ *no-*$\mathfrak{P}(x))$*;*

3) no$(\forall x \in X, \mathfrak{P}(x) \wedge \mathfrak{Q}(x))$ *es lo mismo que* $(\exists x \in X :$ *no-*$\mathfrak{P}(x)$ *o no-*$\mathfrak{Q}(x))$*;*

4) no-$(\exists x \in X : \mathfrak{P}(x) \Longrightarrow \mathfrak{Q}(x))$ *es equivalente a* $(\forall x \in X, \mathfrak{P}(x) \not\Longrightarrow \mathfrak{Q}(x))$.

Proposición 1.3. *Cuando aparecen varios cuantificadores en un enunciado, es indiferente el orden en el que se escriben, siempre que los cuantificadores involucrados sean del mismo tipo. Si* $\mathfrak{P}(x, y)$ *es una propiedad relativa a los elementos* x *e* y*, entonces:*

1) $(\forall x, \forall y, \mathfrak{P}(x, y))$ *es lo mismo que decir que (*$\forall y$*,* $\forall x$*,* $\mathfrak{P}(x, y)$*);*

2) $(\exists x, \exists y : \mathfrak{P}(x, y))$ *es equivalente a* $(\exists y \exists y : \mathfrak{P}(x, y))$.

Contraejemplo 1.1. Hay que tener cuidado cuando se ven involucrados cuantificadores de distinto tipo. Por ejemplo, el enunciado $(\forall x, \exists y : \mathfrak{P}(x, y))$ no equivale a la expresión $(\exists y : \forall x, \mathfrak{P}(x, y))$. En efecto, si $X = \mathbb{N}$ y $\mathfrak{P}(x, y)$ es la propiedad "$x \leq y$", la primera expresión se lee como que todo número natural posee otro mayor (que es cierta) y la segunda significa que existe un número natural mayor que todos los demás (que es falsa).

Proposición 1.4. *El cuantificador existencial y el conector disyunción se pueden intercambiar en la escritura de un enunciado, así como el cuantificador universal y el conector conjunción:*

1) $(\forall x, \mathfrak{P}(x))$ *y* $(\forall y, \mathfrak{Q}(y))$ *es lo mismo que* $(\forall x, y, \mathfrak{P}(x) \wedge \mathfrak{Q}(y))$*;*

2) $(\exists x : \mathfrak{P}(x))$ *o* $(\exists y : \mathfrak{Q}(y))$ *es equivalente a* $(\exists x, y : \mathfrak{P}(x) \vee \mathfrak{Q}(y))$.

Contraejemplo 1.2. En general, no se pueden intercambiar cuantificadores y conectores en la escritura de un enunciado:

1) la expresión $(\forall x, \mathfrak{P}(x) \vee \mathfrak{Q}(x))$ no equivale a $(\forall x, \mathfrak{P}(x)) \vee (\forall x : \mathfrak{Q}(x))$. En efecto, si $X = \mathbb{N}$, $\mathfrak{P}$ y $\mathfrak{Q}$ son las propiedades de "ser par" y "ser impar" respectivamente, entonces la primera expresión se lee como que un número natural es par o impar (que es verdadera) y la segunda dice que todo número natural es par o todo número natural es impar (que es falsa);

2) la expresión $(\exists x : \mathfrak{P}(x)) \wedge (\exists x : \mathfrak{Q}(x))$ no equivale a $(\exists x : \mathfrak{P}(x) \wedge \mathfrak{Q}(x))$. En efecto, tomando de nuevo el ejemplo de 1), la primera expresión se lee como que existe un número natural par y existe un número natural impar (que es cierta), y la segunda significa que existe un número natural a la vez par e impar (que es falsa).

1.1.2. Los objetos del razonamiento

Definir una teoría matemática es establecer las *reglas del juego* sobre los objetos manipulados, los denominados *axiomas*.

Definición 1.3. Un *axioma* es todo enunciado que:

1) sirve de fundamento para la construcción de una teoría;

2) se admite como cierto y no es por lo tanto objeto de discusión.

Cuando un único axioma no basta para definir una teoría, se pide además:

3) que los diferentes axiomas usados no se contradigan y sean independientes los unos de los otros.

Ejemplos 1.1. Algunos ejemplos de axiomas son los siguientes:

1) *axioma de Euclides*, que es la base de la Geometría Euclídea: dos rectas paralelas del plano euclídeo no se cortan;

2) *axioma de elección*: dado un conjunto X, existe una *función* (definición 1.18) *de elección*, $f\colon \mathcal{P}(X) - \{\emptyset\} \longrightarrow X$ (definición 1.14), que asigna a todo conjunto A no vacío, un punto distinguido $f(A) = a \in A$;

3) *lema de Zorn*: sea un conjunto parcialmente ordenado $(X, \leq)$ (definición 1.31), tal que todo conjunto bien ordenado (definición 1.33) admite una cota superior (definición 1.34); entonces $(X, \leq)$ posee un elemento maximal (definición 1.32);

4) *axioma de Zermelo*: todo conjunto puede ser bien ordenado.

Observación 1.1. 2), 3) y 4) son formulaciones equivalentes del mismo axioma.

Definición 1.4. Una *definición* es un enunciado que sirve para explicar o introducir una nueva noción.

Una vez conocidos los axiomas y algunas definiciones, *el juego* puede comenzar, puesto que las reglas ya se conocen.

Definición 1.5. Un *teorema* es un enunciado que se deduce:

1) directamente de los axiomas o

2) de los axiomas y los teoremas precedentes, y

con las reglas de deducción que se llaman *demostraciones*, que aseguran su validez.

Definición 1.6. A veces, se da únicamente el nombre de teorema a los verdaderamente importantes, a los que han pasado a la historia con un nombre, o a los que precisan una demostración muy larga, dejando el nombre de *proposición* al resto.

Definición 1.7. Un *lema* es una proposición preliminar a la demostración de un teorema.

Definición 1.8. Un *corolario* es una proposición que se deduce inmediatamente de un teorema, por una demostración si no inmediata, cuando menos corta y fácil.

1.1.3. Condiciones necesarias y suficientes

Definición 1.9. (La implicación) Sean X un conjunto y $\mathfrak{P}$ y $\mathfrak{Q}$ dos propiedades matemáticas definiendo los conjuntos $A = \{x \in X : \mathfrak{P}(x)\}$ y $B = \{x \in X : \mathfrak{Q}(x)\}$ respectivamente. Si $A \subset B$ (definición 1.12), todo elemento verificando $\mathfrak{P}$, cumple también $\mathfrak{Q}$. En este caso, se dice que $\mathfrak{P}$ *implica* $\mathfrak{Q}$, y se escribe $\mathfrak{P} \Longrightarrow \mathfrak{Q}$. Se dice también que $\mathfrak{P}$ es una *condición suficiente* de $\mathfrak{Q}$ (para obtener $\mathfrak{Q}$ basta con conocer $\mathfrak{P}$) o que $\mathfrak{Q}$ es una *condición necesaria* de $\mathfrak{P}$.

Definición 1.10. (La equivalencia) En las condiciones de la definición 1.9, si $A = B$ (definición 1.12), todo elemento verificando $\mathfrak{P}$ cumple también $\mathfrak{Q}$ y viceversa. En este caso, se dice que $\mathfrak{P}$ *es equivalente* a $\mathfrak{Q}$, y se escribe $\mathfrak{P} \Longleftrightarrow \mathfrak{Q}$. Como $A = B$ es idéntico a $A \subset B$ y $B \subset A$, la equivalencia $\mathfrak{P} \Longleftrightarrow \mathfrak{Q}$ significa las dos implicaciones $\mathfrak{P} \Longrightarrow \mathfrak{Q}$ y $\mathfrak{Q} \Longrightarrow \mathfrak{P}$. Es decir, las dos propiedades equivalentes $\mathfrak{P}$ y $\mathfrak{Q}$ caracterizan el mismo conjunto. Observar que en tal caso $\mathfrak{P}$ es una *condición necesaria y suficiente* de $\mathfrak{Q}$.

1.1.4. Los métodos de demostración

Hay muchos métodos de demostración, de los cuales citamos los más importantes a continuación, usando la notación de la definición 1.9:

(i) Método de la hipótesis auxiliar: *para probar que* $\mathfrak{P} \Longrightarrow \mathfrak{Q}$*, se supone* $\mathfrak{P}$ *cierta.*

Esta forma de razonamiento, la más directa, es también la más conocida. De manera práctica consiste en demostrar el teorema $\mathfrak{P} \Longrightarrow \mathfrak{Q}$, donde $\mathfrak{P}$ es la *hipótesis* y $\mathfrak{Q}$ la *conclusión o tesis*, suponiendo que se verifica $\mathfrak{P}$ (la hipótesis es cierta) y ayudándose de los axiomas y de los otros teoremas de la teoría demostrados anteriormente.

(ii) Disjunción de los casos: *para probar que* $\mathfrak{P} \Longrightarrow \mathfrak{Q}$*, se descompone* $\mathfrak{P}$ *en la forma* $\mathfrak{P}_1 \vee \cdots \vee \mathfrak{P}_n$*, y se prueba que para cada* $i \in \{1, \ldots, n\}$*, es* $\mathfrak{P}_i \Longrightarrow \mathcal{Q}$.

Es decir, se descompone el conjunto A de los elementos que cumplen $\mathfrak{P}$ en una unión disjunta (definición 1.13) de subconjuntos $A_1, \cdots, A_n$. Entonces, se prueba que para cada $1 \leq i \leq n$ es $A_i \subset B$; y como $A = A_1 \cup \cdots \cup A_n$, se tendrá $A \subset B$.

Ejemplo 1.1. *Probar que si* $n \in \mathbb{N}$*, entonces* $n(n+1)$ *es par.*
Demostración: Distinguimos dos posibilidades: si n es par, existe $k \in \mathbb{N}$, tal que $n = 2k$, y entonces $n(n+1) = 2k(2k+1)$. Si n es impar, existe $k \in \mathbb{N}$, tal que $n = 2k+1$, y entonces $n(n+1) = (2k+1)(2k+2) = 2(2k+1)(k+1)$, que es claramente par. ∎

(iii) Método de contraposición: *para probar que* $\mathfrak{P} \Longrightarrow \mathfrak{Q}$*, se demuestra el contrarecíproco no-*$\mathfrak{Q} \Longrightarrow$ *no-*$\mathfrak{P}$.

Es un primer método de prueba indirecta. Descansa sobre el hecho de que la inclusión $A \subset B$ es equivalente a decir que los conjuntos complementarios (definición 1.13) verifican la inclusión $B^c \subset A^c$.

Ejemplo 1.2. *Probar que si* $n \in \mathbb{N}$ *es tal que* n^2 *es par, entonces* n *es par.*
Demostración: Si $n \in \mathbb{N}$ es impar, entonces n^2 es impar. ∎

(iv) Demostración por reducción al absurdo: *para probar un enunciado* $\mathfrak{P}$*, se supone su negación no-*$\mathfrak{P}$*, y se busca una contradicción en la teoría en la que se trabaja.*

Como evidentemente se admite que esta teoría no admite contradicciones, la suposición no-$\mathfrak{P}$ será falsa, lo cual es equivalente a decir que $\mathfrak{P}$ es cierta. ¿A qué contradicción se debe llegar? A contradecir un axioma, un teorema anteriormente probado o la propia suposición no-$\mathfrak{P}$.

De modo similar, para probar que $\mathfrak{P} \Longrightarrow \mathfrak{Q}$ razonando por reducción al absurdo, se admite lo contrario, es decir, que no-($\mathfrak{P} \Longrightarrow \mathfrak{Q}$), o lo que es equivalente, $\mathfrak{P}$ y no-$\mathfrak{Q}$. Y se busca entonces encontrar una contradicción.

(v) El contraejemplo: para probar que un propiedad matemática $\mathfrak{P}$ es cierta para un conjunto X, hay que probar que todos los elementos de X la verifican. Pero, se sabe que la negación de $(\forall x \in X, \mathfrak{P}(x))$ es $(\exists x \in X, \text{no-}\mathfrak{P}(x))$. Así, para probar que esta fórmula es falsa, basta con encontrar un elemento de X que no verifique $\mathfrak{P}$: esto es lo que se llama *dar un contraejemplo*.

Ejemplo 1.3. *Si $x \in \mathbb{R}$, ¿es cierto que si $x \leq x^2$, entonces es $x \geq 1$?*
Demostración: La respuesta es falsa, tomando $x = -2$. ∎

(vi) La demostración por recurrencia: este tipo de demostración está ligada a la definición del conjunto de los enteros naturales. Es una técnica útil para probar que una propiedad $\mathfrak{P}(n)$ es cierta para todos los enteros naturales n, o para los que son iguales o superiores a un cierto n_0. Sean n_0 un entero natural y $\mathfrak{P}(n)$ una propiedad matemática que depende de un entero n. Para probar que $\mathfrak{P}(n)$ se verifica para cada $n \geq n_0$, basta con probar que:

1) $\mathfrak{P}(n_0)$ es cierta,
2) demostrar, bajo la hipótesis de que $\mathfrak{P}(n)$ se verifica para $n \in \{n_0, n_0 + 1, \dots k\}$, que $\mathfrak{P}(k + 1)$ es cierta.

La etapa 1) es una simple verificación y la 2) es, de hecho, el objeto de una demostración.

Ejemplo 1.4. *Probar que para cada $n \in \mathbb{N}$, $1 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.*
Demostración: Para $n = 1$, es cierto que $1 = \frac{1(1+1)}{2}$. Si la propiedad se verifica para $n \in \{1, \dots, k\}$, entonces: $1+2+\cdots+k+(k+1)=(1+2+\cdots+k)+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)=\frac{(k+2)(k+1)}{2}$. ∎

Observación 1.2. Hay una forma débil de la demostración por recurrencia: para probar que $\mathfrak{P}(n)$ se verifica para cada $n \geq n_0$, basta con probar que:

1) $\mathfrak{P}(n_0)$ es cierta,
2) demostrar, bajo la hipótesis de que $\mathfrak{P}(k)$ se verifica para $k > n_0$, que $\mathfrak{P}(k + 1)$ es cierta.

En este caso, para probar que $\mathfrak{P}(k + 1)$ se verifica, nos apoyamos sólo sobre la hipótesis de que $\mathfrak{P}(k)$ es cierta.

1.2. Teoría de conjuntos

Definición 1.11. Un *conjunto* es una colección de objetos, llamados *elementos* o *puntos*. Si x es un elemento de X, se denota por $x \in X$. Análogamente, $x \notin X$ denota la "no pertenencia" de x a X. El *conjunto vacío* $\emptyset$ es el conjunto sin elementos.

Son conjuntos importantes en Matemáticas $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\cdots$.

Se puede definir un conjunto:

1) por *extensión*, nombrando todos sus elementos: por ejemplo, el conjunto de los números naturales pares es $\{2, 4, 6, 8, \cdots\}$;

2) a través de una *propiedad* $\mathfrak{P}$ válida en un universo $\mathfrak{U}$, que servirá para caracterizarlo $\{x \in \mathfrak{U} : \mathfrak{P}(x)\}$. Por ejemplo, el conjunto de los números naturales pares se puede expresar por $\{x \in \mathbb{N} : x$ es múltiplo de $2\}$.

Definición 1.12. Dados $A, B \subset X$, se dice que A *está contenido* en B, $A \subset B$, si para cada $x \in A$, es $x \in B$. Y A es *igual* a B, $A = B$, si $A \subset B$ y $B \subset A$.

Definición 1.13. Si $A, B \subset X$, se definen:

1) la *intersección* de A y B, por $A \cap B = \{x \in X : x \in A \wedge x \in B\}$. Claramente, $A \cap B \subset A, B$. A y B se dicen *disjuntos* si $A \cap B = \emptyset$;

2) la *unión* de A y B, por $A \cup B = \{x \in X : x \in A \vee x \in B\}$. Es decir $x \in A \cup B$, si se verifica una (y sólo una) de las condiciones siguientes:

   (i) $x \in A$ y $x \in B$,

   (ii) $x \in A$ y $x \notin B$,

   (iii) $x \notin A$ y $x \in B$.

   Claramente, $A, B \subset A \cup B$;

3) el *complementario* de A en X, por $X - A = \{x \in X : x \notin A\}$. Si no hay duda de respecto a que conjunto se está tomando el complementario, se suele denotar por A^c;

4) la *diferencia* de A y B, por $A - B = A \cap B^c = \{x \in X : x \in A \wedge x \notin B\}$.

Proposición 1.5. *Las anteriores operaciones verifican las siguientes propiedades:*

1) leyes idempotentes: $A \cap A = A = A \cup A$*;*

2) leyes asociativas: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ *y* $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$*;*

3) leyes conmutativas: $A \cup B = B \cup A$ *y* $A \cap B = B \cap A$*;*

4) leyes distributivas: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ *y* $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$*;*

5) identidades: $A \cap X = A = A \cup \emptyset$*,* $A \cup X = X$ *y* $A \cap \emptyset = \emptyset$*;*

6) propiedades del complementario: $A \cup A^c = X$*,* $A \cap A^c = \emptyset$*,* $(A^c)^c = A$ *y* $X^c = \emptyset$*;*

7) leyes de De Morgan: $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ *y* $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$*.*

Definición 1.14. Se llama *partes de* X o *conjunto potencia de* X al conjunto de todos los subconjuntos de X, y se denota por $\mathcal{P}(X)$ o 2^X. Es decir, $A \subset X$ si y sólo si $A \in \mathcal{P}(X)$.

Definición 1.15. $A \times B = \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}$ es el *producto cartesiano* de A por B. Sus elementos son *pares ordenados*.

Claramente, $A \times B \neq B \times A$. Y $A \times B = \emptyset$, si y sólo si $A = \emptyset$ ó $B = \emptyset$. Dos pares ordenados $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in A \times B$, son iguales $(a_1, b_1) = (a_2, b_2)$ si y sólo si $a_1 = a_2$ y $b_1 = b_2$. Luego, $(a_1, b_1) \neq (a_2, b_2)$ si y sólo si $a_1 \neq a_2$ o $b_1 \neq b_2$.

En general, dada una familia finita de conjuntos $\{A_1, \cdots, A_n\}$, se define su producto cartesiano por $\prod_{i=1}^{n} A_i = A_1 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, \cdots, a_n) : a_i \in A_i, i \in \{1, \cdots, n\}\}$. Si $A_i = A$ para cada $i \in \{1, \cdots, n\}$, el producto cartesiano se denota por A^n.

Proposición 1.6. *El producto cartesiano verifica las siguientes propiedades:*

1) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$*;*

2) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$*;*

3) si $C \neq \emptyset$ *y* $A \times C = B \times C$*, entonces* $A = B$*;*

4) $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$*;*

5) $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$*;*

6) $(A \times B)^c = (A^c \times B^c) \cup (A^c \times B) \cup (A \times B^c)$*;*

7) si $B \subset C$*, entonces* $A \times B \subset A \times C$*;*

8) $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \times D) \cap (C \times B)$*;*

9) si A, B, C *y* D *son conjuntos no vacíos, entonces* $A \times B \subset C \times D$ *si y sólo si* $A \subset C$ *y* $B \subset D$*.*

Definición 1.16. Sea $I \neq \emptyset$ un *conjunto de índices*. Se considera una familia de conjuntos $\{A_i : i \in I\}$, y se dice que esta familia está *indicada* por I. Los conjuntos A_i no tienen porque ser diferentes.

Definición 1.17. Dada una familia indicada $\{A_i : i \in I\}$, con $A_i \subset X$, se define:

1) la *intersección generalizada* $\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \in X : \forall i \in I, x \in A_i\}$, y

2) la *unión generalizada* $\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in X : \exists i \in I$ tal que $x \in A_i\}$.

Si el conjunto de índices I es finito, estas definiciones coinciden con las dadas en la definición 1.13. Se cumplen también en este caso las propiedades distributivas, las leyes de De Morgan $\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)^c = \bigcup_{i \in I} A_i^c$ y $\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)^c = \bigcap_{i \in I} A_i^c$, etc.

1.3. Funciones y sus propiedades

Definición 1.18. Dados dos conjuntos X e Y, una *aplicación* o *función* $f\colon X \longrightarrow Y$, es una correspondencia que asocia a cada $x \in X$, un elemento y sólo uno de Y, que se denota por $f(x)$.

Ejemplos 1.2. Algunos ejemplos de aplicaciones son:

1) la *aplicación identidad*, $1_X\colon X \longrightarrow X$, definida por $1_X(x) = x$;

2) la *aplicación inclusión*: si $A \subset X$, $i_A\colon A \longrightarrow X$, se define por $i_A(x) = x$;

3) la *aplicación constante*, $c_{y_0}\colon X \longrightarrow Y$, definida por $c_{y_0}(x) = y_0$, donde y_0 es un punto fijo de Y;

4) la *i-ésima proyección coordenada*, $p_i\colon A_1 \times \cdots \times A_n \longrightarrow A_i$, definida por la igualdad $p_i((a_1, \cdots, a_n)) = a_i$;

5) la *inyección diagonal*, $d\colon X \longrightarrow X^n$, definida por $d(x) = (x, \cdots, x)$;

6) la *función característica de un conjunto*: si $A \subset X$, $\chi_A\colon X \longrightarrow \{0,1\}$, definida por

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \notin A \\ 1 & \text{si} \quad x \in A \end{cases}$$

7) dada $f\colon X \longrightarrow Y$ y $A \subset X$, la *restricción* de f a A, $f|_A\colon A \longrightarrow Y$, está definida por $f|_A(a) = f(a)$;

8) si $g\colon A \longrightarrow Y$ y $A \subset X$, entonces $f\colon X \longrightarrow Y$ es una *extensión* de g a X, si $f|_A = g$; una aplicación puede tener varias extensiones;

9) si $f\colon A \longrightarrow Y$ y $g\colon B \longrightarrow Y$ son dos aplicaciones, donde $A \cup B = X$ y $f(x) = g(x)$, para cada $x \in A \cap B$, se puede definir la *combinada* de f y g, como la aplicación $h\colon X \longrightarrow Y$ definida por

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x \in A \\ g(x) & \text{si} \quad x \in B \end{cases}$$

Definición 1.19. Dada una aplicación $f\colon X \longrightarrow Y$, X se llama el *dominio* de f e Y es su *codominio*. El *grafo* de f es el conjunto $G_f = \{(x, f(x)) : x \in X\} \subset X \times Y$, que en muchas ocasiones se identifica con f.

Definición 1.20. Dos aplicaciones $f\colon X \longrightarrow Y$ y $g\colon Z \longrightarrow W$ son *iguales*, cuando coinciden sus dominios ($X = Z$), sus codominios ($Y = W$) y $f(x) = g(x)$, para cada $x \in X$. Por ejemplo, si $f\colon X \longrightarrow Y$ es una aplicación y $A \subset X$, f y $f|_A$ no son iguales.

Definición 1.21. Dada $f\colon X \longrightarrow Y$, $f(A) = \{y \in Y : \exists a \in A \text{ tal que } f(a) = y\}$ es la *imagen directa* de A. $f(X)$ se llama *rango* de la aplicación.

Definición 1.22. Si $B \subset Y$, $f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}$ es su *imagen recíproca*.

Proposición 1.7. *Dada $f\colon X \longrightarrow Y$, se verifica:*

1) $f(\emptyset) = \emptyset$, $f(X) \subset Y$ y si $A \neq \emptyset$, entonces $f(A) \neq \emptyset$;

2) si $A_1, A_2 \subset X$, y $A_1 \subset A_2$, entonces $f(A_1) \subset f(A_2)$;

3) Si $A_i \subset X$ para $i \in I$, $f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} f(A_i)$ y $f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \subset \bigcap_{i\in I} f(A_i)$;

4) si $A_1, A_2 \subset X$, $f(A_1) - f(A_2) \subset f(A_1 - A_2)$ y en particular $f(X) - f(A_2) \subset f(X - A_2)$. Entre $Y - f(A_2)$ y $f(X - A_2)$ no hay en general ninguna relación;

5) $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$, y puede existir $\emptyset \neq B \subset Y$, tal que $f^{-1}(B) = \emptyset$;

6) $f^{-1}(Y) = X$;

7) si $B_1, B_2 \subset Y$ y $B_1 \subset B_2$, entonces $f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$;

8) si $B_i \subset Y$ para $i \in I$, $f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i)$ y $f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} B_i\right) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i)$;

9) Si $B_1, B_2 \subset Y$, $f^{-1}(B_1 - B_2) = f^{-1}(B_1) - f^{-1}(B_2)$, y en particular, $f^{-1}(Y - B_2) = X - f^{-1}(B_2)$;

10) si $A \subset X$, $A \subset f^{-1}(f(A))$;

11) si $B \subset Y$, $f(f^{-1}(B)) = f(X) \cap B \subset B$;

12) si $A \subset X$ y $B \subset Y$, $f(A \cap f^{-1}(B)) = f(A) \cap B$.

Definición 1.23. Dadas $f\colon X \longrightarrow Y$ y $g\colon Y \longrightarrow Z$, se define la *composición* de g y f, por $g \circ f\colon X \longrightarrow Z$, donde $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, para cada $x \in X$.

Proposición 1.8. *Sean $f\colon X \longrightarrow Y$, $g\colon Y \longrightarrow Z$ y $h\colon Z \longrightarrow W$ aplicaciones, entonces:*

1) la composición de funciones es asociativa: $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$;

2) $f \circ 1_X = f$ y $1_Y \circ g = g$;

3) si $C \subset Z$, es $(g \circ f)^{-1}(C) = f^{-1}(g^{-1}(C))$;

4) si $f\colon X \longrightarrow Y$ y $g\colon Y \longrightarrow X$, en general, $f \circ g \neq g \circ f$.

Definición 1.24. Se dice que $f\colon X \longrightarrow Y$ es *sobreyectiva*, si $f(X) = Y$, es decir, para cada $y \in Y$, existe $x \in X$, tal que $f(x) = y$. Y es *inyectiva*, si dados $x_1 \neq x_2$ en X, es $f(x_1) \neq f(x_2)$ (o equivalentemente, si $f(x_1) = f(x_2)$, entonces $x_1 = x_2$).

Proposición 1.9. *Sea $f\colon X \longrightarrow Y$, entonces:*

1) $B = f(f^{-1}(B))$ para cada $B \subset Y$, si y sólo si f es sobreyectiva;

2) $Y - f(A) \subset f(X - A)$ *para cada* $A \subset X$ *si y sólo si* f *es sobreyectiva;*

3) si $g, h\colon Y \longrightarrow Z$ *y* f *es sobreyectiva, entonces* $g \circ f = h \circ f$ *implica que* $h = g$*;*

4) si $g\colon Y \longrightarrow X$ *y* $f \circ g = 1_Y$*, entonces* f *es sobreyectiva;*

5) $A = f^{-1}(f(A))$ *para cada* $A \subset X$*, si y sólo si* f *es inyectiva;*

6) $f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I} f(A_i)$ *para cada familia indicada de conjuntos* $\{A_i \subset X\}_{i\in I}$ *si y sólo si* f *es inyectiva;*

7) si f *es sobreyectiva, entonces para cada* $A \subset X$ *es* $Y - f(A) = f(X - A)$ *si y sólo si* f *es inyectiva;*

8) si $g, h\colon Z \longrightarrow X$ *y* f *es inyectiva, entonces* $f \circ g = f \circ h$ *implica que* $h = g$*;*

9) si $g\colon Y \longrightarrow X$ *y* $g \circ f = 1_X$*, entonces* f *es inyectiva.*

Definición 1.25. $f\colon X \longrightarrow Y$ es *biyectiva* si es sobreyectiva e inyectiva a la vez. En tal caso, la correspondencia definida por $f^{-1}\colon Y \longrightarrow X$, donde $f^{-1}(y) = x$ si y sólo si $f(x) = y$, es una función.

Proposición 1.10. *Sea* $f\colon X \longrightarrow Y$*, entonces:*

1) si f *es biyectiva, entonces* f^{-1} *también lo es;*

2) si f *es biyectiva, entonces* $f^{-1} \circ f = 1_X$*,* $f \circ f^{-1} = 1_Y$ *y* $(f^{-1})^{-1} = f$*;*

3) si $g\colon Y \longrightarrow X$ *y* $g \circ f = 1_X$ *y* $f \circ g = 1_Y$*, entonces* f *es biyectiva y* $g = f^{-1}$*;*

4) si $f\colon X \longrightarrow Y$ *y* $g\colon Y \longrightarrow Z$ *son biyectivas, entonces* $g \circ f$ *lo es y además* $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

1.4. Relaciones binarias

Definición 1.26. Dado un conjunto X, una *relación binaria* es $\mathfrak{R} \subset X \times X$. $\mathfrak{R}$ se llama:

1) *reflexiva*, si para cada $x \in X$, es $(x, x) \in \mathfrak{R}$;

2) *simétrica*, si dado $(x, y) \in \mathfrak{R}$, entonces $(y, x) \in \mathfrak{R}$;

3) *antisimétrica*, si $(x, y) \in \mathfrak{R}$ e $(y, x) \in \mathfrak{R}$ implica que $x = y$;

4) *transitiva*, si dados $(x, y), (y, z) \in \mathfrak{R}$, entonces $(x, z) \in \mathfrak{R}$.

Definición 1.27. Una relación de *equivalencia* es una relación binaria reflexiva, simétrica y transitiva. Se suele denotar por $x\mathfrak{R}y$ en vez de $(x, y) \in \mathfrak{R}$.

Definición 1.28. Dada $\mathfrak{R}$ una relación de equivalencia, se llama *clase de* x al conjunto $[x] = \{y \in X : x\mathfrak{R}y\}$. El *conjunto cociente* $X/\mathfrak{R}$, es el conjunto de todas las clases de equivalencia.

Proposición 1.11. *Algunas propiedades son:*

1) $x \in [x]$ (x se llama representante de su clase), luego $[x] \neq \emptyset$;

2) $x\mathfrak{R}y$ si y sólo si $[x] = [y]$;

3) $[x] \neq [y]$ si y sólo si $[x] \cap [y] = \emptyset$.

Definición 1.29. Una *partición* de X es una familia $\mathcal{P} = \{P_i : i \in I\}$ de subconjuntos no vacíos de X, tales que:

(i) $X = \bigcup\limits_{i \in I} P_i$, y

(ii) si $P_i \neq P_j$, entonces $P_i \cap P_j = \emptyset$.

Lema 1.12. *Es equivalente dar una partición de X que una relación de equivalencia sobre él.*

Definición 1.30. Existe una aplicación canónica, $p\colon X \longrightarrow X/\mathfrak{R}$, que asigna a cada elemento x su clase de equivalencia $p(x) = [x]$. Se llama *aplicación cociente* y es sobreyectiva. Una vez dada la aplicación cociente, cada clase de equivalencia en X es precisamente $p^{-1}(p(x))$.

Definición 1.31. Una relación $\leq$ sobre X es un *orden parcial* si es una relación reflexiva, antisimétrica y transitiva. Se dice también que X está *parcialmente ordenado*. El orden se llama *total*, si dos elementos cualesquiera de X son comparables por esta relación.

Definición 1.32. Si X está parcialmente ordenado por $\leq$, entonces:

(i) $a \in X$ se llama *elemento máximo* de X, si para cada $x \in X$, es $x \leq a$;

(ii) $a \in X$ es un *elemento maximal* de X, si $a \not\leq x$ para cada $x \neq a$;

(iii) $a \in X$ se llama *elemento mínimo* de X, si para cada $x \in X$, es $x \geq a$,

(iv) $a \in X$ es un *elemento minimal* de X, si $x \not\leq a$ para cada $x \neq a$.

Ejemplo 1.5. Si $X = \{a, b, c\}$ con el orden parcial $a \leq b$ y $a \leq c$, entonces b es un elemento maximal de X, pero no un máximo.

Definición 1.33. Un conjunto parcialmente ordenado en el cual todo $A \subset X$ no vacío posee un elemento mínimo, se llama conjunto *bien ordenado*. Por ejemplo, $(\mathbb{Z}, \leq)$ no está bien ordenado.

1.5. Propiedades de los números reales

$(\mathbb{R}, \leq)$ es un conjunto totalmente ordenado, donde $\leq$ denota el orden usual en $\mathbb{R}$.

Definición 1.34. Si $A \subset \mathbb{R}$, se tiene:

1) si $u \in \mathbb{R}$ es tal que $a \leq u$ para cada $a \in A$, se dice que u es una *cota superior* de A;

2) la menor de las cotas superiores de A (es decir, u es cota superior de A y para cada z cota superior de A es $z \geq u$) es el *supremo* de A, y se denota $\sup(A)$;

3) si $l \in \mathbb{R}$ es tal que $a \geq l$ para cada $a \in A$, se dice que l es una *cota inferior* de A;

4) la mayor de las cotas inferiores de A (es decir, l es cota inferior de A y para cada z cota inferior de A es $z \leq l$) es el *ínfimo* de A, y se denota $\text{ínf}(A)$.

Teorema 1.13. ***(Axioma de la cota superior)*** *Si $A \subset \mathbb{R}$ está acotado superiormente (es decir, existe $M \in \mathbb{R}$, tal que $M \geq a$, para cada $a \in A$), existe el supremo de A. Y en tal caso, $s = \sup(A)$ si y sólo si:*

(i) para cada $a \in A$, es $a \leq s$, y

(ii) para todo $\varepsilon > 0$, existe $a_\varepsilon \in A$ tal que $a_\varepsilon > s - \varepsilon$.

Del axioma anterior, se deduce que:

Corolario 1.14. *Si $A \subset \mathbb{R}$ está acotado inferiormente (es decir, existe $m \in \mathbb{R}$, tal que $m \leq a$, para cada $a \in A$), existe el ínfimo de A. Y entonces, $i = \text{ínf}(A)$ si y sólo si:*

(i) para cada $a \in A$, es $a \geq i$, y

(ii) para todo $\varepsilon > 0$, existe $a_\varepsilon \in A$ tal que $a_\varepsilon < i + \varepsilon$.

Teorema 1.15. *$\mathbb{R}$ es arquimediano, es decir, el conjunto $\mathbb{N}$ no está acotado superiormente.*

Demostración: Si lo estuviera, existiría $r_0 \in \mathbb{R}$, tal que $n \leq r_0$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Pero $n_0 = [r_0] + 1 \in \mathbb{N}$, y $n_0 \not\leq r_0$. ∎

Del teorema 1.15 se deducen inmediatamente:

Corolario 1.16. ***(Propiedad arquimediana)*** *Para todo $x > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$, tal que $0 < \frac{1}{n} < x$.*

Corolario 1.17. ***(Densidad de los racionales)*** *Dados dos números reales $x < y$, existe $r \in \mathbb{Q}$, tal que $x < r < y$.*

Demostración: Por la propiedad arquimediana (corolario 1.16), existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n_0} < y - x$. El conjunto $\mathbb{M} = \{m \in \mathbb{N} : x < \frac{m}{n_0}\}$ es no vacío y está bien ordenado, es decir, existe $m_0 \in \mathbb{M}$ tal que $x < \frac{m_0}{n_0}$ y $x \geq \frac{m_0 - 1}{n_0}$. Es inmediato probar que además $\frac{m_0}{n_0} < y$. ∎

Corolario 1.18. ***(Propiedad de los intervalos de encaje)*** *Dada* $\{[a_n, b_n] : n \in \mathbb{N}\}$*, una familia de intervalos cerrados y encajados (es decir, si* $n \leq m$*, es* $[a_m, b_m] \subset [a_n, b_n]$*), entonces* $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n] \neq \emptyset$*.*

Demostración: Para cada $m, n \in \mathbb{N}$, es $a_n < b_m$, luego para todo $m \in \mathbb{N}$, b_m es cota superior del conjunto $A = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Si $p = \sup(A)$, es claro que $p \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n]$. ∎

1.6. Cardinalidad de conjuntos

Definición 1.35. Dos conjuntos se llaman *equipotentes*, si existe una correspondencia biyectiva entre ellos.

Definición 1.36. X se dice *finito* si existe $n \in \mathbb{N}$, tal que X es equipotente a $\{1, \cdots, n\}$. X es *infinito*, si no es finito, lo cual equivale a decir que es equipotente a un subconjunto propio de sí mismo. X es *numerable* si es equipotente a $\mathbb{N}$ y es *contable* si es finito o numerable.

Observación 1.3. Dos conjuntos finitos son equipotentes si y sólo si poseen el mismo número de elementos. No sucede lo mismo si X es infinito: $\mathbb{N}$ es equipotente al conjunto $\mathbb{P}$ de los números pares, y sin embargo $\mathbb{P} \subset \mathbb{N}$.

Lema 1.19. *La relación de equipotencia es una relación de equivalencia.*

Definición 1.37. A cada clase de equipotencia se le puede asignar un *número cardinal*, que es un objeto matemático ω tal que existe un conjunto X con $Card(X) = \omega$.

Definición 1.38. Un conjunto A es *de potencia menor o igual* que B, si existe una aplicación $f\colon A \longrightarrow B$ inyectiva, con lo cual $Card(A) \leq Card(B)$ (equivalentemente, si existe una aplicación $f\colon B \longrightarrow A$ sobreyectiva).

Definición 1.39. Dados dos números cardinales ω_1 y ω_2, se dice que $\omega_1 \leq \omega_2$, si existen conjuntos X e Y con $Card(X) = \omega_1$ y $Card(Y) = \omega_2$ y tales que la potencia de X es menor o igual a la potencia de Y. Se trata de una relación de orden. Si $\omega_1 \leq \omega_2$ y $\omega_1 \neq \omega_2$, se dice que ω_1 es estrictamente menor que ω_2.

Proposición 1.20. *Se verifican las siguientes propiedades:*

1) si X *es contable y* $A \subset X$*, entonces* A *es contable;*

2) si X *no es contable y* $X \subset Y$*, entonces* Y *no es contable;*

3) si X *es infinito, existe* $A \subset X$*, numerable y propio.*

Teorema 1.21. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *es numerable.*

Demostración: Se define la siguiente relación binaria: dados $(m_1, n_1), (m_2, n_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $(m_1, n_1) \prec (m_2, n_2)$ si:

1) $m_1 + n_1 < m_2 + n_2$, o

2) $m_1 + n_1 = m_2 + n_2$ y $m_1 < m_2$.

$\preceq$ es un orden total, gracias al cual se pueden escribir los elementos de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ en una lista. La aplicación $f \colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ dada por $f(m, n) = \frac{1}{2}(m+n-1)(m+n-2)+m$, asigna a cada elemento $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ el lugar que ocupa en esta lista, y es por lo tanto una biyección. ∎

Corolario 1.22. *Del teorema 1.21 se deduce:*

1) el producto cartesiano de una familia finita de conjuntos contables, es contable;

2) la unión de una familia contable de conjuntos contables es contable;

3) $\mathbb{Z}$ *y* $\mathbb{Q}$ *son numerables.*

Demostración: Para probar 3), basta con usar 2). $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup -\mathbb{N}$. Además, $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ se puede escribir como la unión numerable $\mathbb{Q} = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n$, donde $A_n = \{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}\}$, que es equipotente a $\mathbb{Z}$. ∎

Contraejemplo 1.3. $\mathbb{R}$ no es numerable.

Demostración: Basta con demostrar que $[0, 1]$ no es numerable. Si lo fuera, se escribiría $[0, 1] = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Se construye una sucesión de intervalos encajados del modo siguiente: x_1 no puede pertenecer a los tres intervalos $\left[0, \frac{1}{3}\right]$, $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$ y $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$. Sea $I_1 = [a_1, b_1]$ uno de estos tres intervalos, tal que $x_1 \notin I_1$. Se divide I_1 en tres intervalos de amplitud $\frac{1}{9}$: $\left[a_1, a_1 + \frac{1}{3}\right]$, $\left[a_1 + \frac{1}{3}, a_1 + \frac{2}{3}\right]$ y $\left[a_1 + \frac{1}{3}, b_1\right]$. De nuevo, existe uno de ellos $I_2 \subset I_1$, tal que $x_2 \notin I_2$. Se continúa de manera inductiva, obteniendo una sucesión de intervalos encajados $\{I_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, cada I_n de longitud $\frac{1}{3^n}$ y tal que $x_n \notin I_n$. Por la propiedad de los intervalos de encaje (corolario 1.18), existe $p \in \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} I_n \subset [0, 1]$, lo que es imposible. ∎

El $Card(\emptyset) = 0$, es el cardinal mínimo. Sin embargo no existe un cardinal máximo, ya que:

Teorema 1.23. ***(de Cantor)*** *Para cada conjunto* X*,* $Card(X) < Card(\mathcal{P}(X))$*.*

Demostración: Si $X = \emptyset$, $Card(\mathcal{P}(X)) = 1$, pues $\mathcal{P}(X) = \{\emptyset\}$. Si $X \neq \emptyset$, es obvio que $Card(X) \leq Card(\mathcal{P}(X))$, porque la aplicación $h\colon X \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ definida por $h(x) = \{x\}$ es inyectiva. Supongamos que $Card(X) = Card(\mathcal{P}(X))$, es decir, existe una aplicación $f\colon X \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ biyectiva. Sea $A = \{x \in X : x \notin f(x)\} \in \mathcal{P}(X)$. Como f es sobreyectiva, existe $x_0 \in X$ tal que $f(x_0) = A$. Si $x_0 \in A$, esto significaría que $x_0 \notin f(x_0) = A$, lo cual es imposible. Luego, es $x_0 \notin A$, lo cual significa que $x_0 \in f(x_0) = A$, imposible de nuevo. ∎

En particular, $Card(\mathbb{N}) = \aleph_0 < Card(\mathcal{P}(\mathbb{N})) = 2^{\aleph_0}$ (notación que proviene de la propiedad descrita en el ejercicio 9 del apartado 1.7). Puede probarse que $2^{\aleph_0} = Card(\mathbb{R}) = c$, que se llama el *cardinal del continuo*. De aquí se concluye que $\aleph_0 < c$.

Desde principios de siglo, se ha intentado en vano establecer si existe un número cardinal $\aleph_1$, entre $\aleph_0$ y c. Georg Cantor (1845-1918) hace la siguiente conjetura:

Teorema 1.24. ***(Hipótesis del continuo)*** *$c = \aleph_1$, es decir, no existe ningún conjunto A, tal que $\aleph_0 < Card(A) < c$.*

Paul Joseph Cohen (1934-2007) establece en 1963 que la hipótesis del continuo es indecidible: añadiendo como axioma su veracidad o su falsedad, los fundamentos de la Matemática siguen siendo coherentes.

1.7. Ejercicios

1.- Con ayuda del lenguaje simbólico, decidir si son correctas las siguientes deducciones:

a) Los gusanos reptan. Todo lo que repta se mancha. Luego, los gusanos están sucios.

b) Si aumenta la temperatura o cae un meteorito, los osos polares morirán de hambre. Se sabe que los osos polares van a sobrevivir, por lo tanto, caerá pronto un meteorito.

c) Ninguna pelota de tenis es de cristal. Ningún objeto de cristal es indestructible. Luego, ninguna pelota de tenis es indestructible.

d) Si se abandona la utilización de gasolina o se incrementa el uso de energía solar, la contaminación disminuirá. Si se abandona el uso de gasolina, el país entrará en crisis. La utilización de la energía solar no aumentará, a no ser que no haya crisis. Por lo tanto, la contaminación no va a disminuir.

e) Los profesores son sádicos. Algunos sádicos usan látigo. Por lo tanto, algunos profesores usan látigo.

f) Los caramelos son dulces. Ningún alimento dulce contiene sal. Luego, los caramelos no contienen sal.

g) Los pájaros silban. Algunos habitantes de Euskadi son pájaros. Luego, algunas criaturas de Euskadi silban.

h) Si no trabajo duro, me dormiré. Si estoy preocupado, no dormiré. Por lo tanto, si estoy preocupado, trabajaré duro.

i) Las nubes son esponjosas. Algunos objetos esponjosos son rosas. Luego, algunas nubes son rosas.

j) Los osos polares tocan el violín. Los violinistas no vuelan. Por lo tanto, los osos polares no vuelan.

k) Las tortugas ven CSI-Las Vegas. Algunas criaturas de Gálapagos son tortugas. Por lo tanto, algunos habitantes de Galápagos ven CSI-Las Vegas.

l) Las polillas salen de noche. Algunos caminantes nocturnos son vampíros. Por lo tanto, las polillas son vampíros.

m) Si Thor se enfada, hay tormentas. Está comenzando una tormenta. Por lo tanto, Thor está enfadado.

n) Si en Marte hubiera grandes cantidades de agua, podría haber vida. No hay grandes extensiones de agua en Marte. Por lo tanto, no hay vida en Marte.

ñ) Los buenos políticos son honestos. Juan es honesto. Juan sería un buen político.

o) Algunas personas no beben café. Los matemáticos son humanos. Por lo tanto, algunos matemáticos no beben café.

p) Ningún elefante sabe tricotar. Yo no sé tricotar. Luego, soy un elefante.

q) Algunos poetas son nerviosos. Hay gente nerviosa que se come las uñas. Luego, algunos poetas se comen las uñas.

r) Si hago estos ejercicios, aprenderé lógica. Ya he terminado de hacerlos... ¡Sé lógica!

2.- Negar los siguientes enunciados:

a) Los políticos son gordos y feos.

b) Hay un matemático que sabe sumar.

c) Algunas personas de Sevilla tienen paraguas.

d) El Athletic de Bilbao ganará la Liga de fútbol.

e) Nadie en Euskadi habla swahili.

f) Al menos dos faraones egipcios eran ciegos.

g) Como mucho, la mitad de los números: 1, 2, 3, 4, 5, 6, son pares.

h) A veces, llueve en El Sahara.

i) Siempre hace frío en Groenlandia.

j) Ni Alejandro Magno, ni Julio César eran pelirrojos.

k) $x \in A$ o $x \in B$.

l) $x \in A$ y $x \in B$.

m) $x \in A$, pero $x \notin B$.

n) $A \subset B$.

ñ) para cada $i \in I$, es $x \in A_i$.

o) existe $i \in I$, tal que $x \in A_i$.

3.- Sea X el conjunto de los estudiantes de la Facultad de Ciencia y Tecnología de la UPV/EHU, H el conjunto de los hombres, M el de la mujeres, C el de los estudiantes que van en coche a la Universidad, A el de los estudiantes que van en autobús a la Universidad, E el de los estudiantes de Matemáticas y F el de los estudiantes de Físicas. Describir los siguientes conjuntos: $X - H$, $X - M$, $X - C$, $X - A$, $X - E$, $X - F$, $H \cap C$, $H \cap A$, $H \cap E$, $H \cap F$, $M \cap C$, $M \cap A$, $M \cap E$, $M \cap F$, $C \cap A$, $C \cap E$, $C \cap F$, $A \cap E$, $A \cap F$, $E \cap F$, $M \cup H$, $H - M$, $H - C$, $H - A$, $H - E$, $H - F$, $H - M$, $M - H$, $M - C$, $M - A$, $M - E$, $M - F$, $C - A$, $C - E$, $C - F$, $A - C$, $A - M$, $A - H$, $A - E$, $A - F$, $E - H$, $E - M$, $E - C$, $E - A$ y $E - F$.

4.- Cuatro compañeros han faltado a la clase de Matemáticas en el Instituto. Delante del Jefe de Estudios y en presencia de su profesor, se defienden del modo siguiente:

Pedro: "No he faltado."
Elena: "Lo admito, he faltado, pero estaba con Juan."
Juan: "Yo también he faltado; pero no estaba con Elena, sino con Pedro."
María: "Yo estaba en clase, pero no he visto a Pedro."
El profesor: "Estaba concentrado en mis cosas, pero he visto a Pedro en clase."

¿Puedes ayudar al Jefe de Estudios, sabiendo que sólo tres de estas sentencias son ciertas?

5.- Traducir las siguientes frases del lenguaje natural en un lenguaje simbólico utilizando una o varias propiedades $\mathfrak{P}$. Negar cada enunciado y traducirlo al lenguaje natural:

a) No hay amor feliz.

b) Una puerta está abierta o cerrada.

c) Ser o no ser.

d) Las verdades son fáciles de decir.

e) Prefiero la poesía a la novela histórica.

6.- Probar la siguiente propiedad: Si $x \in \mathbb{R}$ y para cada $\varepsilon > 0$, es $|x| < \varepsilon$, entonces $x = 0$.

7.- Dado el conjunto $A = \{a, b\}$, ¿son válidas las siguientes expresiones?
(i) $a \in A$; (ii) $\{a\} \in A$; (iii) $\emptyset \in A$; (iv) $\{a\} \in \mathcal{P}(A)$; (v) $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$.

8.- Sean A, B y C tres conjuntos finitos, de cardinales a, b y c, respectivamente. Sea $p = Card(A \cap B)$, $q = Card(B \cap C)$, $r = Card(A \cap C)$ y $s = Card(A \cap B \cap C)$. Calcular el cardinal de $A \cup B$, $A \cup C$, $B \cup C$ y $A \cup B \cup C$.

9.- Se pide:

a) calcular $\mathcal{P}(X)$, si $X = \{1, 2\}$, $X = \{\emptyset\}$ y $X = \{1, 2, 3, 4\}$;

b) probar que si $Card(X) = n$, entonces $Card(\mathcal{P}(X)) = 2^n$;

c) probar que si $A \subset B$, entonces $\mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B)$. ¿Es cierto el recíproco?

10.- Si $A, B \subset X$, probar que son equivalentes las siguientes expresiones:

(i) $A \subset B$; (ii) $A \cap B = A$; (iii) $A \cup B = B$;

(iv) $B^c \subset A^c$; (v) $A \cap B^c = \emptyset$; (vi) $B \cup A^c = X$.

11.- Probar las propiedades siguientes para conjuntos, dando un contraejemplo en el caso de inclusión estricta:

a) $A \cup \left(\bigcup_{i \in I} B_i \right) = \bigcup_{i \in I} (A \cup B_i)$; b) $A \cap \left(\bigcap_{i \in I} B_i \right) = \bigcap_{i \in I} (A \cap B_i)$;

c) $A \cup \left(\bigcap_{i \in I} B_i \right) = \bigcap_{i \in I} (A \cup B_i)$; d) $\bigcap_{i \in I} A_i \cap \bigcap_{j \in J} B_j = \bigcap_{(i,j) \in I \times J} (A_i \cap B_j)$;

e) $\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \cup \left(\bigcap_{j\in J} B_j\right) = \bigcap_{(i,j)\in I\times J} (A_i \cup B_j)$; f) $\bigcap_{(i,j)\in I^2} (A_i \cup B_j) \subset \bigcap_{i\in I} (A_i \cup B_i)$;

g) $\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \cup \left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) \subset \bigcap_{i\in I} (A_i \cup B_i)$; h) $\bigcup_{i\in I} (A_i \cap B_i) \subset \bigcup_{(i,j)\in I^2} (A_i \cap B_j)$;

i) $\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \times \left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) = \bigcup_{(i,j)\in I\times J} (A_i \times B_j)$;

j) $\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \times \left(\bigcap_{j\in J} B_j\right) = \bigcap_{(i,j)\in I\times J} (A_i \times B_j)$;

k) $\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \times \left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) = \bigcap_{i\in I} (A_i \times B_i)$;

l) $\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) - \left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) = \bigcup_{i\in I} \bigcap_{j\in J} (A_i - B_j)$;

m) $\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) - \left(\bigcap_{j\in J} B_j\right) = \bigcap_{i\in I} \bigcup_{j\in J} (A_i - B_j)$.

12.- Para cada uno de los siguientes conjuntos de índices I y cada familia dada de conjuntos indicados por I, hallar los conjuntos pedidos:

a) si $I = \mathbb{R}^2$ y para cada $p \in I$, $S_p = \{p\}$, hallar $\bigcup_{p\in I} S_p$;

b) si $I = (0, \infty)$ y para cada $x \in I$, $C_x = [0, x]$, hallar $\bigcup_{x\in I} C_x$ y $\bigcap_{x\in I} C_x$;

c) si $I = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ y para cada $r \in I$, B_r es el círculo de radio r y centro $(0, 0)$, hallar $\bigcup_{r\in I} B_r$ y $\bigcap_{r\in I} B_r$;

d) si $I = (0, 1)$ y para cada $r \in I$, N_r es el interior del círculo de radio r y centro $(0, 0)$, hallar $\bigcup_{r\in I} N_r$ y $\bigcap_{r\in I} N_r$;

e) si $I = [1,2]$ y para cada $x \in I$, $A_x = [\frac{x}{2}, \frac{3x}{2}]$, hallar $\bigcup\limits_{x\in I} A_x$ y $\bigcap\limits_{x\in I} A_x$;

f) si $I = \mathbb{N}$ y para cada $n \in I$, $A_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$, hallar $\bigcup\limits_{n\in I} A_n$ y $\bigcap\limits_{n\in I} A_n$;

g) si $I = \mathbb{N}$ y para cada $n \in I$, $B_n = (\frac{1}{n}, 1]$, hallar $\bigcup\limits_{n\in I} B_n$ y $\bigcap\limits_{n\in I} B_n$;

h) si $I = \mathbb{N}$ y para cada $n \in I$, $C_n = (-n, n)$, hallar $\bigcup\limits_{n\in I} C_n$ y $\bigcap\limits_{n\in I} C_n$.

13.- Dados $A, B \subset X$, probar:

a) $\chi_{A\cap B} = \chi_A{\cdot}\chi_B$; b) $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A\cap B}$;

c) $\chi_{A-B} = \chi_A - \chi_{A\cap B}$; d) $\chi_{A^c} = 1 - \chi_A$.

14.- Sean $f\colon X \longrightarrow Y$ y $g\colon Y \longrightarrow Z$ dos aplicaciones. Probar:

a) si f y g son sobreyectivas, entonces $g \circ f$ también lo es, pero el recíproco no es cierto;

b) si $g \circ f$ es sobreyectiva, entonces g también lo es, pero el recíproco no es cierto;

c) si $g \circ f$ es sobreyectiva y g es inyectiva, entonces f es sobreyectiva;

d) si f y g son inyectivas, entonces $g \circ f$ también lo es, pero el recíproco no es cierto;

e) si $g \circ f$ es inyectiva, entonces f también lo es, pero el recíproco no es cierto;

f) si $g \circ f$ es inyectiva y f es sobreyectiva, entonces g es inyectiva.

15.- Sea $f\colon X \longrightarrow Y$; probar:

a) si existe $g\colon Y \longrightarrow X$, tal que $g \circ f = 1_X$, entonces f es inyectiva;

b) si existe $h\colon Y \longrightarrow X$, tal que $f \circ h = 1_Y$, entonces f es sobreyectiva;

c) f es biyectiva si y sólo si existen $g, h\colon Y \longrightarrow X$, tales que $g \circ f = 1_X$, $f \circ h = 1_Y$ y en tal caso $h = f^{-1} = g$.

16.- Sean dos conjuntos X_1, X_2 y para cada $i \in \{1,2\}$, $A_i \subset X_i$. Sea $p_i\colon X_1 \times X_2 \longrightarrow X_i$ la i-ésima proyección coordenada. Probar las siguientes propiedades:

a) $A_1 \times X_2 = p_1^{-1}(A_1)$, $X_1 \times A_2 = p_2^{-1}(A_2)$ y $A_1 \times A_2 = p_1^{-1}(A_1) \cap p_2^{-1}(A_2)$;

b) si $A \subset X_1 \times X_2$, entonces $A \subset p_1(A) \times p_2(A)$;

c) $p_i\,(A_1 \times A_2) = A_i$ $(i \in \{1, 2\})$.

17.- Sean $f, g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, dadas por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 2 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad g(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si} \quad x \geq 0 \\ x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

Se pide:

a) estudiar las funciones $f \circ g$, $f \circ f$, $g \circ g$, $g \circ f$, si tienen sentido;

b) estudiar el carácter sobreyectivo e inyectivo de f, g, $f \circ g$ y $g \circ f$;

c) calcular $f(-5, 5]$, $g(-5, 5]$, $f^{-1}(-5, 5]$ y $g^{-1}(-5, 5]$.

18.- Hacer lo mismo que en el ejercicio anterior para las funciones: $f\colon \mathbb{Z}^2 \longrightarrow \mathbb{Z}$ y $g\colon \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}^2$ dadas por: $f(x, y) = x^2 + y$ y $g(x) = (x, -2x)$.

19.- Sea $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si} \quad x < 0 \\ 1 & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 2 \\ x - 1 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

Se pide:

a) estudiar si f es inyectiva o sobreyectiva;

b) calcular $f((1, 3))$, $f([-2, 2])$, $f^{-1}((0, 1))$, $f^{-1}([-4, 4])$;

c) si $g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es la aplicación $g(x) = |x|$, determinar $f \circ g$ y calcular $(f \circ g)^{-1}((-2, 5])$.

20.- Probar que la aplicación $f\colon \mathbb{R} - \{2\} \longrightarrow \mathbb{R} - \{1\}$, definida por: $f(x) = \frac{x+2}{x-2}$ es biyectiva y calcular f^{-1}.

21.- Calcular $f(A_i)$ y $f^{-1}(B_i)$ $(i \in \{1, 2\})$, para $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, donde:

a) $f(x) = x^2$, $A_1 = (0, 2)$, $B_1 = (0, 4)$ y $B_2 = (-1, 0)$;

b) $f(x) = x^4$, $A_1 = (0, 2)$, $A_2 = \emptyset$, $B_1 = (0, 16]$ y $B_2 = (-1, 0]$;

c) $f(x) = \frac{1}{x}$ (para $x > 0$), $A_1 = \mathbb{N}$, $B_1 = \{x \in \mathbb{R} : x > 2\}$ y $B_2 = \mathbb{N}$;

d) $f(x) = x^3 - 3x$, $A_1 = [0, \infty)$, $B_1 = (0, 2)$ y $B_2 = \{2\}$.

22.- Dados $x, y \in \mathbb{R}$, utilizando el carácter arquimediano de $\mathbb{R}$, probar:

a) si $x > 0$ e $y > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$, tal que $nx > y$;

b) si $x > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$, tal que $0 < \frac{1}{n} < x$;

c) si $x > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$, tal que $n - 1 \leq x < n$.

Capítulo 2

Espacios topológicos

A lo largo de casi toda la historia de las matemáticas, han ido apareciendo estructuras y especialidades motivadas por la necesidad de resolver problemas cuantitativos. Por ello, dichas estructuras u objetos matemáticos tenían cierta rigidez, forzados por el problema de la medida que intentaban resolver. Hasta hace unos doscientos años, ningún matemático se interesaba por las propiedades cualitativas de los objetos a los que dedicaba su atención. Estas propiedades fueron apareciendo, por un lado, como simples observaciones a la existencia de cualidades que no dependían de las magnitudes y que permitían distinguir diversos objetos entre sí. Por otra parte, se hicieron necesarios al surgir el cálculo infinitesimal como técnica que obligaba a considerar correctamente y formalizar las nociones vagas de *proximidad* y *continuidad*. Estos dos caminos, unas veces independiente y otras conjuntamente, desembocaron a principios del siglo XX en la definición correcta de proximidad, continuidad y propiedad cualitativa, es decir, se encontró un objeto matemático, *un espacio topológico*, en el que los anteriores conceptos tenían su verdadero significado y donde todas las intuiciones de las que se había partido encontraban un tratamiento riguroso.

En este curso se trata de exponer alguna de esas propiedades cualitativas que, haciendo abstracción de toda medida y magnitud, son el fundamento de la topología.

2.1. Definición de topología

La noción de topología es una generalización de algunas de las propiedades que poseen los intervalos abiertos en la recta real, propiedades independientes de otras presentes en $\mathbb{R}$ como la suma, el orden o la distancia.

Definición 2.1. Una *topología* sobre un conjunto X es una familia $\tau \subset \mathcal{P}(X)$ verificando:

(i) $\emptyset, X \in \tau$,

(ii) si $A, B \in \tau$, entonces $A \cap B \in \tau$,

(iii) si $\{A_i\}_{i\in I} \subset \tau$, entonces $\bigcup\limits_{i\in I} A_i \in \tau$.

Los elementos de τ se llaman *abiertos* y el par (X, τ) es un *espacio topológico*.

Ejemplos 2.1. Se introducen algunos ejemplos fundamentales:

1) sobre X, $\tau_{ind} = \{\emptyset, X\}$ es la topología *indiscreta*;

2) sobre X, $\tau_{dis} = \mathcal{P}(X)$ es la topología *discreta*;

3) si X es infinito, $\tau_{cof} = \{\emptyset\} \cup \{A \subset X : X - A \text{ es finito}\}$ es la topología *cofinita*;

4) si X es infinito no contable, $\tau_{coc} = \{\emptyset\} \cup \{A \subset X : X - A \text{ es contable}\}$ es la topología *cocontable*;

5) si $X = \{a, b\}$, $\tau_{sier} = \{\emptyset, X, \{a\}\}$ es la topología *de Sierpinski*;

6) si X y $A \subset X$, $\tau_A = \{\emptyset\} \cup \{B \subset X : A \subset B\}$ es la topología A-*inclusión* (observar que $\tau_\emptyset = \tau_{dis}$ y $\tau_X = \tau_{ind}$);

7) si X y $A \subset X$, $\tau^A = \{X\} \cup \{B \subset X : A \cap B = \emptyset\}$ es la topología A-*exclusión* (observar que $\tau^\emptyset = \tau_{dis}$ y $\tau^X = \tau_{ind}$);

8) $\tau_{kol} = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{(a, \infty) : a \in \mathbb{R}\}$ es la topología de *Kolmogorov* sobre $\mathbb{R}$, y el par $(\mathbb{R}, \tau_{kol})$ es la *recta de Kolmogorov*;

9) $\tau_{sca} = \{U \subset \mathbb{R} : U = A \cup B : A \in \tau_u, B \subset \mathbb{I}\}$ es la topología *"scattered"(esparcida)* sobre $\mathbb{R}$, y el par $(\mathbb{R}, \tau_{sca})$ es la *recta "scattered"*;

10) los *espacios métricos* son espacios topológicos (ver 2.5, problema 6), por ejemplo la recta real $(\mathbb{R}, \tau_u)$.

Observación 2.1. Sobre un mismo conjunto se pueden definir distintas topologías, como se ha visto en los ejemplos 2.1.

Definición 2.2. Dadas τ_1 y τ_2 dos topologías sobre X, se dice que τ_1 es *menos fina* que τ_2 (o que τ_2 es *más fina* que τ_1), si $\tau_1 \subset \tau_2$. Si $\tau_1 \subset \tau_2$ o $\tau_2 \subset \tau_1$, se dice que las topologías son *comparables*.

Ejemplos 2.2. Algunos ejemplos de topologías comparables son:

1) para cada X y toda topología τ sobre él, es $\tau_{ind} \subset \tau \subset \tau_{dis}$;

2) sobre $\mathbb{R}$, es $\tau_{cof} \subset \tau_u$ y $\tau_{cof} \subset \tau_{coc}$; pero τ_{coc} y τ_u no son comparables;

3) sobre $\mathbb{R}$, $\tau_{kol} \subset \tau_u \subset \tau_{sca}$.

2.2. Conjuntos abiertos y cerrados

Definición 2.3. En (X, τ), un conjunto $A \subset X$ se dice *cerrado*, si su complementario $X - A \in \tau$. Denotamos por $\mathcal{C}$ a la familia de cerrados en (X, τ).

El concepto de conjunto cerrado es así *dual* de la noción de conjunto abierto, y una topología puede especificarse a través de la familia de sus conjuntos cerrados $\mathcal{C}$, tomando complementarios.

Lema 2.1. *En (X, τ), la familia de cerrados $\mathcal{C}$ verifica:*

(i) $\emptyset, X \in \mathcal{C}$,

(ii) si $F, G \in \mathcal{C}$, entonces $F \cup G \in \mathcal{C}$,

(iii) si $\{F_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{C}$, entonces $\bigcap\limits_{i \in I} F_i \in \mathcal{C}$.

Demostración: Basta con pasar al complementario y usar la definición 2.1. ∎

Ejemplos 2.3. En los ejemplos anteriores de topologías, tenemos

1) en (X, τ_{ind}), es $\mathcal{C}_{ind} = \{\emptyset, X\}$;

2) en (X, τ_{dis}), es $\mathcal{C}_{dis} = \mathcal{P}(X)$;

3) si X es infinito, $\mathcal{C}_{cof} = \{\emptyset\} \cup \{A \subset X : A \text{ es finito}\}$;

4) si X es infinito no contable, $\mathcal{C}_{coc} = \{\emptyset\} \cup \{A \subset X : A \text{ es contable}\}$;

5) si $X = \{a, b\}$, $\mathcal{C}_{sier} = \{\emptyset, X, \{b\}\}$;

6) si X y $A \subset X$, $\mathcal{C}_A = \tau^A$;

7) si X y $A \subset X$, $\mathcal{C}^A = \tau_A$;

8) $\mathcal{C}_{kol} = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{(-\infty, a] : a \in \mathbb{R}\}$;

9) $\mathcal{C}_{sca} = \{U \subset \mathbb{R} : B = F \cap H : F \in \mathcal{C}_{us}, \mathbb{Q} \subset H\}$.

Observación 2.2. La propiedad de ser abierto o cerrado es independiente la una de la otra. Un conjunto puede ser simultáneamente abierto y cerrado, abierto y no cerrado, cerrado y no abierto o ninguna de las dos propiedades.

2.3. Base y subbase de una topología

Hay topologías que poseen demasiados abiertos y a veces es difícil especificarlos todos. Por ello, se introduce el siguiente concepto:

Definición 2.4. En (X, τ), una familia $\beta \subset \tau$ es una *base* de τ, si para todo $U \in \tau$ y para cada $x \in U$, existe $B \in \beta$, tal que $x \in B \subset U$. Los elementos de β se llaman *abiertos básicos*.

Lema 2.2. *Si β es base de τ, todo abierto puede escribirse como unión de abiertos básicos.*

Demostración: Para $U \in \tau$ y $x \in U$, existe $B_x \in \beta$, tal que $x \in B_x \subset U$. Claramente, es $U = \bigcup\limits_{x \in U} B_x$. ∎

Teorema 2.3. *Si $\beta \subset \mathcal{P}(X)$, β es base de alguna topología τ_β sobre X, si y sólo si:*

(i) $X = \bigcup\limits_{B \in \beta} B$, y

(ii) para cada $B_1, B_2 \in \beta$ y cada $x \in B_1 \cap B_2$, existe $B_3 \in \beta$ tal que $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

Y, en tal caso, $\tau_\beta = \{U \subset X : \text{ existe } \{B_i\}_{i \in I} \subset \beta : U = \bigcup\limits_{i \in I} B_i\}$.

Ejemplos 2.4. Algunos ejemplos de bases de topología son:

1) una topología es obviamente base de sí misma;

2) sobre X, $\beta_{ind} = \{X\}$ es base de la topología indiscreta;

3) sobre X, $\beta_{dis} = \{\{x\} : x \in X\}$ es base de la topología discreta. Además, $\beta = \{[a, b] : a, b \in \mathbb{R}\}$ es base de la topología discreta sobre $\mathbb{R}$;

4) si $A \subset X$, $\beta_A = \{A \cup \{x\} : x \in X\}$ es base de la topología A-inclusión τ_A;

5) si $A \subset X$, $\beta^A = \{\{x\} : x \in X - A\} \cup \{X\}$ es base de la topología A-exclusión τ^A;

6) $\beta_1 = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$, $\beta_2 = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{Q}\}$ y $\beta_3 = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{I}\}$ son bases de la topología usual sobre $\mathbb{R}$;

7) $\beta_{sor} = \{[a, b) : a < b, a, b \in \mathbb{R}\}$ es base para *una* topología sobre $\mathbb{R}$, llamada *topología de Sorgenfrey*; el par $(\mathbb{R}, \tau_{sor})$ se llama *recta de Sorgenfrey*. Observar que $[a, b) \in \mathcal{C}_{sor}$, ya que $\mathbb{R} - [a, b) = (-\infty, a) \cup [b, +\infty) = \left(\bigcup\limits_{c<a} [c, a)\right) \cup \left(\bigcup\limits_{d>b} [b, d)\right)$, es decir, es unión de abiertos básicos.

Como se ha visto en los ejemplos 2.4, una topología puede generarse a través de diferentes bases. Esto sugiere la siguiente definición:

Definición 2.5. Dadas β_1 y β_2 dos bases para las topologías τ_1 y τ_2 sobre X, se dice que β_1 es *más fina* que β_2 ($\beta_1 \succeq \beta_2$), si $\tau_2 \subset \tau_1$. Y son bases *equivalentes* si $\tau_2 = \tau_1$.

Observación 2.3. Si β_1 y β_2 son bases equivalentes, no tienen porque coincidir. Por ejemplo, $\beta_1 = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{Q}\}$ y $\beta_2 = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{I}\}$ son bases de la topología usual sobre $\mathbb{R}$, pero no son iguales.

Se pueden comparar topologías sobre X conociendo sólo sus bases. Intuitivamente, cuanto más pequeños sean los elementos de la base, mayores serán las topologías inducidas:

Teorema 2.4. *Sean β_1 y β_2 bases para las topologías τ_1 y τ_2 sobre X, respectivamente. Entonces, $\tau_2 \subset \tau_1$ ($\beta_1 \succeq \beta_2$) si y sólo si para cada $B_2 \in \beta_2$ y cada $x \in B_2$, existe $B_1 \in \beta_1$, tal que $x \in B_1 \subset B_2$.*

Corolario 2.5. *Sean β_1 y β_2 bases para las topologías τ_1 y τ_2 sobre X, respectivamente. Entonces, $\tau_2 = \tau_1$ si y sólo si:*

(i) para cada $B_2 \in \beta_2$ y cada $x_2 \in B_2$, existe $B_1 \in \beta_1$, tal que $x_2 \in B_1 \subset B_2$, y

(ii) para cada $B_1 \in \beta_1$ y cada $x_1 \in B_1$, existe $B_2 \in \beta_2$, tal que $x_1 \in B_2 \subset B_1$.

Ejemplos 2.5. Aplicando este criterio, se comprueba que:

(i) $\tau_u \subset \tau_{sor}$ ya que para cada $(a, b) \in \beta_u$ y cada $x \in (a, b)$, existe $[x, b) \in \beta_{sor}$ tal que $x \in [x, b) \subset (a, b)$; y

(ii) $\tau_{sor} \not\subset \tau_u$, pues para $a \in [a, b) \in \beta_{sor}$, no existe $B \in \beta_u$ tal que $a \in B \subset [a, b)$.

A veces, también es útil disponer de la noción de subbase:

Definición 2.6. Una familia $\sigma \subset \mathcal{P}(X)$ es una *subbase* para alguna topología sobre X, si la familia de las intersecciones finitas de elementos de σ es una base para una topología sobre X.

Lema 2.6. *Si $\sigma \subset \mathcal{P}(X)$ verifica que $X = \bigcup_{S \in \sigma} S$, entonces es subbase para alguna topología sobre X.*

Ejemplos 2.6. Algunos ejemplos de subbases son:

1) $\sigma = \{(-\infty, a), (b, \infty) : a, b \in \mathbb{R}\}$ es subbase para τ_u sobre $\mathbb{R}$;

2) $\sigma = \{(-\infty, a], [b, \infty) : a, b \in \mathbb{R}\}$ es subbase para τ_{dis} sobre $\mathbb{R}$;

3) toda topología es subbase de sí misma.

2.4. Espacios de Fréchet y de Hausdorff

El axioma T_2 fue introducido en 1914 por Hausdorff. El axioma T_1 se atribuye a Fréchet. El propósito principal de los *axiomas de separación* (como T_1 y T_2), es el de hacer los puntos y los conjuntos de un espacio *topológicamente distinguibles*.

Definición 2.7. Un espacio (X,τ) es *de Fréchet* o T_1, si para cada par de puntos distintos $x\neq y$, existe $U\in\tau$ tal que $x\in U$ e $y\not\in U$.

Observación 2.4. Aunque no es necesario escribirlo a la hora de dar la definición, observar que si el espacio es de Fréchet y $x\neq y$, existe $U\in\tau$ tal que $x\in U$ e $y\not\in U$, pero también debe existir $V\in\tau$ tal que $y\in V$ y $x\not\in V$, ya que los papeles de x e y son reversibles.

Definición 2.8. Un espacio (X,τ) es *de Hausdorff* o T_2, si para cada par de puntos distintos $x\neq y$, existen abiertos disjuntos U y V, tales que $x\in U$ e $y\in V$. Se suele decir que U y V *separan* x e y.

Lema 2.7. *Si (X,τ) es T_2, entonces es T_1. El recíproco no es cierto.*

Observación 2.5. En las definiciones anteriores, pueden reemplazarse los abiertos por abiertos básicos.

Ejemplos 2.7. Para los espacios topológicos introducidos anteriormente:

1) τ_{dis}, τ_{sca}, τ_{sor} y las topologías metrizables (problema 6 en 2.5) son T_2 (luego T_1);

2) τ_{cof} y τ_{coc} son T_1, pero no T_2;

3) τ_{ind}, τ_{sier}, τ_{kol}, τ_A y τ^A (para $A\neq X,\emptyset$) no son T_1 (luego no son T_2).

Proposición 2.8. *Cualquier topología más fina que una T_1 (respectivamente, T_2), es T_1 (respectivamente, T_2).*

En muchas ocasiones, es más útil usar la siguiente caracterización de propiedad T_1:

Proposición 2.9. *(X,τ) es T_1 si y sólo si para cada $x\in X$, es $\{x\}\in\mathcal{C}$.*

Demostración: Si (X,τ) es T_1, para cada $y\neq x$, existe $U_y\in\tau$ tal que $x\not\in U_y$ e $y\in U_y$. Entonces, $\{x\}=\bigcap\limits_{y\neq x} X-U_y$, que es cerrado por el lema 2.1. Y recíprocamente, si $y\neq x$, existe $U=X-\{y\}\in\tau$ tal que $x\in U$ e $y\not\in U$. ∎

2.5. Problemas

1.- Sea $\{\tau_i\}_{i\in I}$ una familia de topologías sobre X. Se pide probar:

(i) $\bigcup\limits_{i\in I}\tau_i$ es subbase para una topología, $\sup(\tau_i)$, la menor que es más fina que cada τ_i;

(ii) $\bigcap\limits_{i\in I}\tau_i$ es una topología sobre X, $\text{ínf}(\tau_i)$, la mayor que es menos fina que cada τ_i;

(iii) si $X = \{a,b,c\}$, $\tau_1 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a,b\}\}$ y $\tau_2 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b,c\}\}$, encontrar $\sup\{\tau_1,\tau_2\}$ e $\text{ínf}\{\tau_1,\tau_2\}$.

2.- Una *base de cerrados* $\mathcal{F}$ en (X,τ) es una familia de cerrados, tal que todo cerrado en (X,τ) se puede escribir como la intersección de una subfamilia de elementos de $\mathcal{F}$. Se pide probar:

(i) $\mathcal{F}$ es base de cerrados en (X,τ) si y sólo si $\beta = \{X - C : C \in \mathcal{F}\}$ es base de τ;

(ii) $\mathcal{F}$ es base de cerrados para algún espacio topológico si y sólo si:

(a) si $C_1, C_2 \in \mathcal{F}$, $C_1 \cup C_2$ se escribe como intersección de elementos de $\mathcal{F}$, y

(b) $\bigcap\limits_{C\in\mathcal{F}} C = \emptyset$.

3.- Sea (X,τ) un espacio topológico, donde X es un conjunto infinito. Para cada subconjunto A infinito de X, se sabe que $A \in \tau$. Probar que $\tau = \tau_{dis}$.

4.- Dar un ejemplo de espacio topológico no discreto, en el que coincidan las familias de abiertos y cerrados.

5.- Describir todas las posibles topologías sobre un conjunto con dos o tres puntos. Estudiar cuales de entre ellas son T_1 o T_2.

6.- Un *espacio métrico* es un par (X,d), donde X es un conjunto y $d\colon X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función que satisface las siguientes propiedades:

(1) *positividad*: $d(x,y) \geq 0$, $\forall x, y \in X$,

(2) propiedad *idéntica*: $d(x,y) = 0$ si y sólo si $x = y$,

(3) propiedad *simétrica*: $d(x,y) = d(y,x)$, $\forall x, y \in X$,

(4) desigualdad *triangular*: $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$, $\forall x, y, z \in X$.

La función d se llama *métrica* sobre X. Si en vez de la propiedad idéntica, se verifica la propiedad (2*) $d(x,x) = 0$, para cada $x \in X$, entonces (X,d) se llama *espacio pseudométrico* y d es una *pseudométrica*.
Probar que los siguientes son espacios métricos:

(a) $(\mathbb{R}^n, d_u)$, donde $d_u(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}$, es la métrica *euclídea* de $\mathbb{R}^n$, siendo $x = (x_1, \cdots, x_n)$ e $y = (y_1, \cdots, y_n)$;

(b) $(\mathbb{R}^n, d_{\text{sum}})$, donde $d_{\text{sum}}(x,y) = \sum_{i=1}^{n}|x_i - y_i|$;

(c) $(\mathbb{R}^n, d_{\text{máx}})$, donde $d_{\text{máx}}(x,y) = \text{máx}\{|x_1 - y_1|, \cdots, |x_n - y_n|\}$;

(d) (X,d), donde $d(x,y) = 1$ si $x \neq y$ y $d(x,x) = 0$, es la *métrica discreta* sobre X.

Dado un espacio métrico (respectivamente, pseudométrico), $x \in X$ y $\varepsilon > 0$, se define la *bola abierta* de centro x y radio ε por $B(x,\varepsilon) = \{y \in X : d(x,y) < \varepsilon\}$. Y se dice que $A \subset X$ es *abierto* si para cada $x \in X$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(x,\varepsilon) \subset A$. Probar que la familia de los conjuntos abiertos, τ_d, es una topología sobre X (es decir, la familia $\beta = \{B(x,\varepsilon) : x \in X, \varepsilon > 0\}$ es base para τ_d), llamada *topología métrica* (respectivamente, *topología pseudométrica*).
Se dice que un espacio topológico (X,τ) es *metrizable* (respectivamente, *pseudometrizable*), si existe una métrica (respectivamente, una pseudométrica) d sobre X, tal que $\tau = \tau_d$. Se pide:

(i) ¿pueden distintas métricas en X generar la misma topología? En este caso, se dice que las métricas son *topológicamente equivalentes*;

(ii) probar que (X, τ_{ind}) no es metrizable, pero si pseudometrizable;

(iii) probar que todo espacio metrizable es T_1 y T_2 ¿es cierta esta propiedad para espacios pseudometrizables?

(iv) si $(X, \|.\|)$ es un espacio vectorial normado, queda definida una métrica $d_{\|.\|}$ sobre X por dados $x,y \in X$, $d_{\|.\|}(x,y) = \|x - y\|$.

7.- Probar que una partición $\mathcal{P}$ de X es base de alguna topología τ sobre X e identificarla.

$*$ **8.-** Sea X un conjunto infinito y $\tau_\infty = \{U \subset X : X - U \text{ es infinito}\} \cup \{X\}$. ¿Es τ_∞ una topología sobre X?

9.- Probar que en (X, τ) son equivalentes las siguientes condiciones:

(i) (X, τ) es T_1;

(ii) para cada $x \in X$, $\{x\} = \bigcap\{C \text{ cerrado} : x \in C\}$;

(iii) para cada $x \in X$, $\{x\} \in \mathcal{C}$;

(iv) para cada $A \subset X$, $A = \bigcap\{U \in \tau : A \subset U\}$.

$*$ **10.-** Sea X un conjunto finito. Si (X, τ) es T_1, probar que $\tau = \tau_{dis}$.

11.- Sea (X, τ) un espacio topológico T_2 y σ una subbase de τ. Si $x \neq y$, ¿se puede asegurar que existen $U, V \in \sigma$ tales que $x \in U$, $y \in V$ y $U \cap V = \emptyset$?

12.- Sea X un conjunto infinito y $\{\tau_i : i \in I\}$ la familia de todas las topologías T_2 sobre X. Probar que $\tau_{cof} = \inf_{i \in I} \tau_i$.

13.- Sea $(X, \leq)$ un conjunto totalmente ordenado. Para $\alpha, \beta \in X$, se consideran los conjuntos siguientes: $V_\alpha = \{x \in X : x < \alpha\}$, $B_\alpha = \{x \in X : x > \alpha\}$ y $M_{\alpha,\beta} = B_\alpha \cap V_\beta$. Se pide:

(i) probar que la familia $\beta = \{V_\alpha, B_\alpha, M_{\alpha,\beta} : \alpha, \beta \in X\}$ es una base para una topología τ_{ord} en X, llamada *topología del orden*. ¿Es (X, τ_{ord}) T_1? ¿Y T_2?;

(ii) probar que el conjunto $\{x \in X : \alpha \leq x \leq \beta\}$ es cerrado, para cada $\alpha, \beta \in X$;

(iii) si se toma $\mathbb{R}$ (respectivamente, $\mathbb{N}$) con el orden usual, ¿cuál es la topología del orden asociada sobre $\mathbb{R}$ (respectivamente, $\mathbb{N}$)?

(iv) en $[0,1] \times [0,1]$ se considera el *orden lexicográfico*: $(a_1, a_2) < (b_1, b_2)$ si y sólo si ($a_1 < b_1$ o $a_1 = b_1$ y $a_2 < b_2$). Probar que la topología del orden asociado no es comparable con la topología euclídea de $[0,1] \times [0,1]$;

(v) en $\{1,2\} \times \mathbb{N}$ con el orden lexicográfico, ¿cuál es la topología del orden inducida?

14.- Probar que la familia $\beta^* = \{(a,b) : a < b, a, b \in \mathbb{Q}\}$, es una base para la topología usual sobre $\mathbb{R}$. Sin embargo, demostrar que la familia $\beta' = \{[a,b) : a < b, a, b \in \mathbb{Q}\}$ genera una topología τ' sobre $\mathbb{R}$ estrictamente más fina que τ_u y estrictamente menos fina que τ_{sor}.

15.- En $\mathbb{R}$, se considera la colección $\tau = \{\mathbb{R}, \emptyset\} \cup \{(r, \infty) : r \in \mathbb{Q}\}$. Probar que si $S \subset \mathbb{R}$ está acotado inferiormente, es $\bigcup_{s \in S}(s, \infty) = (\inf(S), \infty)$. Concluir que τ no es una topología sobre $\mathbb{R}$.

16.- Se considera $\tau_{fort} = \{U \subset \mathbb{R} : p \notin U$ ó $\mathbb{R} - U$ finito$\}$, donde $p \in \mathbb{R}$. Probar que se trata de una topología sobre $\mathbb{R}$, la topología de *Fort* y estudiar los axiomas de separación.

17.- Sobre $\mathbb{R}^2$, se pide:

(i) un conjunto U se llama *radialmente abierto*, si para cada $x \in U$, U contiene un segmento de línea abierta en cada dirección alrededor del punto. La familia de los conjuntos radialmente abiertos, τ_{rad}, es una topología llamada *topología radial*. Compararla con la topología euclídea y estudiar si es T_1 o T_2;

(ii) describir la topología cuya subbase esta formada por la familia de todas las líneas rectas. Lo mismo, si se considera como subbase la familia de las líneas rectas paralelas al eje de abscisas;

(iii) si $\tau = \{\emptyset, \mathbb{R}^2\} \cup \{G_k : k \in \mathbb{R}\}$, donde $G_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > y + k\}$. ¿Es τ una topología sobre $\mathbb{R}^2$? ¿Lo es si $k \in \mathbb{Z}$? ¿Y si $k \in \mathbb{Q}$?

(iv) probar que la familia $\beta = \{\{x\} \times \mathbb{R} : x \in \mathbb{R}\}$ es base para una topología sobre $\mathbb{R}^2$. ¿Es T_1? ¿Y T_2?

18.- En $\mathbb{R}^2$, se define una familia $\mathcal{F}$ de subconjuntos de X, como sigue:

$$\mathcal{F} = \{\emptyset, \mathbb{R}^2\} \cup \{F \subset \mathbb{R}^2 : F \text{ consta de un número finito de puntos y de rectas}\}.$$

Se pide probar:

(i) $\mathcal{F}$ es una familia de cerrados para alguna topología $\tau_{\mathcal{F}}$;

(ii) esta topología es la menor en la que puntos y rectas son subconjuntos cerrados;

(iii) comparar $\tau_{\mathcal{F}}$ con la topología usual y la cofinita;

(iv) ¿existe alguna topología sobre $\mathbb{R}^2$ en la que las rectas sean cerradas y los puntos no?

(v) ¿existe alguna topología sobre $\mathbb{R}^2$ en la que los puntos sean cerrados y las rectas no?

$*$ **19.-** Vamos a dar una prueba topológica (debida a H. Fürstenberg en 1955) de la infinitud de los números primos. Sobre $\mathbb{Z}$ se define la familia $\beta = \{S_{ab} : a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{Z}\}$, donde $S_{ab} = \{an + b : n \in \mathbb{Z}\}$. Se pide probar:

(i) $S_{ab} \cap S_{cd} = S_{rs}$, donde $r = \text{mcm}\{a, c\}$;

(ii) β es base de una topología τ sobre $\mathbb{Z}$;

(iii) todo conjunto abierto es infinito;

(iv) para cada $a, b \in \mathbb{Z}$, S_{ab} es un conjunto cerrado;

(v) para cada entero $m \in \mathbb{Z} - \{-1, 1\}$ existe un primo p tal que $m \in S_{p0}$; deducir que existen infinitos números primos.

20.- Decimos que $U \subset \mathbb{N}$ es abierto si dado $n \in U$, todo divisor de n pertenece también a U. Probar que esta relación define una topología $\tau \neq \tau_{dis}$ sobre $\mathbb{N}$. ¿Es $(\mathbb{N}, \tau)$ T_2?

21.- Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos el conjunto $O_n = \{n, n+1, \ldots\}$. Probar que $\tau = \{\emptyset\} \cup \{O_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una topología sobre $\mathbb{N}$. ¿Qué abiertos contienen al 1? ¿Es $(\mathbb{N}, \tau)$ T_2?

22.- Sean $X = \{f \colon [0,1] \longrightarrow [0,1]\}$ y $A_S = \{f \in X : f(x) = 0, \forall x \in S\}$ para $S \subset [0,1]$. Probar que la familia $\beta = \{A_S : S \subset [0,1]\}$ es una base para una topología τ sobre X. ¿Es (X, τ) T_2?

23.- Sea X la familia de todos los polinomios de coeficientes reales y para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $B_n = \{p \in X : p \text{ es de grado } n\}$. Probar que la familia $\beta = \{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una base para una topología τ sobre X. ¿Es (X, τ) T_2?

24.- Para cada $A \subset \mathbb{N}$, definimos $N(n, A) = Card\,(A \cap \{1, 2, \ldots, n\})$. Sea:

$$\tau_{ap} = \left\{ U \subset \mathbb{N} : 1 \not\in U \text{ ó } \left(1 \in U \text{ y } \lim_{n \to \infty} \frac{N(n, U)}{n} = 1 \right) \right\}.$$

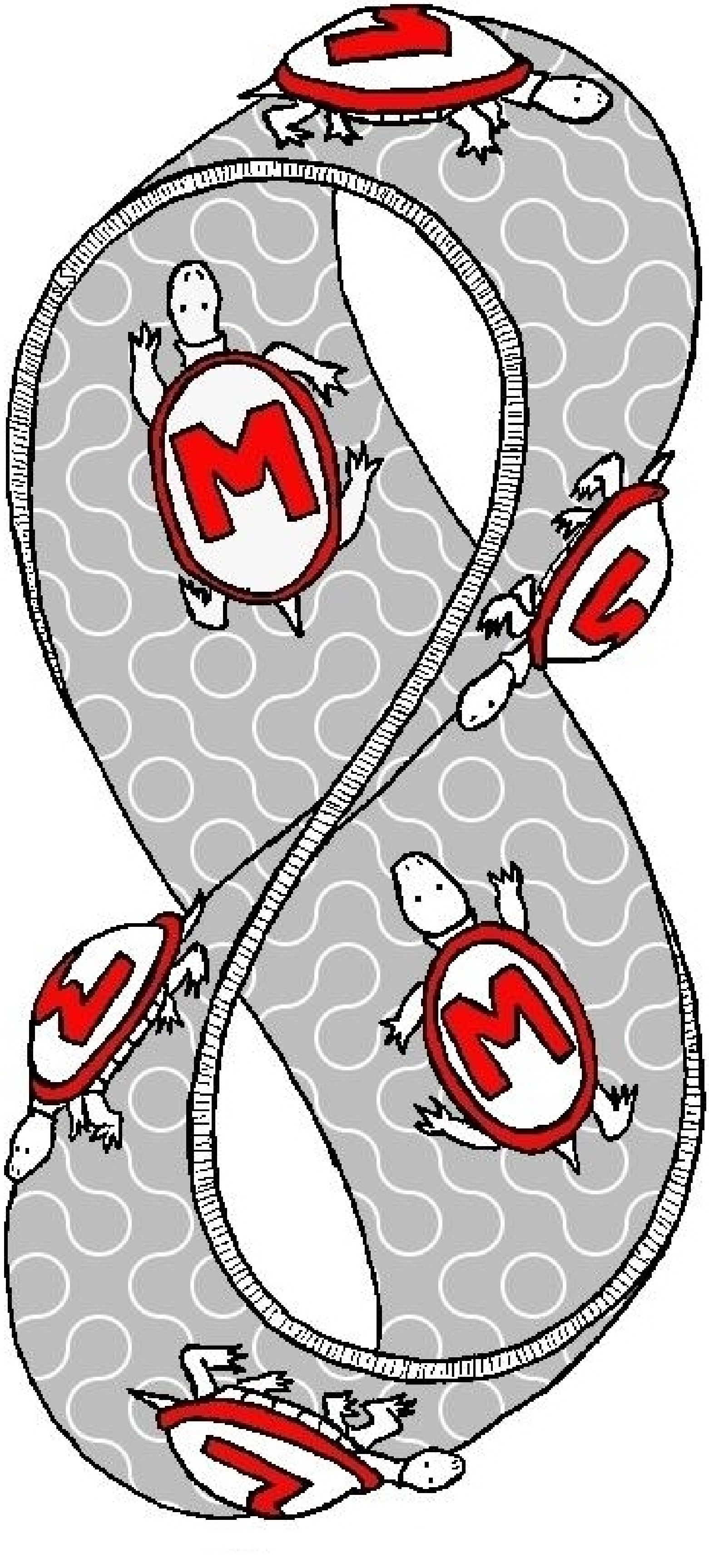
Probar que τ_{ap} es una topología sobre $\mathbb{N}$, la *topología de Appert*, y estudiar los axiomas de separación.

25.- Sea $\mathcal{P}$ la colección de los polinomios en n variables reales. Para cada $P \in \mathcal{P}$, sea $Z(P) = \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n : P(x_1, \cdots, x_n) = 0\}$. Se pide:

(i) probar que $\{Z(P) : P \in \mathcal{P}\}$ es una base de cerrados para una topología sobre $\mathbb{R}^n$, τ_{zar}, llamada *topología de Zariski*;

(ii) probar que τ_{zar} es de T_1, pero no T_2;

(iii) si $n = 1$, $\tau_{zar} = \tau_{cof}$. Pero, si $n > 1$, estas dos topologías son distintas.



Capítulo 3

Entornos

Los espacios métricos y sus variantes, introducidos en 1906 por Fréchet, se basan en el concepto de distancia. La noción intuitiva de *cercanía* se traslada al concepto matemático más manejable de *entorno*.

En su "*Grundzüge der Mengenlehre*"de 1914, Hausdorff utilizó el concepto de *entorno* (usado ya por Hilbert en 1902 en una formulación axiomática especial de la geometría euclídea plana) y edificó una teoría definitiva de los espacios abstractos basada en esta noción.

3.1. Entornos y sistemas de entornos

Los entornos constituyen la manera más natural de describir las topologías. Esta herramienta indica que sucede *cerca* de cada punto, es decir, estamos dando una descripción *local* alrededor de x.

Definición 3.1. $N \subset X$ es un *entorno* del punto x en (X, τ) si existe un abierto $U \in \tau$, verificando $x \in U \subset N$. En esta definición, puede cambiarse el abierto por un abierto básico. La familia $\mathcal{N}_x$ de todos los entornos de x se llama *sistema de entornos* de x.

Teorema 3.1. *El sistema de entornos de x en (X, τ) verifica las siguientes propiedades:*

(N1) para cada $N \in \mathcal{N}_x$, es $x \in N$;

(N2) si $N_1, N_2 \in \mathcal{N}_x$, entonces $N_1 \cap N_2 \in \mathcal{N}_x$;

(N3) si $N \in \mathcal{N}_x$ y $N \subset M$, entonces $M \in \mathcal{N}_x$;

(N4) para cada $N \in \mathcal{N}_x$, existe $M \in \mathcal{N}_x$, tal que $N \in \mathcal{N}_y$ para cada $y \in M$; y además

(N5) $U \in \tau$ si y sólo si $U \in \mathcal{N}_x$ para cada $x \in U$.

Y recíprocamente, si a cada $x \in X$ se le asigna una familia no vacía de subconjuntos $\mathcal{M}_x$, verificando (N1) a (N4), y se usa (N5) para definir el concepto de "conjunto abierto", se obtiene una topología τ sobre X, para la que $\mathcal{M}_x = \mathcal{N}_x$ en cada punto.

Demostración: Sólo vamos a comprobar la igualdad $\mathcal{M}_x = \mathcal{N}_x$ en la segunda parte del teorema, el resto de la prueba es sencillo. Si $N \in \mathcal{N}_x$, existe $U \in \tau$ tal que $x \in U \subset N$. Pero $U \in \mathcal{M}_x$, luego $N \in \mathcal{M}_x$ por (N3). Con esto, queda demostrado que $\mathcal{N}_x \subset \mathcal{M}_x$. Recíprocamente, para $M \in \mathcal{M}_x$ se define $U = \{y \in M : M \in \mathcal{M}_y\}$, que es no vacío, pues $x \in U \subset M$. Si demostramos que $U \in \tau$, será entonces $M \in \mathcal{N}_x$. Sea $y \in U$, es decir, $M \in \mathcal{M}_y$. Por (N4), existe $U_y \in \mathcal{M}_y$ tal que para cada $z \in U_y$ es $M \in \mathcal{M}_z$. Por lo tanto, $U_y \subset U$ y de (N2) se deduce que $U \in \mathcal{M}_y$. Como esto sucede para cada $y \in U$, se concluye que $U \in \tau$. ∎

Ejemplos 3.1. Para los ejemplos ya vistos, tenemos:

1) en (X, τ_{ind}), para todo $x \in X$, es $\mathcal{N}_x^{ind} = \{X\}$;

2) en (X, τ_{dis}), para cada $x \in X$, es $\mathcal{N}_x^{dis} = \{N \subset X : x \in N\}$;

3) en (X, τ_{cof}), para todo $x \in X$, es $\mathcal{N}_x^{cof} = \{U \in \tau_{cof} : x \in U\}$;

4) en (X, τ_{coc}), para cada $x \in X$, es $\mathcal{N}_x^{coc} = \{U \in \tau_{coc} : x \in U\}$;

5) en $(X = \{a, b\}, \tau_{sier})$, $\mathcal{N}_a^{sier} = \{X, \{a\}\}$ y $\mathcal{N}_b^{sier} = \{X\}$;

6) en (X, τ_A), para todo $x \in X$, es $\mathcal{N}_x^{\tau_A} = \{N \subset X : \{x\} \cup A \subset N\}$;

7) en (X, τ^A), si $x \in A$ es $\mathcal{N}_x^{\tau^A} = \{X\}$ y si $x \notin A$ es $\mathcal{N}_x = \{N \subset X : x \in N\}$;

8) en $(\mathbb{R}, \tau_{sca})$, es $\mathcal{N}_x^{sca} = \mathcal{N}_x^u$ si $x \in \mathbb{Q}$ y $\mathcal{N}_x^{sca} = \{N \subset \mathbb{R} : x \in N\}$ si $x \in \mathbb{I}$.

3.2. Bases de entornos

No son necesarios todos los superconjuntos de los entornos de un punto para obtener una buena descripción del sistema de entornos. Bastará con una familia más pequeña:

Definición 3.2. Una *base de entornos o base local* de x en (X, τ) es una familia $\mathcal{B}_x \subset \mathcal{N}_x$ tal que, para cada $N \in \mathcal{N}_x$, existe $B \in \mathcal{B}_x$ tal que $B \subset N$. En cuanto se ha elegido una base de entornos de un punto (no hay una manera única de hacerlo), sus elementos se llaman *entornos básicos*. La familia $\{\mathcal{B}_x\}_{x \in X}$ se llama *sistema fundamental de entornos*.

Ejemplos 3.2. Para los ejemplos ya estudiados, tenemos:

1) en (X, τ_{ind}), para todo $x \in X$, se elige $\mathcal{B}_x^{ind} = \{X\}$;

2) en (X, τ_{dis}), para cada $x \in X$, se escoge $\mathcal{B}_x^{dis} = \{\{x\}\}$;

3) en $(X = \{a, b\}, \tau_{sier})$, se toma $\mathcal{B}_a^{sier} = \{\{a\}\}$ y $\mathcal{B}_b^{sier} = \{X\}$;

4) en (X, τ_A), para todo $x \in X$, se elige $\mathcal{B}_x^{\tau_A} = \{\{x\} \cup A\}$;

5) en (X, τ^A), $\mathcal{B}_x^{\tau^A} = \{X\}$ si $x \in A$ y $\mathcal{B}_x^{\tau^A} = \{\{x\}\}$ si $x \notin A$;

6) en $(\mathbb{R}, \tau_u)$, se elige $\mathcal{B}_x^u = \{(x - \varepsilon, x + \varepsilon) : \varepsilon > 0\}$;

7) en $(\mathbb{R}, \tau_{sor})$, se toma $\mathcal{B}_x^{sor} = \{[x, x + \varepsilon) : \varepsilon > 0\}$;

8) en $(\mathbb{R}, \tau_{kol})$, se elige $\mathcal{B}_x^{kol} = \{(x - \varepsilon, \infty) : \varepsilon > 0\}$;

9) en $(\mathbb{R}, \tau_{sca})$, se toma $\mathcal{B}_x^{sca} = \mathcal{B}_x^u$ si $x \in \mathbb{Q}$ y $\mathcal{B}_x^{sca} = \{\{x\}\}$ si $x \in \mathbb{I}$;

10) $\mathcal{N}_x$ es una base local en x en (X, τ);

11) τ_{cof} y τ_{coc} no tienen bases de entornos destacadas.

Teorema 3.2. *Sea (X, τ) y $\{\mathcal{B}_x\}_{x \in X}$ un sistema fundamental de entornos. Se verifica:*

(B1) para cada $B \in \mathcal{B}_x$, es $x \in B$;

(B2) si $B_1, B_2 \in \mathcal{B}_x$, existe $B_3 \in \mathcal{B}_x$ tal que $B_3 \subset B_1 \cap B_2$;

(B3) para cada $B \in \mathcal{B}_x$, existe $B_0 \in \mathcal{B}_x$, tal que para cada $y \in B_0$, existe $B_y \in \mathcal{B}_y$ tal que $B_y \subset B$; y además

(B4) $U \in \tau$ si y sólo si para cada $x \in U$, existe $B \in \mathcal{B}_x$, tal que $B \subset U$.

Y recíprocamente, si a cada $x \in X$ se le asigna una familia no vacía $\mathcal{D}_x$ de subconjuntos de X, verificando (B1) a (B3), y se usa (B4) para definir el concepto de "conjunto abierto", se obtiene una topología τ sobre X, para la que $\{\mathcal{D}_x\}_{x \in X}$ es un sistema fundamental de entornos en x.

Una forma natural de construir bases locales es la siguiente:

Lema 3.3. *En (X, τ), $\mathcal{B}_x = \mathcal{N}_x \cap \tau$ es una base local en x.*

3.3. Topologías y sistemas de entornos

Intuitivamente, cuanto menores sean los entornos básicos, más finas serán las topologías asociadas:

Teorema 3.4. ***(Criterio de Hausdorff)*** *Sean τ_1 y τ_2 topologías sobre X y $\{\mathcal{B}_x^1\}_{x\in X}$, $\{\mathcal{B}_x^2\}_{x\in X}$ sistemas fundamentales de entornos asociados. Entonces, $\tau_1 \subset \tau_2$ si y sólo si para cada $x \in X$ y cada $B_1 \in \mathcal{B}_x^1$, existe $B_2 \in \mathcal{B}_x^2$ tal que $B_2 \subset B_1$.*

Proposición 3.5. *En las mismas condiciones del teorema 3.4, $\tau_1 \subset \tau_2$ si y sólo si para cada $x \in X$, es $\mathcal{N}_x^1 \subset \mathcal{N}_x^2$.*

La única diferencia entre las nociones de base local y base de topología es que las bases de entornos no constan necesariamente de conjuntos abiertos:

Teorema 3.6. *Sea (X,τ) y $\beta \subset \tau$. Entonces, β es base de τ si y sólo si, para cada $x \in X$, la familia $\mathcal{B}_x = \{B \in \beta : x \in B\}$ es una base local en x.*

Observación 3.1. En las definiciones de T_1 y T_2, se pueden reemplazar los abiertos por entornos o entornos básicos.

3.4. Problemas

1.- En (X,τ), se dice que $N \subset X$ es un *entorno* de $A \subset N$, si existe $U \in \tau$, tal que $A \subset U \subset N$. Probar que N es un entorno de A si y sólo si para cada $x \in A$, es $N \in \mathcal{N}_x$.

2.- Probar que (X,τ) es T_1 si y sólo si para cada $x \in X$, $\{x\} = \bigcap\limits_{N\in\mathcal{N}_x} N$.

3.- Describir los sistemas de entornos de cada punto en los espacios topológicos:

(i) $X = \{a,b,d,c\}$ y $\tau = \{X,\emptyset,\{b\},\{a,b\},\{b,c,d\}\}$;

(ii) $X = \{a,b,d,c,e\}$ y $\tau = \{X,\emptyset,\{a\},\{a,b\},\{a,c,d\},\{a,b,c,d\},\{a,b,e\}\}$.

$*$ **4.-** Sea (X,d) un espacio métrico. Probar que $\mathcal{B}_x = \{B(x,\frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\}$ es una base de entornos en x para la topología inducida por la métrica.

5.- Sobre $\mathbb{R}$, se considera:

(1) si $x \neq 0$, $\mathcal{B}_x = \{(x-\varepsilon, x+\varepsilon) : \varepsilon > 0\}$,

(2) $\mathcal{B}_0 = \{B_{\varepsilon,n} : \varepsilon > 0, n \in \mathbb{N}\}$, donde $B_{\varepsilon,n} = (-\infty,-n) \cup (-\varepsilon,\varepsilon) \cup (n,\infty)$.

Probar que $\{\mathcal{B}_x\}_{x\in\mathbb{R}}$ es un sistema fundamental de entornos, que define una topología τ_{lac} sobre $\mathbb{R}$. El par $(\mathbb{R}, \tau_{lac})$ se llama *recta enlazada*. Comparar τ_{lac} con la topología usual de $\mathbb{R}$ y estudiar los axiomas de separación.

$*$ **6.-** Sobre $\mathbb{R}$ se considera:

1) si $x \neq 0$, $\mathcal{B}_x = \{(x-\varepsilon, x+\varepsilon) : \varepsilon > 0\}$, 2) $\mathcal{B}_0 = \{(-\varepsilon, \varepsilon) - \{\frac{1}{n} : n \in \mathrm{N}\} : \varepsilon > 0\}$.

Comprobar que $\{\mathcal{B}_x\}_{x\in\mathbb{R}}$ es un sistema fundamental de entornos, comparar la topología generada con τ_u y estudiar los axiomas de separación.

7.- Determinar si en $(\mathbb{R}, \tau_u)$ los siguientes intervalos son entornos de 0: $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, $(-1, 0]$, $[0, \frac{1}{2})$ y $(0, 1]$. Probar que los conjuntos $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{I}$ no pueden ser entornos de ningún punto.

8.- Para $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$, el semiplano superior cerrado, se considera:

(1) $\mathcal{B}_{(x,y)} = \{B_{us}((x,y), \varepsilon) : \varepsilon > 0$ "pequeño"para que $B_{us}((x,y), \varepsilon) \subset \Gamma\}$, para $(x,y) \in \Gamma$, $y \neq 0$,

(2) $\mathcal{B}_{(x,0)} = \{\{(x,0)\} \cup \{B_{us}((x,\varepsilon), \varepsilon) : \varepsilon > 0\}$.

Probar que $\{\mathcal{B}_{(x,y)}\}_{(x,y)\in\Gamma}$ es un sistema fundamental de entornos, que define una topología τ_{moo} sobre Γ. El par (Γ, τ_{moo}) se llama *plano de Moore*. Comparar τ_{moo} con la topología euclídea sobre Γ y estudiar los axiomas de separación.

9.- Se considera $\mathbb{R}^{[0,1]} = \{f \colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}\}$, y:

(i) se define $U(f, F, \delta) = \{g \in \mathbb{R}^{[0,1]} : \forall x \in F, |f(x) - g(x)| < \delta\}$, para $f \in \mathbb{R}^{[0,1]}$, $F \subset [0,1]$ finito y $\delta > 0$. Probar que $\{U(f, F, \delta) : F \subset [0,1] \text{ finito}, \delta > 0\}$ forma una base de entornos en f para una topología, τ_{tyc}, sobre $\mathbb{R}^{[0,1]}$, que se denomina *topología de Tychonof*;

(ii) para $f \in \mathbb{R}^{[0,1]}$ y $\varepsilon > 0$, sea $V(f, \varepsilon) = \{g \in \mathbb{R}^{[0,1]} : \forall x \in [0,1], |g(x) - f(x)| < \varepsilon\}$. Verificar que $\{V(f, \varepsilon) : \varepsilon > 0\}$ forma una base de entornos en f para una topología, τ_{ca} sobre $\mathbb{R}^{[0,1]}$, llamada *topología caja*;

(iii) comparar τ_{tyc} y τ_{ca} y estudiar los axiomas de separación para ambas topologías.

10.- Sean $L_n = \{(x, \frac{1}{n}) : x \in [0,1)\}$ si $n > 0$, $L_0 = \{(x,0) : x \in (0,1)\}$ y $X = \displaystyle\bigcup_{n=0}^{\infty} L_n$.

Se considera:

(1) si $n \in \mathbb{N}$ y $x \neq 0$, $\mathcal{B}_{(x,\frac{1}{n})} = \{(x, \frac{1}{n})\}$,

(2) $\mathcal{B}_{(0,\frac{1}{n})} = \{U \subset L_n : (0, \frac{1}{n}) \in U, L_n - U \text{ es finito}\}$,

(3) $\mathcal{B}_{(x,0)} = \{\{(x,0)\} \cup \{(x, \frac{1}{n}) : n > 0\}\}$.

Comprobar que $\{\mathcal{B}_{(x,y)}\}_{(x,y)\in X}$ es un sistema fundamental de entornos sobre X y estudiar los axiomas de separación.

11.- Sea $([0,1] \times [0,1], \tau_{ord})$, donde la topología del orden está generada por el orden lexicográfico sobre $[0,1] \times [0,1]$. Describir los entornos de los puntos:

(i) $(x,0)$ (con especial atención al $(0,0)$) y $(x,1)$ (con especial atención al $(1,1)$), si $x \in [0,1]$,

(ii) (x,y), para $x, y \in (0,1)$.

12.- Para cada $x \in \mathbb{R}^2$, sea la familia:

$\mathcal{B}_x = \{\{x\} \cup D : D$ es disco centrado en x, al que le faltan un número finito de diámetros$\}$.

Se pide:

(i) comprobar que $\mathcal{B}_x$ es una base de entornos en x para una topología, τ_{slo}, en el plano. El par $(\mathbb{R}^2, \tau_{slo})$ se llama *plano Slotted*;

(ii) comparar τ_{slo} con la topología usual; (iii) ¿Es τ_{slo} T_2?

(iv) ¿se puede reemplazar, en la definición, finito por numerable?

13.- Sea $M_n(\mathbb{R})$ el conjunto de las matrices n por n de números reales. Dada una matriz $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n} \in M_n(\mathbb{R})$ y $r > 0$, se define:

$$U_r(A) = \{(b_{ij})_{i,j=1,\ldots,n} : |a_{ij} - b_{ij}| < r, \forall i, j = 1, \ldots, n\}.$$

Probar que la familia $\mathcal{B}_A = \{U_r(A) : r > 0\}$ es una base de entornos en A, que genera una topología τ en $M_n(\mathbb{R})$. Estudiar los axiomas de separación.

14.- Sea $X = (\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}) \cup \{0^+, 0^-\}$, donde 0^+ y 0^- son dos puntos añadidos a $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$. Para los puntos de $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ se considera la familia de bolas usuales y para los otros dos puntos se consideran las familias

$$\mathcal{B}_{0^+} = \{B_\varepsilon^+ \cup \{0^+\} : \varepsilon > 0\}, \qquad \mathcal{B}_{0^-} = \{B_\varepsilon^- \cup \{0^-\} : \varepsilon > 0\},$$

donde $B_\varepsilon^+ = \{(x,y) : x^2 + y^2 < \varepsilon,\ y > 0\}$, $B_\varepsilon^- = \{(x,y) : x^2 + y^2 < \varepsilon,\ y < 0\}$. Demostrar que las familias anteriores forman bases locales, para los puntos indicados, de una topología τ sobre X.

15.- Sea $X = [0,1] \cup \{1^*\}$, donde 1^* es un punto añadido a $[0,1]$, tal que $x < 1^*$ para cada $x \in [0,1)$. Para cada $x \in [0,1]$, los entornos básicos son los entornos usuales de x; los entornos básicos de 1^* son los conjuntos de la forma $(a,1) \cup \{1^*\}$, donde $a \in [0,1)$. Demostrar que definen una topología τ sobre X.

Capítulo 4

Conjuntos en espacios topológicos

El operador clausura, como concepto primordial para definir estructuras espaciales (junto con un sistema de axiomas que debe satisfacer), fue introducido por Kuratowski en su tesis en 1920.

Los conjuntos cerrados serán los elementos que quedan fijos por el operador clausura. A primera vista, parece sorprendente que una función pueda determinarse únicamente a través de sus puntos fijos. Pero, observando con un poco de calma las propiedades, se ve que el conjunto de los valores tomados por el operador clausura es exactamente el conjunto de sus puntos fijos. Además, la clausura de A, $\overline{A}$, es uno de esos conjuntos fijos que contiene a A, y más aún, es el menor.

El concepto de interior es el dual del concepto de clausura, tomando complementarios. Empezaremos por introducir esta noción.

4.1. Interior de un conjunto

En (X, τ), si $A \subset X$, A no tiene porque ser un conjunto abierto, pero siempre contiene conjuntos abiertos: por lo menos el conjunto vacío $\emptyset$. Por ello, tiene sentido definir:

Definición 4.1. Dado (X, τ) y $A \subset X$, el *interior* de A es el conjunto

$$\overset{\circ}{A} = \bigcup \{U \subset X : U \in \tau \text{ y } U \subset A\}.$$

Si $x \in \overset{\circ}{A}$, se dice que x es un *punto interior* de A.

Lema 4.1. *En (X, τ), si $A \subset X$, es $\overset{\circ}{A} \in \tau$ y además $\overset{\circ}{A}$ es el mayor conjunto abierto contenido en A.*

Ejemplos 4.1. Para los ejemplos ya estudiados, tenemos:

1) en (X, τ_{ind}), para todo $A \neq X$, es $\overset{\circ}{A} = \emptyset$ y $\overset{\circ}{X} = X$;

2) en (X, τ_{dis}), para todo $A \subset X$, es $\overset{\circ}{A} = A$;

3) en $(X = \{a, b\}, \tau_{sier})$, $\{\overset{\circ}{b}\} = \emptyset$ y $\{\overset{\circ}{a}\} = \{a\}$;

4) en (X, τ_A), si $B \notin \tau_A$, es $\overset{\circ}{B} = \emptyset$;

5) en (X, τ^A), si $B \notin \tau^A$, es $\overset{\circ}{B} = B - A$;

6) en (X, τ_{cof}), si $A \notin \tau_{cof}$, es $\overset{\circ}{A} = \emptyset$;

7) en (X, τ_{coc}), si $A \notin \tau_{coc}$, es $\overset{\circ}{A} = \emptyset$;

8) en $(\mathbb{R}, \tau_{kol})$, si A está acotado superiormente, es $\overset{\circ}{A} = \emptyset$;

9) en $(\mathbb{R}, \tau_{sca})$, para $\overset{\circ}{A} = (A \cap \mathbb{I}) \cup (\overset{\circ}{A}{}^{u} \cap \mathbb{Q})$.

Lema 4.2. *En (X, τ), si $A \subset B$, entonces $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$.*

Teorema 4.3. *En (X, τ), se verifican las siguientes propiedades:*

(I1) para todo $A \subset X$, es $\overset{\circ}{A} \subset A$;

(I2) para todo $A \subset X$, es $\overset{\circ}{\overset{\circ}{A}} = \overset{\circ}{A}$;

(I3) para todo $A, B \subset X$, es $\overbrace{A \cap B}^{\circ} = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$;

(I4) $\overset{\circ}{X} = X$; y además

(I5) $U \in \tau$ si y sólo si $\overset{\circ}{U} = U$.

Y recíprocamente, dada una aplicación $Int \colon \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$, que verifica (I1) a (I4), y si se define el concepto de conjunto abierto usando (I5), queda definida una topología τ sobre X, para la cual Int es el operador interior.

Demostración: Para la segunda parte, hay que probar que $\tau = \{U \subset X : Int(U) = U\}$ es una topología sobre X. Para demostrar la última parte, $Int(A) \in \tau$ por (I2) y como $Int(A) \subset A$ por (I1), se concluye que $Int(A) \subset \overset{\circ}{A}$ aplicando el lema 4.1. Por otro lado, si $U \in \tau$ y $U \subset A$, es $U = Int(U) \subset Int(A)$ por (I3), luego $\overset{\circ}{A} \subset Int(A)$. ∎

Se puede caracterizar el interior de un conjunto a través de un sistema fundamental de entornos:

Proposición 4.4. *Sea* $\{\mathcal{B}_x\}_{x \in X}$ *un sistema fundamental de entornos en* (X, τ)*, entonces es* $x \in \overset{\circ}{A}$ *si y sólo si existe* $B \in \mathcal{B}_x$ *tal que* $B \subset A$*.*

El interior de cualquier entorno es no vacío:

Lema 4.5. *En* (X, τ)*,* $N \in \mathcal{N}_x$ *si y sólo si* $\overset{\circ}{N} \in \mathcal{N}_x$*. En particular, un entorno no puede tener interior vacío.*

4.2. Clausura de un conjunto

Un conjunto A en un espacio (X, τ) no tiene porque ser cerrado. Pero siempre existen cerrados que lo contienen: por lo menos, el total X. Por esta razón tiene sentido definir:

Definición 4.2. Sea (X, τ) y $A \subset X$. La *clausura* de A es el conjunto:

$$\overline{A} = \bigcap \{F \subset X : F \text{ cerrado y } A \subset F\}.$$

Si $x \in \overline{A}$, x se llama punto *clausura* o *adherente* de A.

Lema 4.6. *Sean* (X, τ) *y* $A \subset X$*.* $\overline{A}$ *es un conjunto cerrado, y además es el menor cerrado que contiene a* A*.*

Ejemplos 4.2. En los ejemplos ya estudiados, tenemos:

1) en (X, τ_{ind}), para todo $A \neq \emptyset$, es $\overline{A} = X$;

2) en (X, τ_{dis}), para todo $A \subset X$, es $\overline{A} = A$;

3) en $(X = \{a, b\}, \tau_{sier})$, $\overline{\{b\}} = \{b\}$ y $\overline{\{a\}} = X$;

4) en (X, τ_A), si $B \not\in \mathcal{C}_A$, es $\overline{B} = X$;

5) en (X, τ^A), si $B \not\in \mathcal{C}^A$, es $\overline{B} = B \cup A$;

6) en (X, τ_{cof}), si A es infinito, es $\overline{A} = X$;

7) en (X, τ_{coc}), si A no es contable, es $\overline{A} = X$;

8) en $(\mathbb{R}, \tau_{kol})$, si A no está acotado superiormente, es $\overline{A} = X$;

9) en $(\mathbb{R}, \tau_{sca})$, para $\overline{A} = (A - \mathbb{Q}) \cup (\overline{A}^{us} \cap \mathbb{Q})$.

Lema 4.7. *En (X, τ), si $A \subset B$, entonces $\overline{A} \subset \overline{B}$.*

Teorema 4.8. *En (X, τ), se verifican las siguientes propiedades:*

(C1) para todo $A \subset X$, es $A \subset \overline{A}$;

(C2) para todo $A \subset X$, es $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$;

(C3) para todo $A, B \subset X$, es $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;

(C4) $\overline{\emptyset} = \emptyset$; y además

(C5) $F \in \mathcal{C}$ si y sólo si $\overline{F} = F$.

Y recíprocamente, dada una aplicación $Cl\colon \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$, que verifica (C1) a (C4) (es decir, lo que habitualmente se denomina un operador clausura de Kuratowski), si se define el concepto de conjunto cerrado usando (C5), queda definida una topología τ sobre X, para la cual Cl es el operador clausura.

Demostración: La primera parte es una simple comprobación. Para la segunda parte, basta con probar que $\mathcal{F} = \{A \subset X : Cl(A) = A\}$ es la familia de cerrados para una topología τ sobre X. Entonces, $U \in \tau$ si y sólo si $X - U \in \mathcal{F}$. Por (C2), es $Cl(A) = Cl(Cl(A))$, luego $Cl(A) \in \mathcal{F}$ y como $A \subset Cl(A)$, se deduce que $\overline{A} \subset Cl(A)$ por el lema 4.6. Y si $A \subset F \in \mathcal{C}$, es $Cl(A) \subset Cl(F) = F$, por (C3), luego $Cl(A) \subset \overline{A}$. ∎

Se puede caracterizar la clausura de un conjunto a través de un sistema fundamental de entornos:

Proposición 4.9. *Sea $\{\mathcal{B}_x\}_{x \in X}$ un sistema fundamental de entornos en (X, τ), entonces es $x \in \overline{A}$ si y sólo si para cada $B \in \mathcal{B}_x$ es $B \cap A \neq \emptyset$.*

Los conceptos de interior y clausura son duales (no opuestos), como las nociones de abierto y cerrado:

Proposición 4.10. *Sea (X, τ) y $A \subset X$, entonces es $X - \overset{\circ}{A} = \overline{X - A}$ y $X - \overline{A} = \overset{\circ}{\overbrace{X - A}}$.*

Definición 4.3. Un conjunto D es *denso* en (X, τ), si $\overline{D} = X$, es decir, si es *topológicamente grande*.

Lema 4.11. *Un conjunto D es denso en (X, τ), si verifica cualquiera de las propiedades equivalentes siguientes:*

(i) D corta a cualquier abierto no vacío;

(ii) si $F \in \mathcal{C}$ y $D \subset F$, es $F = X$;

(iii) D corta a cualquier abierto básico no vacío;

(iv) D corta a cualquier entorno de cualquier punto;

(v) D corta a cualquier entorno básico de cualquier punto.

4.3. Puntos de acumulación y puntos aislados

Definición 4.4. Fijado un sistema fundamental de entornos $\{\mathcal{B}_x\}_{x \in X}$ en (X, τ), $x \in X$ es un *punto de acumulación* de $A \subset X$, si para cada $B \in \mathcal{B}_x$, es $(B - \{x\}) \cap A \neq \emptyset$. Al conjunto de los puntos de acumulación de A se le llama *conjunto derivado* de A y se denota por A'. Si $x \in A - A'$, se dice que x es un *punto aislado* de A.

Teorema 4.12. *En (X, τ), se verifican las siguientes propiedades:*

(i) si $A \subset B$, es $A' \subset B'$;

(ii) para todo $A, B \subset X$, es $(A \cup B)' = A' \cup B'$;

(iii) $\emptyset' = \emptyset$;

(iv) $\overline{A} = A \cup A'$;

(v) $F \in \mathcal{C}$ si y sólo si $F' \subset F$.

Observación 4.1. Por la propiedad (v) del teorema 4.12, un conjunto con derivado vacío es cerrado.

Ejemplos 4.3. Para los ejemplos anteriores, tenemos:

1) en (X, τ_{ind}), para todo $A \neq \emptyset$ con más de un punto, es $A' = X$ y para $x \in X$, es $\{x\}' = X - \{x\}$;

2) en (X, τ_{dis}), para todo $A \subset X$, es $A' = \emptyset$;

3) en $(X = \{a, b\}, \tau_{sier})$, $\{b\}' = \emptyset$ y $\{a\}' = \{b\}$;

4) en (X, τ_A), si $B \notin \mathcal{C}_A$, es $B' = X - \{x\}$ cuando $A \cap B = \{x\}$ y $B' = X$ en otro caso. Y si $B \in \mathcal{C}_A$, entonces $B' = \emptyset$;

5) en (X,τ^A), si B tiene más de un punto, es $B' = A$ y si $B = \{x\}$, es $B' = A - \{x\}$;

6) en (X,τ_{cof}), si A es infinito, $A' = X$ y si A es finito, $A' = \emptyset$;

7) en (X,τ_{coc}), si A es no contable, $A' = X$ y si A es contable, $A' = \emptyset$;

8) en $(\mathbb{R},\tau_{sca})$, para $A \subset \mathbb{R}$ y con las notaciones obvias, es $A' = A'^{u} \cap \mathbb{Q}$.

4.4. Frontera de un conjunto

Definición 4.5. En (X,τ), la *frontera* de $A \subset X$ es el conjunto $fr(A) = \overline{A} \cap \overline{X - A}$. Si $x \in fr(A)$ se dice que x es un *punto frontera* de A.

Lema 4.13. *En (X,τ), si $A \subset X$, $fr(A)$ es un conjunto cerrado.*

Teorema 4.14. *En (X,τ), si $A \subset X$, se verifican las siguientes propiedades:*

(i) $fr(A) = fr(X - A)$*;*

(ii) $fr(\emptyset) = fr(X) = \emptyset$*;*

(iii) $\overline{A} = A \cup fr(A) = \overset{\circ}{A} \cup fr(A)$*;*

(iv) $fr(A) = \overline{A} - \overset{\circ}{A}$ *y* $\overset{\circ}{A} = A - fr(A)$*;*

(v) $X = \overset{\circ}{A} \cup fr(A) \cup (X - \overline{A})$ *y esta unión es disjunta;*

(vi) A *es abierto si y sólo si* $fr(A) \cap A = \emptyset$*;*

(vii) A *es cerrado si y sólo* $fr(A) \subset A$*.*

Ejemplos 4.4. Para los ejemplos conocidos, se verifica:

1) en (X,τ_{ind}), para todo $A \subset X$ propio, es $fr(A) = X$;

2) en (X,τ_{dis}), para todo $A \subset X$, es $fr(A) = \emptyset$;

3) en $(X = \{a,b\},\tau_{sier})$, $fr(\{b\}) = \{b\}$ y $fr(\{a\}) = \{b\}$;

4) en (X,τ_A), si $B \subset X$ es propio, $fr(B) = B$ si $B \in \mathcal{C}_A$, $fr(B) = X - B$ si $B \in \tau_A$ y $fr(B) = X$ en caso contrario;

5) en (X,τ^A), si $B \subset X$ es propio, es $fr(B) = A$;

6) en (X, τ_{cof}), para X infinito, $fr(A) = X - A$ si $A \in \tau_{cof}$, $fr(A) = A$ si $A \in \mathcal{C}_{cof}$ y $fr(A) = X$ en caso contrario;

7) en (X, τ_{coc}), para X no contable, $fr(A) = X - A$ si $A \in \tau_{coc}$, $fr(A) = A$ si $A \in \mathcal{C}_{coc}$ y $fr(A) = X$ en caso contrario;

8) en $(\mathbb{R}, \tau_{sca})$, para $A \subset \mathbb{R}$, es $fr(A) = (\overline{B}^{us} \cap \mathbb{Q}) - (\overset{\circ}{B}^{us} \cap \mathbb{Q})$.

4.5. Problemas

1.- Sea (X, τ) un espacio topológico, $A, B \subset X$ y $\{A_i \subset X\}_{i \in I}$. Probar:

(i) $x \in A'$ si y sólo si $x \in \overline{A - \{x\}}$;

(ii) si $A \cup B = X$, entonces $\overline{A} \cup \overset{\circ}{B} = X$; (iii) si $A \cap B = \emptyset$, entonces $\overline{A} \cap \overset{\circ}{B} = \emptyset$;

(iv) $A \in \tau$ si y sólo si $\big(\forall B \subset X,\ \text{es } A \cap B = \emptyset \Longleftrightarrow A \cap \overline{B} = \emptyset\big)$;

(v) $A \in \tau$ si y sólo si $A \cap \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$, para cada $B \subset X$. Y entonces, $\overline{\overline{B} \cap A} = \overline{B \cap A}$;

(vi) $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$, $\quad \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \subset \overset{\circ}{\overbrace{A \cup B}}$, $\quad (A \cap B)' \subset A' \cap B'$, $\quad \overline{A} - \overline{B} \subset \overline{A - B}$ y $\overset{\circ}{A} - \overset{\circ}{B} \supset \overset{\circ}{\overbrace{A - B}}$;

(vii) $\bigcup\limits_{i \in I} \overset{\circ}{A_i} \subset \overset{\circ}{\overbrace{\bigcup\limits_{i \in I} A_i}}$, $\quad \bigcap\limits_{i \in I} \overset{\circ}{A_i} \supset \overset{\circ}{\overbrace{\bigcap\limits_{i \in I} A_i}}$, $\quad \bigcup\limits_{i \in I} \overline{A_i} \subset \overline{\bigcup\limits_{i \in I} A_i}$, $\quad \bigcap\limits_{i \in I} \overline{A_i} \supset \overline{\bigcap\limits_{i \in I} A_i}$, $\quad \bigcup\limits_{i \in I} A_i' \subset (\bigcup\limits_{i \in I} A_i)'$ y $\bigcap\limits_{i \in I} A_i' \supset (\bigcap\limits_{i \in I} A_i)'$;

(viii) ¿pueden dos conjuntos diferentes poseer el mismo conjunto derivado? ¿el mismo interior? ¿la misma clausura? ¿la misma frontera? ¿y los cuatro a la vez?

2.- Sea X un conjunto y τ_1, τ_2 dos topologías sobre X, tales que $\tau_2 \subset \tau_1$. Con las notaciones obvias, probar que para cada $A \subset X$, se tiene $\overset{\circ}{A}^2 \subset \overset{\circ}{A}^1$ y $\overline{A}^1 \subset \overline{A}^2$. ¿Se pueden comparar sus operadores derivados?

3.- Sea (X, τ) un espacio topológico. Probar:

(i) $\overset{\circ}{A} = \{x \in X : A \in \mathcal{N}_x\}$;

(ii) si X no posee puntos aislados y $A \subset X$ es abierto, entonces A no posee puntos aislados;

(iii) si $x \in A$ es aislado en $\overline{A}$, entonces x es aislado en A. ¿Es cierto el recíproco?

(iv) si (X, τ) es T_1 y $x \in A'$, entonces A corta a cada entorno de x en un número infinito de puntos y el conjunto A' es cerrado;

(v) $x \in \overline{\{y\}}$ si y sólo si $\mathcal{N}_x \subset \mathcal{N}_y$. Luego, $\mathcal{N}_x = \mathcal{N}_y$, si y sólo si $\overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$;

(vi) (X, τ) es T_2 si y sólo si para cada $x \in X$, $\{x\} = \bigcap_{N \in \mathcal{N}_x} \overline{N}$.

$*$ **4.-** En (X, τ), un abierto A se llama *regular*, si $A = \overset{\circ}{\overline{A}}$ y un cerrado A se llama *regular* si $A = \overline{\overset{\circ}{A}}$. Probar:

(i) si A es cerrado (respectivamente, abierto), entonces $\overset{\circ}{A}$ (respectivamente, $\overline{A}$) es un abierto regular (respectivamente, un cerrado regular);

(ii) A es abierto regular si y sólo si $X - A$ es cerrado regular;

(iii) si A y B son abiertos regulares (respectivamente, cerrados regulares), es $A \subset B$ si y sólo si $\overline{A} \subset \overline{B}$ (respectivamente, $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$);

(iv) si A y B son abiertos regulares (respectivamente, cerrados regulares), entonces $A \cap B$ (respectivamente, $A \cup B$) es abierto regular (respectivamente, cerrado regular). En general $A \cup B$ (respectivamente, $A \cap B$) no es abierto regular (respectivamente, cerrado regular);

(v) en $(\mathbb{R}, \tau_{us})$, hay abiertos que no son regulares.

5.- Sea (X, τ) un espacio topológico y $A, B \subset X$. Se pide probar:

(i) $fr(A) = \emptyset$ si y sólo si A es abierto y cerrado a la vez;

(ii) $fr(\overset{\circ}{A}) \subset fr(A)$ y $fr(\overline{A}) \subset fr(A)$;

(iii) si $A \subset B$, ¿es $fr(A) \subset fr(B)$?;

(iv) si $fr(A) \cap fr(B) = \emptyset$, se verifica que $\overset{\circ}{\overbrace{A \cup B}} = \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}$, $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ y $fr(A \cap B) = (\overline{A} \cap fr(B)) \cup (fr(A) \cap \overline{B})$;

(v) en general, $fr(A \cup B) \subset fr(A) \cup fr(B)$. Si $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$, entonces se da la igualdad.

6.- Construir una tabla (con seis entradas) en que se relacionen los conceptos de conjunto abierto, cerrado, interior, clausura, frontera y entorno.

$*$ **7.-** Sea D denso en (X, τ). Probar:

(i) si $U \in \tau$, entonces $U \subset \overline{D \cap U}$; (ii) si $E \supset D$, entonces E es también denso;

(iii) si U es denso y abierto, entonces $D \cap U$ es denso;

(iv) la intersección finita de abiertos densos es abierto denso;

(v) si $\tau' \subset \tau$, entonces D también es denso en (X, τ').

8.- Sean $G_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > y + k\}$ y la topología $\tau = \{\emptyset, \mathbb{R}^2\} \cup \{G_k : k \in \mathbb{R}\}$. Calcular el interior, el derivado y la clausura de $\{(0, 0)\}$ y $\{(-x, x) : x \in \mathbb{R}\}$.

9.- En $([0, 1] \times [0, 1], \tau_{ord})$, donde la topología está inducida por el orden lexicográfico, calcular el interior, la clausura y la frontera de $\{(\frac{1}{n}, 0) : n \in \mathbb{N}\}$, $\{(1 - \frac{1}{n}, \frac{1}{2}) : n \in \mathbb{N}\}$, $\{(x, 0) : 0 < x < 1\}$, $\{(x, \frac{1}{2}) : 0 < x < 1\}$ y $\{(\frac{1}{2}, y) : 0 < y < 1\}$.

10.- Sea $(\mathbb{N}, \tau_{ap})$ la topología de Appert, definida en el problema 24 de 2.5. Caracterizar sus operadores interior y clausura y estudiar los axiomas de separación.

11.- En (X, τ), se dice que A es:

(a) un F_σ-*conjunto*, si es la unión de una familia contable de conjuntos cerrados y

(b) un G_δ-*conjunto* si es la intersección de una familia contable de conjuntos abiertos.

Se pide probar:

(i) todo cerrado es un F_σ-conjunto y todo abierto es un G_δ-conjunto;

(ii) en $(\mathbb{R}, \tau_u)$, $[0, 1]$ es un F_σ-conjunto y un G_δ-conjunto;

(iii) en $(\mathbb{R}, \tau_u)$, $\mathbb{Q}$ es un F_σ-conjunto, pero no es un G_δ-conjunto;

(iv) si A es un F_σ-conjunto, existe una familia contable de cerrados $\{F_n : n \in \mathbb{N}\}$, tal que $F_k \subset F_{k+1}$ para cada $k \in \mathbb{N}$, y de forma que $A = \displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$;

(v) si A es un G_δ-conjunto, existe una familia contable de abiertos $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$, tal que $U_k \supset U_{k+1}$ para cada $k \in \mathbb{N}$, y de forma que $A = \displaystyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$;

(vi) la unión contable y la intersección finita de F_σ-conjuntos, es un F_σ-conjunto;

(vii) la unión finita y la intersección contable de G_δ-conjuntos, es un G_δ-conjunto;

(viii) el complementario de un F_σ-conjunto es un G_δ-conjunto y viceversa;

(ix) ¿quiénes son los G_δ-conjuntos en $(\mathbb{R}, \tau_{cof})$?;

(x) en $(\mathbb{R}, \tau_{coc})$, todo F_σ-conjunto es cerrado y todo G_δ-conjunto es abierto;

(xi) en el espacio métrico (X, d), todo cerrado es un G_δ-conjunto y todo abierto es un F_σ-conjunto.

12.- Sea X un conjunto y una función $\Phi\colon \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$, tal que:

(a) para cada $A \subset X$, $A \subset \Phi(A)$;

(b) para cada $A, B \subset X$, $\Phi(A \cup B) = \Phi(A) \cup \Phi(B)$;

(c) $\Phi(\emptyset) = \emptyset$;

(d) para cada $A \subset X$, $\Phi(\Phi(A)) = \Phi(A)$.

Una tal aplicación se llama un *operador clausura de Kuratowski*. Se pide probar:

(i) si se definen los cerrados como los $A \subset X$ tales que $A = \Phi(A)$, queda definida una topología sobre X, cuyo operador clausura es precisamente Φ;

(ii) si X es infinito y se define $\Phi(A) = A$ si A es finito y $\Phi(A) = X$ si A es infinito. Comprobar que es un operador clausura de Kuratowski, y ver que topología genera;

(iii) lo mismo si $X = \mathbb{R}$ y $\Phi(A) = (-\infty, \sup(A)]$;

(iv) lo mismo si para $B \subset X$, $\Phi(A) = A \cup B$, si A es no vacío. Describir los casos en que $B = \emptyset$ y $B = X$;

(v) lo mismo si $X = \mathbb{R}$ y $\Phi(A) = \overline{A}^{us}$ si A está acotado y $\Phi(A) = \overline{A}^{u} \cup \{0\}$ si A no está acotado;

(v) sean Φ_1 y Φ_2 dos operadores clausura de Kuratowski sobre X y sean τ_1 y τ_2 las topologías generadas por ellos. Con las notaciones obvias, se supone que para cada $A \subset X$, es $\Phi_2(\Phi_1(A)) \in \mathcal{C}_1$. Se pide probar:

(a) $\Phi_2 \circ \Phi_1$ es un operador clausura de Kuratowski;

(b) $\Phi_2 \circ \Phi_1(A) = \bigcap\{F \subset X : A \subset F, F \in \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2\}$;

(c) $\Phi_1 \circ \Phi_2(A) \subset \Phi_2 \circ \Phi_1(A)$, para cada $A \subset X$.

13.- Sea X un conjunto y una función $\varphi\colon \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$, tal que:

(a) para cada $A \subset X$, $A \supset \varphi(A)$;

(b) para cada $A, B \subset X$, $\varphi(A \cap B) = \varphi(A) \cap \varphi(B)$;

(c) $\varphi(X) = X$;

(d) para cada $A \subset X$, $\varphi(\varphi(A)) = \varphi(A)$.

Una tal aplicación se llama un *operador interior*. Se pide probar:

(i) $\tau_\varphi = \{A \subset X : A = \varphi(A)\}$ es una topología sobre X, cuyo operador interior es precisamente φ;

(ii) si X es infinito y se define $\varphi(A) = A$ si $X - A$ es finito y $\varphi(A) = \emptyset$ en otro caso. Comprobar que se trata de un operador interior, y ver que topología genera;

(iii) lo mismo si $X = \mathbb{R}$ y $\varphi(A) = (\sup(\mathbb{R} - A), \infty)$;

(iv) lo mismo si para $B \subset X$, $\varphi(A) = A \cap (X - B)$, si $A \neq X$. Describir los casos en que $B = \emptyset$ y $B = X$.

14.- Sea (X, τ) un espacio topológico. Una familia de conjuntos $\{A_i : i \in I\}$ se llama *localmente finita*, si cada $x \in X$ posee un entorno que corta sólo a una cantidad finita de los elementos de la familia. Se pide probar:

(i) si $\{A_i : i \in I\}$ es localmente finita, también lo es la familia $\{\overline{A_i} : i \in I\}$;

(ii) si $\{A_i : i \in I\}$ es localmente finita, $\bigcup\limits_{i \in I} \overline{A_i} = \overline{\bigcup\limits_{i \in I} A_i}$;

(iii) la unión de una familia localmente finita de cerrados, es un conjunto cerrado;

(iv) si la familia de conjuntos $\{A_i : i \in I\}$ verifica que $\bigcup\limits_{i \in I} \overline{A_i} \in \mathcal{C}$, probar que entonces es $\bigcup\limits_{i \in I} \overline{A_i} = \overline{\bigcup\limits_{i \in I} A_i}$.

15.- Sea $(\mathbb{N}, \tau)$ el espacio topológico del problema 21 en el apartado 2.5. Calcular el interior, el derivado y la clausura de los conjuntos $\{n, n+1, \dots, n+p\}$ y $\{2n : n \in \mathbb{N}\}$. Caracterizar los operadores clausura e interior.

16.- Sea (X, τ) el espacio topológico del problema 22 del apartado 2.5. Calcular el interior, el derivado y la clausura de $\{f \in X : f(0) = 0\}$ y $\{f \in X : f(0) = 1\}$. Caracterizar el operador clausura en este espacio.

17.- Sea $(\mathbb{Z}, \tau)$ el espacio topológico del problema 19 del apartado 2.5. Calcular el interior, la clausura y el derivado del conjunto de los números primos, $\mathbb{N}$ y el conjunto de los números pares.

$*$ **18.-** Sea (X, τ) el espacio topológico del problema 10 en el apartado 3.4. Calcular el interior, el derivado y la clausura de los conjuntos $\{(\frac{1}{2}, \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\}$, $\{(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) : n > 1\}$ y $\{(x, 1) : 0 \leq x < \frac{1}{2}\} \cup \{(\frac{1}{2}, 0)\}$.

19.- Sea el espacio métrico $([0,1], d_u)$. Se divide $[0,1]$ en tres intervalos de la misma amplitud, se elimina el intervalo abierto central (que se llamará intervalo abierto de tipo 1) $\delta = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ y se conservan los intervalos cerrados (que se llamarán de tipo 1) $\Delta_0 = [0, \frac{1}{3}]$ y $\Delta_1 = [\frac{2}{3}, 1]$. Se divide cada intervalo cerrado de tipo 1 en tres intervalos de la misma amplitud. Se eliminan de nuevo los intervalos abiertos centrales (intervalos abiertos de tipo 2), $\delta_0 = (\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$ y $\delta_1 = (\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$ respectivamente, y se conservan los intervalos cerrados (de tipo 2) resultantes $\Delta_{00} = [0, \frac{1}{9}]$, $\Delta_{01} = [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}]$, $\Delta_{10} = [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}]$ y $\Delta_{11} = [\frac{8}{9}, 1]$. Se continúa de este modo el proceso, obteniendo para cada $n \in$ N, 2^n intervalos cerrados $\Delta_{i_1 \cdots i_n}$ de tipo n donde i_j es 0 ó 1. Cada intervalo cerrado de tipo n se divide en tres partes de la misma amplitud, conservando dos intervalos cerrados $\Delta_{i_1 \cdots i_n 0}$ y $\Delta_{i_1 \cdots i_n 1}$ (llamados intervalos cerrados de tipo $n+1$) y eliminando cada intervalo abierto $\delta_{i_1 \cdots i_n}$ de tipo $n+1$ que queda entre ellos.
Sea C_n la reunión de los intervalos cerrados de tipo n y $C = \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} C_n$. C se llama *conjunto perfecto de Cantor, discontinuo de Cantor* o *conjunto ternario de Cantor.* Se pide probar:

(i) C es cerrado y no vacío en $([0,1], d_u)$, luego es compacto y completo;

(ii) la suma de las longitudes de todos los intervalos abiertos eliminados en el proceso es 1: en este sentido (el de la *medida*), el conjunto de Cantor es pequeño;

(iii) todo punto de C posee una representación ternaria única $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$ donde $a_n = 0, 2$.
Se concluye que C es un conjunto no contable: en este sentido (el del *cardinal*), el conjunto de Cantor es grande;

(iv) C no posee puntos aislados en $[0,1]$ y $\overset{\circ}{C} = \emptyset$.

Capítulo 5

Numerabilidad

En este capítulo, se definen propiedades asociadas a espacios topológicos que envuelven en algún sentido la contabilidad.

De los axiomas de numeración aquí estudiados, el más antiguo es el de separabilidad, debido a Fréchet en 1906. En 1914, Hausdorff introdujo el primer y segundo axiomas de contabilidad. De esos dos, el primero fue ya sugerido en 1906 por Riesz, como una exigencia razonable impuesta a espacios generales. La propiedad de Lindelöf (aunque no bajo este nombre) se usó durante algún tiempo en estudios relacionados con la compacidad y parece que fue introducida por Kuratowski y Sierpinski en 1921.

Una de las más importantes consecuencias del primer axioma de numerabilidad es que, en espacios que satisfacen dicha propiedad, *las sucesiones son adecuadas*, para utilizar la frase de Kelley [Ke]: esto significa que en este tipo de espacios no es preciso introducir otro tipo de *redes* más generales para obtener resultados básicos.

5.1. Espacios primero y segundo numerables

Definición 5.1. Un espacio (X, τ) se dice *primero numerable* o C_I, si todo punto posee una base local contable.

Proposición 5.1. *(X, τ) es C_I si verifica cualquiera de la propiedades equivalentes:*

(i) para cada $x \in X$, existe una base local contable;

(ii) para cada $x \in X$, existe una base local contable y decreciente;

(iii) para cada $x \in X$, existe una base local contable y decreciente formada por conjuntos abiertos.

Demostración: (i) $\Rightarrow$ (ii) Si $\mathcal{B}_x = \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ es la base local contable, también es base local $\mathcal{B}'_x = \{C_n : n \in \mathbb{N}\}$, donde $C_n = B_1 \cap \cdots \cap B_n$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Si $\mathcal{B}_x = \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ es la base local contable decreciente, también es base local $\mathcal{B}'_x = \{\overset{\circ}{B}_n : n \in \mathbb{N}\}$ (contable y decreciente). ∎

Ejemplos 5.1. Para los ejemplos estudiados, tenemos:

1) (X, τ_{ind}) es C_I, al elegir para todo $x \in X$, $\mathcal{B}_x = \{X\}$;

2) (X, τ_{dis}) es C_I, al tomar para todo $x \in X$, $\mathcal{B}_x = \{\{x\}\}$;

3) $(\mathbb{R}, \tau_{cof})$ y $(\mathbb{R}, \tau_{coc})$ no son C_I. En efecto, si $(\mathbb{R}, \tau_{cof})$ lo fuera, para cada $x \in X$ existiría una base local $\mathcal{B}_x = \{B_n^x\}_{n \in \mathbb{N}}$. Si $x \neq y$, como $x \in X - \{y\} \in \tau_{cof}$, existiría $B_{n_y}^x \in \mathcal{B}_x$ tal que $x \in B_{n_y}^x \subset X - \{y\}$. Se deduce que $\{x\} = \bigcap\limits_{x \neq y} B_{n_y}^x$, luego, $X - \{x\} = \bigcup\limits_{x \neq y} (X - B_{n_y}^x)$ es contable (por ser cada $X - B_{n_y}^x$ finito y la unión contable), en contra de la hipótesis;

4) $(X = \{a, b\}, \tau_{sier})$ es C_I, al escoger $\mathcal{B}_a = \{\{a\}\}$ y $\mathcal{B}_b = \{X\}$;

5) (X, τ_A) es C_I, al elegir para todo $x \in X$, $\mathcal{B}_x = \{\{x\} \cup A\}$;

6) (X, τ^A) es C_I, al tomar para $x \in A$, $\mathcal{B}_x = \{X\}$ y para $x \notin A$, $\mathcal{B}_x = \{\{x\}\}$;

7) $(\mathbb{R}, \tau_u)$ es C_I, al escoger para cada $x \in \mathbb{R}$, $\mathcal{B}_x = \{(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\}$;

8) $(\mathbb{R}, \tau_{sor})$ es C_I, al elegir para cada $x \in \mathbb{R}$, $\mathcal{B}_x = \{[x, x + \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\}$;

9) $(\mathbb{R}, \tau_{kol})$ es C_I, al tomar para cada $x \in \mathbb{R}$, $\mathcal{B}_x = \{(x - \frac{1}{n}, \infty) : n \in \mathbb{N}\}$;

10) $(\mathbb{R}, \tau_{sca})$ es C_I, al escoger para $x \in \mathbb{Q}$, $\mathcal{B}_x = \mathcal{B}_x^{us}$ y para $x \in \mathbb{I}$, $\mathcal{B}_x = \{\{x\}\}$;

11) los espacios métricos son siempre C_I, pues para cada $x \in X$, se elige la base local $\mathcal{B}_x = \{B(x, \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\}$.

Este axioma está íntimamente ligado a la noción de sucesión:

Definición 5.2. Una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ *converge* a x en (X, τ), y se denota $\{x_n\} \to x$, si para cada $N \in \mathcal{N}_x$, existe $n_N \in \mathbb{N}$, tal que para cada $n \geq n_N$, es $x_n \in N$.

Teorema 5.2. *En (X, τ) se verifica:*

(i) si existe una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ que converge a x, entonces $x \in \overline{A}$;

(ii) si $A \in \mathcal{C}$, entonces para cada sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ que converge a x, es $x \in A$;

(iii) si $A \in \tau$, para cada sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que converge a $x \in A$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que para cada $n \geq n_0$, es $x_n \in A$;

(iv) si (X,τ) es T_2, los límites de sucesiones son únicos.

Además si (X,τ) es C_I, todas las implicaciones anteriores son equivalencias.

Demostración: (i) La primera implicación es inmediata. Por otro lado, si (X,τ) es C_I, sea $\mathcal{B}_x = \{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la base local contable y decreciente que existe. Sea $x \in \overline{A}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, como $B_n \cap A \neq \emptyset$, existe $x_n \in B_n \cap A$. Hemos construido una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ que converge a x por la hipótesis de decrecimiento. Esta implicación no es cierta si el espacio no es C_I: en $(\mathbb{R},\tau_{coc})$ sólo convergen las sucesiones semiconstantes. Es claro que $3 \in \overline{[0,1]} = \mathbb{R}$, pero no existe ninguna sucesión en $[0,1]$ que converja a 3.
(iv) La primera implicación es inmediata. Por otro lado, si (X,τ) es C_I y las sucesiones convergen de manera única, sean $x \neq y$ y $\mathcal{B}_x = \{B_n^x\}_{n\in\mathbb{N}}$ y$\mathcal{B}_y = \{B_n^y\}_{n\in\mathbb{N}}$ sus bases locales contables y decrecientes respectivas. Supongamos que $B_n^x \cap B_n^y \neq \emptyset$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Eligiendo $x_n \in B_n^x \cap B_n^y$, se obtiene una sucesión que claramente converge a x y a y, contra la hipótesis. Luego, debe existir $n \in \mathbb{N}$, con $B_n^x \cap B_n^y = \emptyset$, y por lo tanto el espacio es de Hausdorff. Esta implicación no es cierta si el espacio no es C_I: en $(\mathbb{R},\tau_{coc})$ sólo convergen las sucesiones semiconstantes (es decir, lo hacen de manera única), pero el espacio no es de Hausdorff. ■

Definición 5.3. (X,τ) es *segundo numerable* o C_{II}, si existe una base contable β de τ.

Proposición 5.3. *Si (X,τ) es C_{II}, entonces es C_I. Ambas nociones coinciden en el caso de que X sea un conjunto contable.*

Ejemplos 5.2. Para los ejemplos estudiados, se cumple:

1) (X,τ_{ind}) es C_{II}, al elegir $\beta = \{X\}$;

2) (X,τ_{dis}) es C_{II} si y sólo si X es contable;

3) $(\mathbb{R},\tau_{cof})$ y $(\mathbb{R},\tau_{coc})$ no son C_I, luego tampoco C_{II};

4) $(X=\{a,b\},\tau_{sier})$ es C_{II};

5) (X,τ_A) es C_{II} si y sólo si $X-A$ es contable;

6) (X,τ^A) es C_{II} si y sólo si $X-A$ es contable;

7) $(\mathbb{R},\tau_u)$ es C_{II}, al elegir $\beta_{us} = \{(a,b) : a,b \in \mathbb{Q}\}$;

8) $(\mathbb{R}, \tau_{sor})$ no es C_{II}. En efecto, si $\beta = \{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ fuese una base de τ_{sor}, para cada $x \in \mathbb{R}$ existiría $B_n^x \in \beta$ tal que $B_n^x \subset [x, x+1)$. La aplicación $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \beta$ dada por $f(x) = B_n^x$ es claramente inyectiva, lo que contradice la contabilidad de β;

9) $(\mathbb{R}, \tau_{kol})$ es C_{II}, al tomar $\beta_{kol} = \{(a, \infty) : a \in \mathbb{Q}\}$;

10) $(\mathbb{R}, \tau_{sca})$ no es C_{II}, pues si $x \in \mathbb{I}$, es $\{x\} \in \beta$, para cualquier base de la topología.

5.2. Espacios de Lindelöf

Definición 5.4. Un *cubrimiento* de X es una familia de conjuntos $\mathcal{U} = \{U_i : i \in I\}$, tales que $X \subset \bigcup\limits_{i\in I} U_i$. Un *subrecubrimiento* de $\mathcal{U}$ es una subfamila $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ que aún cubre X.

Definición 5.5. Un espacio (X, τ) es *de Lindelöf*, si todo cubrimiento por abiertos de X posee un subrecubrimiento contable (la definición sigue siendo válida si se reemplazan los abiertos por abiertos básicos).

Proposición 5.4. *Si (X, τ) es C_{II}, entonces es de Lindelöf.*

Ejemplos 5.3. En los espacios topológicos conocidos, tenemos:

1) (X, τ_{ind}) es de Lindelöf;

2) (X, τ_{dis}) es de Lindelöf si y sólo si X es contable;

3) $(\mathbb{R}, \tau_{cof})$ y $(\mathbb{R}, \tau_{coc})$ son de Lindelöf;

4) $(X = \{a, b\}, \tau_{sier})$ es C_{II}, luego de Lindelöf;

5) (X, τ_A) es de Lindelöf si y sólo si $X - A$ es contable;

6) (X, τ^A) es de Lindelöf;

7) $(\mathbb{R}, \tau_u)$ es C_{II}, luego de Lindelöf;

8) $(\mathbb{R}, \tau_{sor})$ es de Lindelöf;

9) $(\mathbb{R}, \tau_{Kol})$ es C_{II}, luego de Lindelöf;

10) $(\mathbb{R}, \tau_{sca})$ es de Lindelöf.

5.3. Espacios separables

La siguiente definición generaliza la situación de $\mathbb{Q}$ en la recta real, que es un conjunto *pequeño* en cardinal, pero *topológicamente grande*, al ser denso:

Definición 5.6. Un espacio (X, τ) es *separable* si existe $D \subset X$, denso y contable.

Proposición 5.5. *Si* (X, τ) *es* C_{II}*, entonces es separable.*

Ejemplos 5.4. Para los ejemplos conocidos:

1) (X, τ_{ind}) es separable, pues todo conjunto no vacío es denso;

2) (X, τ_{dis}) es separable si y sólo si X es contable;

3) $(\mathbb{R}, \tau_{cof})$ es separable, pues $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{R}$;

4) $(\mathbb{R}, \tau_{coc})$ no es separable, pues los conjuntos contables son cerrados;

5) $(X = \{a, b\}, \tau_{sier})$ es C_{II}, luego separable;

6) (X, τ_A) es separable, pues si $a \in A$, es $\overline{\{a\}} = X$;

7) (X, τ^A) es separable si y sólo si $X - A$ es contable;

8) $(\mathbb{R}, \tau_{us})$ es C_{II}, luego separable;

9) $(\mathbb{R}, \tau_{sor})$ es separable, pues $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$;

10) $(\mathbb{R}, \tau_{kol})$ es C_{II}, luego separable;

11) $(\mathbb{R}, \tau_{sca})$ no es separable, pues si $\overline{D} = \mathbb{R}$, debe ser $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$.

Proposición 5.6. *Si* (X, τ_2) *es separable y* $\tau_1 \subset \tau_2$*, entonces* (X, τ_1) *es separable.*

Ejemplos 5.5. No existen relaciones entre los axiomas de separación, aparte de las que ya se han señalado:

1) $(\mathbb{R}, \tau_{dis})$: C_I, no C_{II}, no Lindelöf, no separable, metrizable.

2) $(\mathbb{R}, \tau_{ind})$: C_I, C_{II}, Lindelöf, separable, no metrizable (pues no es T_2).

3) $(\mathbb{R}, \tau_{cof})$: no C_I, no C_{II}, Lindelöf, separable, no metrizable (pues no es C_I).

4) $(\mathbb{R}, \tau_{coc})$: no C_I, no C_{II}, Lindelöf, no separable, no metrizable (pues no es C_I).

5) (X, τ_{sier}): C_I, C_{II}, Lindelöf, separable, no metrizable (pues no es T_2).

6) (X, τ_A) (A propio): C_I, C_{II} si y sólo si $X - A$ contable, Lindelöf si y sólo si $X - A$ contable, separable, no metrizable.

7) (X, τ^A) (A propio): C_I, C_{II} si y sólo si $X - A$ contable, Lindelöf, separable si y sólo si $X - A$ contable, no metrizable.

8) $(\mathbb{R}, \tau_{kol})$: C_I, C_{II}, Lindelöf, separable, no metrizable (pues no es T_2).

9) $(\mathbb{R}, \tau_{scat})$: C_I, no C_{II}, Lindelöf, no separable, no metrizable.

10) $(\mathbb{R}, \tau_{sor})$: C_I, no C_{II}, Lindelöf, separable, no metrizable.

5.4. Problemas

$*$ **1.-** En un espacio metrizable (X, τ), probar que las propiedades de Lindelöf, la separabilidad y la propiedad C_{II} son equivalentes: ésta puede ser una manera de detectar espacios no metrizables.

2.- Sea (X, τ) un espacio topológico, tal que existe una familia no contable de conjuntos abiertos disjuntos dos a dos. Probar que (X, τ) es no separable.

3.- Sea (X, τ) un espacio separable y T_2. Probar

(i) si (X, τ) es C_I, entonces $Card(X) \leq c$;

(ii) si (X, τ) es C_{II}, entonces $Card(\tau) \leq c$.

$*$ **4.-** Dada una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sobre (X, τ), se dice que tiene a x como *punto de aglomeración*, $\{x_n\} \succ x$, si para cada $N \in \mathcal{N}_x$ y $n \in \mathbb{N}$, existe $n_N \geq n$, tal que $x_{n_N} \in N$. Si llamamos:

$$\text{lím}(\{x_n\}) = \{x \in X : \{x_n\} \to x\} \quad \text{y} \quad \text{adh}(\{x_n\}) = \{x \in X : \{x_n\} \succ x\},$$

se piden probar las siguientes propiedades:

(i) $\text{lím}(\{x_n\})$ y $\text{adh}(\{x_n\})$ son conjuntos cerrados y $\text{lím}(\{x_n\}) \subset \text{adh}(\{x_n\})$;

(ii) $\text{adh}(\{x_n\}) = \displaystyle\bigcap_{m \in \mathbb{N}} \overline{\{x_n : n \geq m\}}$;

(iii) si $\tau_1 \subset \tau_2$, entonces $\text{lím}_{\tau_2}(\{x_n\}) \subset \text{lím}_{\tau_1}(\{x_n\})$ y $\text{adh}_{\tau_2}(\{x_n\}) \subset \text{adh}_{\tau_1}(\{x_n\})$;

(iv) si $\{x_{\varphi(n)}\}$ es una subsucesión de $\{x_n\}$, se verifica que $\text{lím}(\{x_n\}) \subset \text{lím}(\{x_{\varphi(n)}\})$ y $\text{adh}(\{x_n\}) \supset \text{adh}(\{x_{\varphi(n)}\})$.

5.- Sean (X, τ_1) y (X, τ_2) espacios topológicos C_I. Probar que $\tau_1 = \tau_2$ si y sólo si (toda sucesión converge en $(X, \tau_1) \Longleftrightarrow$ converge en (X, τ_2) y lo hace al mismo punto).
Esto no es cierto si las topologías no son C_I. Por ello, *las sucesiones no son adecuadas en espacios topológicos* (ver [Ke] y el ejercicio 7).

6.- Sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión dada por $x_n = 2n - 1$ en el espacio topológico $(\mathbb{N}, \tau_{cof})$. Probar que $\lim(\{x_n\}) = \text{adh}(\{x_n\}) = \mathbb{N}$.

7.- Sea $(\mathbb{R}, \tau_{coc})$. Probar que $3 \in \overline{[0,1]}$. ¿Existe alguna sucesión en $[0,1]$ que converja a 3?

8.- En (X, τ), se dice que $x \in X$ es un *punto de condensación* u *ω-punto límite* de $A \subset X$, si para cada $N \in \mathcal{N}_x$, $N \cap A$ es no contable. Se denota por $\widehat{A}$ la familia de los puntos de condensación de A. Probar:

(i) si $A \subset B$, entonces $\widehat{A} \subset \widehat{B}$. Además $\widehat{A} \subset A'$;

(ii) $\widehat{A}$ es un conjunto cerrado;

(iii) $\widehat{A \cup B} = \widehat{A} \cup \widehat{B}$ y $\widehat{\widehat{A}} \subset \widehat{A}$;

(iv) si A no es contable y (X, τ) es Lindelöf, entonces $\widehat{A}$ es no vacío;

(v) si (X, τ) es C_{II} y $A \subset X$, entonces $A - \widehat{A}$ es contable, luego $\widehat{A - \widehat{A}} = \emptyset$ y $\widehat{A} = \widehat{\widehat{A}}$;

(vi) concluir el *teorema de Cantor-Bendixon*: un espacio C_{II} puede descomponerse como unión de dos conjuntos disjuntos, uno de ellos perfecto (A es *perfecto*, cuando es cerrado y $A \subset A'$) y el otro contable.

9.- Sea X un conjunto no contable y τ una topología sobre X, tal que $\tau_{cof} \subset \tau$. Probar

(i) si β es base de τ, entonces $X = \bigcup_{B \in \beta} (X - B)$;

(ii) si X es no contable y τ es τ_{cof} o τ_{coc}, entonces τ no puede tener una base contable.

10.- Probar que en un espacio topológico la combinación de dos cualesquiera de las dos propiedades siguientes no implica la tercera: C_I, separable y Lindelöf.

11.- En cada uno de los siguientes espacios topológicos, estudiar las sucesiones convergentes, los axiomas de numeración y la metrizabilidad:

(i) el espacio discreto, el indiscreto, el A-inclusión, el A-exclusión, el espacio de Sierpinski, el de Appert, el de Fort;

(ii) la recta cofinita, la connumerable, la de Kolmogorov, la scattered, la de Sorgenfrey, la enlazada;

(iii) el plano de Moore y el plano Slotted.

Capítulo 6

Continuidad

El concepto de continuidad se basa en el de proximidad.

6.1. Aplicaciones continuas

Definición 6.1. Una función entre espacios topológicos $f\colon (X,\tau_X) \longrightarrow (Y,\tau_Y)$ es *continua* en a, si para todo entorno $M \in \mathcal{N}^Y_{f(a)}$, existe $N \in \mathcal{N}^X_a$, tal que $f(N) \subset M$. Esta definición sigue siendo válida si se reemplazan los entornos por entornos básicos. Una función es *continua en A* si lo es en cada punto de A.

Proposición 6.1. *Sea $f\colon (X,\tau_X) \longrightarrow (Y,\tau_Y)$ una función. Son equivalentes:*

(i) f es continua en X;

(ii) para cada $x \in X$ y cada entorno $M \in \mathcal{N}^Y_{f(x)}$, es $f^{-1}(M) \in \mathcal{N}^X_x$;

(iii) para cada $x \in X$ y cada $M \in \mathcal{B}^Y_{f(x)}$ (fijada una base local), es $f^{-1}(M) \in \mathcal{N}^X_x$;

(iv) para cada $U \in \tau_Y$, es $f^{-1}(U) \in \tau_X$;

(v) para cada $U \in \beta_Y$ (una vez elegida una base), es $f^{-1}(U) \in \tau_X$;

(vi) para cada $F \in \mathcal{C}_Y$, es $f^{-1}(F) \in \mathcal{C}_X$;

(vii) para cada $A \subset X$, es $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$;

(viii) para cada $B \subset Y$, es $f^{-1}(\overline{B}) \supset \overline{f^{-1}(B)}$;

(ix) para cada $B \subset Y$, es $f^{-1}(\overset{\circ}{B}) \subset \overbrace{f^{-1}(B)}^{\circ}$.

Ejemplos 6.1. Algunos ejemplos de funciones continuas son:

1) para cada espacio (Y, τ_Y) y toda función f, $f\colon (X, \tau_{dis}) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ es continua;

2) para cada espacio (X, τ_X) y toda función f, $f\colon (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_{ind})$ es continua;

3) toda aplicación constante $f\colon (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ es continua;

4) sean $f\colon (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ continua y las topologías $\tau_X \subset \tau'_X$ y $\tau'_Y \subset \tau_Y$. También es continua la aplicación $f\colon (X, \tau'_X) \longrightarrow (Y, \tau'_Y)$.

Proposición 6.2. *Sean $f\colon (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ y $g\colon (Y, \tau_Y) \longrightarrow (Z, \tau_Z)$. Se verifica:*

(i) si f es continua en $a \in X$ y g es continua en $f(a)$, entonces $g \circ f$ es continua en a;

(ii) si f es continua en X y g es continua en Y, entonces $g \circ f$ es continua en X.

6.2. Algunas propiedades de funciones continuas

6.2.1. Continuidad y espacios Hausdorff

Lema 6.3. *Si $f, g\colon (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ son aplicaciones continuas e (Y, τ_Y) es T_2, entonces $A = \{x \in X : f(x) = g(x)\} \in \mathcal{C}_X$.*

Contraejemplo 6.1. El lema 6.3 no es cierto en general: $f, g\colon (\mathbb{R}, \tau_{ind}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \tau_{ind})$ son continuas ($f = 1_{\mathbb{R}}$ y $g = -1_{\mathbb{R}}$), pero el conjunto del lema 6.3, $A = \{0\} \notin \mathcal{C}_{ind}$.

Corolario 6.4. ***(Principio de prolongación de las identidades)*** *Sean dos aplicaciones continuas $f, g\colon (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ e (Y, τ_Y) T_2. Si D es denso en X y $f|_D = g|_D$, entonces $f = g$.*

Contraejemplo 6.2. El anterior principio no es cierto en general: si $f = 1_{\mathbb{R}}$ y $g(x) = x\chi_{\mathbb{Q}}(x)$, $f, g\colon (\mathbb{R}, \tau_{us}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \tau_{ind})$, ambas son continuas, $f|_{\mathbb{Q}} = g|_{\mathbb{Q}}$, pero no son aplicaciones iguales.

Contraejemplo 6.3. Los axiomas T_1 y T_2 no se conservan por aplicaciones continuas: la aplicación continua $1_{\mathbb{R}}\colon (\mathbb{R}, \tau_{dis}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \tau_{ind})$ lleva un espacio T_1 y T_2 en otro que no lo es.

6.2.2. Continuidad secuencial

Definición 6.2. Una función $f\colon (X,\tau_X)\longrightarrow(Y,\tau_Y)$ es *secuencialmente continua*, si dada una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en X que converge a un punto $a\in X$, entonces $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $f(a)\in Y$.

Proposición 6.5. *Una función continua es secuencialmente continua. Si (X,τ_X) es C_I, ambos conceptos de continuidad son equivalentes.*

Demostración: La primera parte es sencilla. Sea (X,τ_X) C_I y $f\colon (X,\tau_X)\longrightarrow(Y,\tau_Y)$ secuencialmente continua. Dado $x\in\overline{A}$, el teorema 5.2 garantiza que existe $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset A$ tal que $\{x_n\}\to x$. Por hipótesis, es $\{f(x_n)\}\to f(x)$, luego $f(x)\in\overline{f(A)}$. ■

Contraejemplo 6.4. Esto no es cierto en general: $1_{\mathbb{R}}\colon(\mathbb{R},\tau_{coc})\longrightarrow(\mathbb{R},\tau_{dis})$ es secuencialmente continua, pero no es continua.

6.2.3. Continuidad y numerabilidad

Proposición 6.6. *La imagen continua de un espacio separable (respectivamente, de Lindelöf) es separable (respectivamente, de Lindelöf).*

Contraejemplo 6.5. Esto no sucede con los axiomas C_I y C_{II}: $1_{\mathbb{R}}\colon(\mathbb{R},\tau_{us})\longrightarrow(\mathbb{R},\tau_{cof})$ es continua y lleva un espacio C_I y C_{II} en otro que no lo es.

6.2.4. Criterio de Hausdorff

Proposición 6.7. ***(Criterio de Hausdorff de comparación de topologías)*** *Dos topologías sobre X verifican $\tau_2\subset\tau_1$ si y sólo si la identidad, $1_X\colon(X,\tau_1)\longrightarrow(X,\tau_2)$ es continua.*

6.3. Problemas

1.- Dado un espacio topológico (X,τ), se introducen los conjuntos

$$C(X)=\{f\colon(X,\tau)\longrightarrow(\mathbb{R},\tau_{us}),\ f\ \text{continua}\}\ \text{y}\ C^*(X)=\{f\in C(X):f\ \text{es acotada}\}.$$

Se definen las funciones con dominio X y codominio $\mathbb{R}$, para $x\in X$ y $f,g\colon X\longrightarrow\mathbb{R}$

(a) la *suma*: $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$,

(b) el *producto*: $(f.g)(x)=f(x).g(x)$,

(c) el *producto por un escalar* $a\in\mathbb{R}$: $(a.f)(x)=a.f(x)$,

(d) el *cociente*: si $f(x) \neq 0$ para cada $x \in X$, $\frac{1}{f}(x) = \frac{1}{f(x)}$,

(e) el *valor absoluto*: $|f|(x) = |f(x)|$, y

(f) las funciones *máximo y mínimo*: $m(x) = \text{mín}\{f(x), g(x)\}$ y $M(x) = \text{máx}\{f(x), g(x)\}$.

Se pide probar las siguientes propiedades:

(i) las anteriores operaciones son internas en $C(X)$ y $C^*(X)$;

(ii) $C(X)$ y $C^*(X)$ son álgebras sobre $\mathbb{R}$;

(iii) $C^*(X)$ es un espacio vectorial normado, con las operaciones suma y producto escalar y la norma $\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in X\}$;

(iv) $C(X)$ y $C^*(X)$ son retículos con el orden parcial: $f \leq g$ si y sólo si $f(x) \leq g(x)$, para cada $x \in X$;

(v) dados los espacios (X, τ_X) e (Y, τ_Y), toda aplicación continua $f\colon (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ induce un homomorfismo entre las álgebras asociadas $F_f\colon C(Y) \longrightarrow C(X)$ (respectivamente, $F_f^*\colon C^*(Y) \longrightarrow C^*(X)$).

2.- En un espacio topológico (X, τ), probar:

(i) $\tau = \tau_{dis}$ si y sólo si para todo (Y, τ_Y) y toda aplicación $f\colon (X, \tau) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$, f es continua;

(ii) $\tau = \tau_{ind}$ si y sólo si para todo (Y, τ_Y) y toda aplicación $f\colon (Y, \tau_Y) \longrightarrow (X, \tau)$, f es continua.

$*$ **3.-** Sea $f\colon (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ una aplicación continua y sobreyectiva. Probar que todo abierto de (Y, τ_Y) es la imagen por f de un abierto saturado ($U \subset X$ es *saturado* si existe $V \subset Y$ tal que $U = f^{-1}(V)$) de (X, τ_X). Probar la propiedad análoga para cerrados.

4.- Si χ_A es la función característica de A, probar

(i) $\chi_A\colon (X, \tau) \longrightarrow (\mathbb{R}, \tau_{us})$ es continua en x si y sólo si $x \notin fr(A)$;

(ii) $\chi_A\colon (X, \tau) \longrightarrow (\mathbb{R}, \tau_{us})$ es continua en X si y sólo si A es abierto y cerrado.

5.- Caracterizar las funciones continuas $f\colon (\mathbb{R}, \tau_u) \longrightarrow (\mathbb{R}, \tau_{coc})$.

6.- Dados los conjuntos finitos $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $Y = \{a, b\}$ y las topologías sobre ellos $\tau_X = \{\emptyset, X, \{1\}, \{3, 4\}, \{1, 3, 4\}\}$ y $\tau_Y = \{\emptyset, Y, \{a\}\}$, se pide:

(i) ¿cuántas funciones hay $f\colon X \longrightarrow Y$? ¿cuántas son inyectivas? ¿Y sobreyectivas?

(ii) encontrar todas las funciones continuas $f\colon (X,\tau_X) \longrightarrow (Y,\tau_Y)$.

7.- Dado $x \in \mathbb{R}$, se llama *parte entera de* x, $[x]$, al mayor entero que es menor o igual que x. Estudiar la continuidad de la función $f\colon (\mathbb{R},\tau_{sor}) \longrightarrow (\mathbb{R},\tau_u)$, si $f(x) = [x]$.

$*$ **8.-** Sean τ_1 y τ_2 dos topologías sobre X y (Y,τ_Y) un espacio topológico. Probar:

(i) si $\tau = \text{ínf}\{\tau_1,\tau_2\}$, entonces la aplicación $f\colon (X,\tau) \longrightarrow (Y,\tau_Y)$ es continua si y sólo si $f\colon (X,\tau_i) \longrightarrow (Y,\tau_Y)$ es continua, para $i = 1,2$;

(ii) si $\tau = \sup\{\tau_1,\tau_2\}$, entonces la aplicación $f\colon (Y,\tau_Y) \longrightarrow (X,\tau)$ es continua si y sólo si $f\colon (Y,\tau_Y) \longrightarrow (X,\tau_i)$ es continua, para $i = 1,2$.

9.- Sea $f\colon (X,\tau_X) \longrightarrow (Y,\tau_Y)$ continua. Probar que para cada F_σ-conjunto (respectivamente, G_δ-conjunto) $B \subset Y$, el conjunto $f^{-1}(B)$ es un F_σ-conjunto (respectivamente, G_δ-conjunto). Para las definiciones, ver el ejercicio 11 del apartado 4.5.

10.- Encontrar una sucesión de funciones continuas $\{f_n\colon (\mathbb{R},\tau_{us}) \longrightarrow ([0,1],\tau_{us})\}_{n\in\mathbb{N}}$, cuyo supremo no sea una función continua.

11.- Sea $(\mathbb{N},\tau)$ el espacio topológico del problema 20 en el apartado 2.5. Probar que $f\colon (\mathbb{N},\tau) \longrightarrow (\mathbb{N},\tau)$ es continua si sólo si (si m divide a n, entonces $f(m)$ divide a $f(n)$).

12.- Sea (X,τ) un espacio topológico. Se dice que una aplicación $f\colon (X,\tau) \longrightarrow (\mathbb{R},\tau_u)$ es *semicontinua inferiormente* (respectivamente, *semicontinua superiormente*), si para cada $x \in X$ y $\varepsilon > 0$, existe $V \in \mathcal{N}_x$ tal que para cada $y \in V$ es $f(y) > f(x) - \varepsilon$ (respectivamente, $f(y) < f(x) + \varepsilon$). Probar:

(i) toda aplicación continua $f\colon (X,\tau) \longrightarrow (\mathbb{R},\tau_u)$ es semicontinua inferior y superiormente. Recíprocamente, toda aplicación semicontinua inferior y superiormente es continua;

(ii) sean las topologías sobre $\mathbb{R}$, τ_{kol} y $\tau_{scs} = \{\emptyset,\mathbb{R}\} \cup \{(-\infty,a) : a \in \mathbb{R}\}$. Entonces, $f\colon (X,\tau) \longrightarrow (\mathbb{R},\tau_u)$ es semicontinua inferiormente (respectivamente, semicontinua superiormente) si y sólo si la aplicación $f\colon (X,\tau) \longrightarrow (\mathbb{R},\tau_{Kol})$ (respectivamente, $f\colon (X,\tau) \longrightarrow (\mathbb{R},\tau_{scs})$) es continua;

(iii) sea $\{f_i\colon (X,\tau) \longrightarrow (\mathbb{R},\tau_u)\}_{i\in I}$ una familia de aplicaciones semicontinuas inferiormente (respectivamente, semicontinuas superiormente). Se supone que $I \neq \emptyset$ y que para cada $x \in X$ el conjunto $\{f_i(x) : i \in I\}$ está acotado superiormente (respectivamente, acotado inferiormente) en $\mathbb{R}$. Entonces, la aplicación $f\colon (X,\tau) \longrightarrow (\mathbb{R},\tau_u)$

definida por $f(x) = \sup\limits_{i \in I} f_i(x)$ (respectivamente, $f(x) = \inf\limits_{i \in I} f_i(x)$) es semicontinua inferiormente (respectivamente, semicontinua superiormente);

(iv) si $A \subset X$, χ_A es semicontinua inferiormente (respectivamente, semicontinua superiormente) si y sólo si $A \in \tau$ (respectivamente, $A \in \mathcal{C}$).

Capítulo 7

Homeomorfismos

Se introduce aquí el concepto de *igualdad topológica*: cuando se define una estructura matemática sobre ciertos conjuntos, la *igualdad* de esta estructura debe obligar a que los conjuntos subyacentes sean *equivalentes*. Así, la igualdad entre las estructuras dadas debe realizarse a través de una función biyectiva. Además de esta condición, se debe imponer que esta función y su inversa conserven la estructura. Así, la igualdad topológica vendrá dada por lo que se llamará un *homeomorfismo*. En algunas estructuras matemáticas (como los espacios vectoriales), si una función biyectiva f conserva la estructura, automáticamente se deduce que su inversa f^{-1} también lo hace. Sin embargo, esto no ocurre con los espacios topológicos.

7.1. Aplicaciones abiertas y cerradas

Definición 7.1. Una función $f\colon (X,\tau_X)\longrightarrow(Y,\tau_Y)$ se dice *abierta* si para cada $U\in\tau_X$, es $f(U)\in\tau_Y$. Y se dice *cerrada*, si para cada $F\in\mathcal{C}_X$, es $f(F)\in\mathcal{C}_Y$.

Ejemplos 7.1. No hay ninguna relación entre las nociones de función continua, abierta y cerrada:

1) la función idénticamente nula $f\colon(\mathbb{R},\tau_u)\longrightarrow(\mathbb{R},\tau_u)$ es continua, no abierta y cerrada;

2) la función $f\colon(\mathbb{R},\tau_u)\longrightarrow(\mathbb{R},\tau_u)$ dada por $f(x)=\sin(x)$ si $x\leq 0$ y $f(x)=\arctan(x)$ si $x\geq 0$, es continua, no abierta y no cerrada;

3) la primera proyección coordenada $f\colon(\mathbb{R}^2,\tau_u)\longrightarrow(\mathbb{R},\tau_u)$ dada por $f(x_1,x_2)=x_1$ es continua, abierta y no cerrada;

4) la función $f\colon(\mathbb{R},\tau_{ind})\longrightarrow(\mathbb{R},\tau_{dis})$ dada por $f(x)=-1$ si $x<0$, $f(x)=0$ si $x=0$ y $f(x)=1$ si $x>0$ es no continua, abierta y cerrada;

5) la función $1_{\mathbb{R}}\colon (\mathbb{R}, \tau_{dis}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \tau_{dis})$ es continua, abierta y cerrada;

6) la aplicación $f\colon (\mathbb{R}, \tau_u) \longrightarrow ([0,1], \tau_u)$ dada por $f(x) = 0$ si $x \leq 0$, $f(x) = x$ si $0 \leq x \leq 1$ y $f(x) = 1$ si $x \geq 1$ es continua, no abierta y cerrada;

7) la primera proyección coordenada $f\colon (\Sigma, \tau_{moo}) \longrightarrow ([0,1], \tau_u)$ es continua, abierta y no cerrada.

A pesar de esto, las aplicaciones cerradas están muy *próximas* a las aplicaciones abiertas, ya que poseen la siguiente propiedad respecto a los abiertos saturados

Lema 7.1. *Si $f\colon (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ es una aplicación cerrada, dado $B \subset Y$ y $U \in \tau_X$ tal que $f^{-1}(B) \subset U$, existe $V \in \tau_Y$, tal que $B \subset V$ y $f^{-1}(V) \subset U$.*

Y análogamente, dualizando:

Lema 7.2. *Si $f\colon (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ es una aplicación abierta, dado $B \subset Y$ y $F \in \mathcal{C}_X$ tal que $f^{-1}(B) \subset F$, existe $G \in \mathcal{C}_Y$, tal que $B \subset G$ y $f^{-1}(G) \subset F$.*

7.2. Homeomorfismos

Definición 7.2. Una aplicación $f\colon (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ es un *homeomorfismo*, si f es biyectiva, continua y de inversa f^{-1} continua. Se dice también que (X, τ_X) es *homeomorfo* a (Y, τ_Y).

Lema 7.3. *Si $f\colon (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ y $g\colon (Y, \tau_Y) \longrightarrow (Z, \tau_Z)$ son homeomorfismos, entonces:*

(i) $f^{-1}\colon (Y, \tau_Y) \longrightarrow (X, \tau_X)$ es un homeomorfismo;

(ii) $g \circ f\colon (X, \tau_X) \longrightarrow (Z, \tau_Z)$ es un homeomorfismo.

Corolario 7.4. *La relación "ser homeomorfos" es una relación de equivalencia sobre la familia de los espacios topológicos.*

Proposición 7.5. *Si $f\colon (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ es una función biyectiva, son equivalentes:*

(i) f es un homemorfismo;

(ii) f es continua y abierta;

(iii) f es continua y cerrada;

(iv) $U \in \tau_X$ si y sólo si $f(U) \in \tau_Y$;

(v) $F \in \mathcal{C}_X$ *si y sólo si* $f(F) \in \mathcal{C}_Y$*;*

(vi) para cada $A \subset X$*, es* $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$*;*

(vii) para cada $A \subset X$*, es* $f(\overset{\circ}{A}) = \overset{\circ}{\overbrace{f(A)}}$*;*

(viii) $V \in \tau_Y$ *si y sólo si* $f^{-1}(V) \in \tau_X$*;*

(ix) $G \in \mathcal{C}_Y$ *si y sólo si* $f^{-1}(G) \in \mathcal{C}_X$*;*

(x) para cada $B \subset Y$*, es* $f^{-1}(\overline{B}) = \overline{f^{-1}(B)}$*;*

(xi) para cada $B \subset Y$*, es* $f^{-1}(\overset{\circ}{B}) = \overset{\circ}{\overbrace{f^{-1}(B)}}$*.*

7.3. Propiedades topológicas

Definición 7.3. Una propiedad relativa a espacios topológicos se llama *topológica*, si se conserva bajo homeomorfismos.

Proposición 7.6. *Son topológicas las propiedades* T_1*,* T_2*,* C_I*,* C_{II}*, la separabilidad, la propiedad de Lindelöf y la metrizabilidad.*

Contraejemplo 7.1. Por ejemplo, la acotación (cuando tenga sentido hablar de este concepto) es un ejemplo de propiedad no topológica.

Observación 7.1. Desde el punto de vista de la topología, dos espacios homeomorfos son indistinguibles. La importancia de esta propiedad radica en que, cuando se trabaje con propiedades topológicas, es posible reemplazar espacios *complicados* por otros homeomorfos a ellos, pero más sencillos de manejar.

7.4. Problemas

$*$ **1.-** Para los espacios y las aplicaciones $f\colon (X,\tau_X) \longrightarrow (Y,\tau_Y)$ y $g\colon (Y,\tau_Y) \longrightarrow (Z,\tau_Z)$, probar:

(i) si f y g son abiertas (respectivamente, cerradas), entonces $g \circ f$ es abierta (respectivamente, cerrada);

(ii) si $g \circ f$ es abierta (respectivamente, cerrada) y f es continua y sobreyectiva, entonces g es abierta (respectivamente, cerrada);

(iii) Si $g \circ f$ es abierta (respectivamente, cerrada) y g es continua e inyectiva, entonces f es abierta (respectivamente, cerrada).

2.- Sea $f\colon (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ continua y abierta. Se pide probar:

(i) si $\mathcal{B}_x$ una base local en el punto x, $f(\mathcal{B}_x)$ es base local en $f(x)$;

(ii) si además f es sobreyectiva y β es base de τ_X, entonces $f(\beta)$ es base de τ_Y.

3.- Probar que $f\colon (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ es abierta (respectivamente, cerrada), si y sólo si para cada $A \subset X$, es $f(\overset{\circ}{A}) \subset \overset{\circ}{\overbrace{f(A)}}$ (respectivamente, $f(\overline{A}) \supset \overline{f(A)}$).

4.- Sea $f\colon (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ una aplicación sobreyectiva y cerrada. Probar que para cada $U \in \tau_X$, se verifica que $fr(f(\overline{U})) \subset f(\overline{U}) \cap f(X - U)$.

5.- Sea $f\colon (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ una aplicación. Probar que son equivalentes:

(i) f es cerrada; (ii) si $U \in \tau_X$, entonces $\{y \in Y : f^{-1}(y) \subset U\} \in \tau_Y$;

(iii) si $F \in \mathcal{C}_X$, entonces $\{y \in Y : f^{-1}(y) \cap F \neq \emptyset\} \in \mathcal{C}_Y$.

6.- Dado un espacio topológico (X, τ), se consideran las álgebras $C(X)$ y $C^*(X)$ introducidas en el problema 1 del apartado 6.3. Si (X, τ_X) e (Y, τ_Y) son homeomorfos, ¿qué relación existe entre $C(X)$ y $C(Y)$? ¿Y entre $C^*(X)$ y $C^*(Y)$?

7.- Dos espacios discretos son homeomorfos si y sólo si poseen el mismo cardinal.

8.- Dar un ejemplo de dos espacios topológicos (X, τ_X) e (Y, τ_Y) no homeomorfos, pero tales que exista una aplicación entre ellos, continua y biyectiva.

$*$ **9.-** Si $n \in \mathbb{Z}$, se define sobre $\mathbb{R}$ la topología τ_n, dada por la base $\beta_n = \beta_u \cup \{n\}$. Probar que $\tau_1 \neq \tau_2$, pero que $(\mathbb{R}, \tau_1)$ y $(\mathbb{R}, \tau_2)$ son espacios homeomorfos.

10.- Probar los siguientes enunciados:

(i) toda aplicación sobreyectiva $f\colon (\mathbb{R}, \tau_{cof}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \tau_u)$ es cerrada;

(ii) $(\mathbb{R}, \tau_u)$ y $(\mathbb{R}, \tau_{cof})$ no son homeomorfos;

(iii) toda aplicación $f\colon (\mathbb{R}, \tau_u) \longrightarrow (\mathbb{R}, \tau_u)$ biyectiva y continua, es abierta;

(iv) toda aplicación sobreyectiva $f\colon (X, \tau_{cof}) \longrightarrow (Y, \tau_{cof})$ es abierta y cerrada.

11.- Sea $\chi_{[0,\frac{1}{2}]}\colon ([0,1],\tau_u)\longrightarrow(\{0,1\},\tau_{dis})$. Probar que es sobreyectiva, abierta y cerrada, pero no continua.

12.- Sea $X\neq\emptyset$ y $p,q\in X$. Sea $A=\{p\}$ y τ^A la topología A-exclusión. Estudiar la continuidad de la función $f\colon ([0,1],\tau_u)\longrightarrow(X,\tau^A)$ dada por $f(x)=p$ si $x=0$ y $f(x)=q$ si $x\neq 0$.

13.- Probar que son homeomorfos la bola cerrada $(\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leq 1\},\tau_u)$ y el cuadrado $(\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : |x|\leq 1, |y|\leq 1\},\tau_u)$.

14.- En este ejercicio se trata de definir la *proyección estereográfica*:

(i) la circunferencia unidad en el plano euclídeo es $\mathbb{S}^1=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 : x_1^2+x_2^2=1\}$. Dado $(a_1,a_2)\in\mathbb{S}^1-\{(0,1)\}$, se considera la recta que pasa por (a_1,a_2) y $(0,1)$. Esta recta corta al eje de abscisas en el punto $\left(\frac{a_1}{1-a_2},0\right)$. Se define la aplicación $h\colon (\mathbb{S}^1-\{(0,1)\},d_{\mathrm{u}})\longrightarrow(\mathbb{R},d_u)$ por $h(a_1,a_2)=\frac{a_1}{1-a_2}$. Probar que h es un homeomorfismo: es la *proyección estereográfica*;

(ii) Análogamente, para $n\geq 1$, la esfera unidad en el espacio euclídeo de dimensión $n+1$ se define por $\mathbb{S}^n=\{(x_1,\ldots,x_{n+1})\in\mathbb{R}^{n+1} : x_1^2+\ldots+x_{n+1}^2=1\}$. Probar que la aplicación $h\colon (\mathbb{S}^n-\{(0,\ldots,0,1)\},d_u)\longrightarrow(\mathbb{R}^n,d_u)$, dada por $h(a_1,\ldots,a_{n+1})=\left(\frac{a_1}{1-a_{n+1}},\ldots,\frac{a_n}{1-a_{n+1}}\right)$, es un homeomorfismo: es la *proyección estereográfica*.

15.- Probar que el espacio euclídeo $(\mathbb{R}^n,\tau_u)$ es homeomorfo al subespacio $(\mathbb{E}^n,\tau_u)$, donde $\mathbb{E}^n=\{(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n : x_1^2+\cdots+x_n^2<1\}$.

16.- Probar que el n-símplice unidad (Δ^n,τ_u), donde:

$$\Delta^n=\{(x_1,\cdots,x_{n+1})\in\mathbb{R}^{n+1} : x_i\geq 0,\ \forall i\in\{1,\cdots,n+1\},\ x_1+\cdots+x_{n+1}=1\},$$

es homeomorfo al cubo n-dimensional $([0,1]^n,\tau_u)$.

17.- Probar los siguientes enunciados:

(i) en $(\mathbb{R},\tau_u)$, son homeomorfos todos los intervalos abiertos;

(ii) no son homeomorfos $((0,1),\tau_u)$ y $([0,1],\tau_u)$;

(iii) $((0,1),\tau_{dis})$ y $([0,1],\tau_{dis})$ son homeomorfos;

(iv) $(\mathbb{N},\tau_u)$ y $(\mathbb{Q},\tau_u)$ no son homeomorfos;

(v) $(\mathbb{S}^1,\tau_u)$ no es homeomorfa a $((0,1),\tau_u)$.

18.- Probar que los espacios euclídeos siguientes son dos a dos homeomorfos:

(i) el cilindro vertical $X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$,

(ii) el plano privado del origen $Z = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$,

(iii) la corona circular $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < 4\}$,

(iv) la esfera privada de los polos norte y sur, $U = \mathbb{S}^2 - \{N, S\}$, donde $N = (0, 0, 1)$ y $S = (0, 0, -1)$,

(v) el cono privado de su vértice $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2, z > 0\}$.

19.- Probar que el primer cuadrante del plano $(\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0\}, \tau_u)$ y el semiplano $(\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}, \tau_u)$ son homeomorfos.

20.- Probar que las siguientes son propiedades topológicas:

(i) X es equipotente a $\mathbb{N}$;

(ii) la topología sobre X tiene el cardinal de $\mathbb{N}$;

(iii) existe $A \subset X$, equipotente a $\mathbb{N}$ y denso;

(iv) X es metrizable;

pero, no son propiedades topológicas:

(i) la topología sobre X está generada por la métrica d;

(ii) X es un subconjunto de $\mathbb{R}$.

21.- Sean dos aplicaciones $f : (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ y $g : (Y, \tau_Y) \longrightarrow (X, \tau_X)$ continuas, tales que $f \circ g = 1_Y$ y $g \circ f = 1_X$. Probar que f y g son homeomorfismos.

22.- Sean $f : (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ un homeomorfismo y $g : (Y, \tau_Y) \longrightarrow (Z, \tau_Z)$. Probar que g es continua si y sólo si $g \circ f$ lo es.

23.- Sean $f : (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ una aplicación abierta y cerrada, una aplicación continua $\varphi : (X, \tau_X) \longrightarrow ([0, 1], \tau_u)$ y para cada $y \in Y$, $\phi(y) = \sup\{\varphi(x) : f(x) = y\}$. Probar que ϕ es continua.

24.- Sean (X, τ) y $\mathcal{H}_{(X,\tau)} = \{h : (X, \tau) \longrightarrow (X, \tau) : h \text{ homeomorfismo}\}$. Se pide probar:

(i) con la composición de funciones como operación, $\mathcal{H}_{(X,\tau)}$ es un grupo;

(ii) si $X = [0, 1]$ y $A = (0, 1) \subset X$, sea $\varphi : \mathcal{H}_{(X,\tau)} \longrightarrow \mathcal{H}_{(A,\tau_A)}$ definida por $\varphi(h) = h|_A$. Entonces, φ es un isomorfismo de grupos, aunque los espacios involucrados (X, τ) y (A, τ_A) no son homeomorfos.

Bibliografía

[AF] C. Adams and R. Franzosa; *Introduction to Topology Pure and Applied*, Prentice Hall, 2008.

[Ad] I. Adamson; *A General Topology Workbook*, Birkhäuser, 1995.

[AP] A.V. Arkhangels'kii and V. I. Ponomarev; *Fundamentals of General Topology: Problems and Exercises*, Reidel, 1983.

[Ar] M.A. Armstrong; *Topología Básica*, Reverté, 1987.

[ADQ] $*$ R. Ayala, E. Dominguez y A. Quintero; *Elementos de Topología General*, Addison-Wesley Iberoamericana, 1997.

[Bak] C.W. Baker; *Introduction to Topology*, Krieger, 1997.

[Bar] S. Barr; *Expériences de Topologie*, Lysimaque, 1987.

[Bau] J.D. Baum; *Elements of point-set Topology*, Dover, 1991.

[Be] C. Berge; *Topological Spaces*, Dover, 1997.

[BBIF] Y.U. Borisovich, N. Bliznyakov, Y. A. Izrailevich and T. Fomenko; *Introduction to Topology*, Mir, 1985.

[Bor] C.R. Borges; *Elementary Topology and Applications*, World Scientific, 2000.

[Bou] N. Bourbaki; *Eléments de Mathématiques: Topologie Générale*, Hermann, 1971.

[Bu] D. Bushaw; *Elements of General Topology*, John Wiley, 1996.

[BvR] G. Buskes and A. Van der Rooij; *Topological Spaces; from distance to neighborhood*, Springer, 1997.

[BP] E. Burroni et J. Perron; *La Géométrie de caoutchouc. Topologie*, Ellipses, 2000.

[Ca] G.L. Cain; *Introduction to General Topology*, Addison Wesley, 1993.

[CV] C.O. Christenson y W.L. Voxman; *Aspects of Topology*, Marcel Dekker, 1998.

[Cr] F.H. Croom; *Principles of Topology*, Cengage Learning Asia, 2002.

[Cu] H. Cullen; *Introduction to General Topology*, Heath and Co., 1968.

[Cz] A. Czaszar; *General Topology*, A. Hilger, 1978.

[ChH] J. Chailloux y J. Henry; *Problemas (con soluciones detalladas) de Topología*, Toray-Masson, 1976.

[Cho1] G. Choquet; *Topología*, Toray-Masson, 1971.

[Cho2] M. Choquet; *Problèmes de théorie des fonctions et topologie*, Les cours de la Sorbonne, 1966.

[Da] S.W. Davis; *Topology*, McGraw Hill, 2005.

[De] A. Delachet; *Que sais-je? La Topologie*, PUF, 1978.

[Di] J. Dixmier; *General Topology*, Springer, 1984.

[Du] J. Dugundji; *Topology*, Allyn and Bacon, 1968.

[E] R. Engelking; *General Topology*, Heldermann, 1989.

[Fa] A. Faisant; *TP et TD de Topologie Générale*, Hermann, 1987.

[FM] $*$ G. Fleitas Morales y J. Margalef Roig; *Problemas de Topología General*, Alhambra, 1980.

[Fl] $*$ G. Flory; *Ejercicios de Topología y Análisis*, Reverté, 1978.

[Ga] S.A. Gaal; *Point Set Topology*, Dover, 2009.

[GG] T.W. Gamelin and R.E. Greene; *Introduction to Topology*, Saunders Ser., 1983.

[Ge] M.C. Gemignani; *Elementary Topology*, Dover, 1990.

[HF] D. Hinrichsen y J.L. Fernandez; *Topología General*, Urmo, 1977.

[HY] J.G. Hocking and G.S. Young; *Topology*, Dover, 1961.

[Hu] S.T. Hu; *Elements of General Topology*, Holden-Day, 1965.

[Jaf] P. Jaffard; *Traité de Topologie Générale (en vue de ses applications)*, PUF, 1997.

[Jan] K. Jänich; *Topology*, Springer, 1984.

[Ke] J.L. Kelley; *General Topology*, Springer, 1955.

[Kr] S.G. Krantz; *Essentials of Topology with Applications*, CRC Press, 2010.

[Ku] K. Kuratowski; *Introduction à la théorie des ensembles et à la topologie*, Enseignement Mathématique, 1966.

[Le] H. Lehning; *Topologie (avec exercices)*, Masson, 1985.

[Li] $*$ S. Lipschutz; *Topología General*, McGraw Hill, 1967.

[Lo] $*$ R. López Camino; *Ejercicios de topología general*, Nativola, 2009.

[Man] M.J. Mansfield; *Introducción a la Topología*, Alhambra, 1974.

[MOP] J. Margalef Roig, E. Outerelo Dominguez y J.L. Pinilla Ferrando; *Topología*, Alhambra, 1975.

[Mas] X. Masa; *Topoloxia Xeral: introducción aos espacios euclidianos, métricos e topolóxicos*, Univ. Santiago de Compostela, 1999.

[MMNS] F. Mascaró, J. Monterde, J.J. Nuño y R. Sivera; *Introducció a la Topologia*, Univ. Valencia, 1997.

[Me] B. Mendelson; *Introduction to Topology*, Dover, 1990.

[Mi] E.G. Milewski; *The topology problem solver*, REA, 1994.

[Mun1] J.R. Munkres; *Topology: a first course*, Prentice-Hall, 1975.

[Mun2] $*$ J.R. Munkres; *Topología*, Prentice-Hall, 2001.

[Mur] M.G. Murdeshwar; *General Topology*, Wiley Eastern Limited, 1986.

[N] J. Nagata; *Modern General Topology*, North Holland, 1985.

[O] P.V. O'Neil; *Fundamental Concepts of Topology*, Gordon and Breach, 1972.

[Pa] C.W. Patty; *Foundations of Topology*, PWS-Kent, 1993.

[Pe] W.J. Pervin; *Foundations of General Topology*, Academic Press, 1964.

[Pr] V.V. Prasolov; *Intuitive Topology*, Math. World, 1995.

[Ro] D. Roseman; *Elementary Topology*, Prentice-Hall, 1999.

[Rub] G.N. Rubiano; *Topología General*, Univ. Nacional de Colombia, 2002.

[Run] V. Runde; *A taste of Topology*, Springer, 2005.

[Sh] P.L. Shick; *Topology Point Set and Geometric*, Wiley, 2007.

[Si] W. Sierpinski; *General Topology*, Dover, 2000.

[Sk] G. Skandalis; *Maths pour la licence: topologie et analyse*, Dunod, 2001.

[SS] J.A. Steen and J.A. Seebach; *Counterexamples in Topology*, Dover, 1995.

[Su] W.A. Sutherland; *Introduction to Metric and Topological Spaces*, Oxford Sci. Pub., 1993.

[T] W.J. Thron; *Topological Structures*, Holt, Rinehart and Winston, 1966.

[VINK] O.Ya. Viro, O.A. Ivanov, N.Yu. Netsvetaev, V.M. Kharlamov; *Elementary Topology: Problem Textbook*, AMS, 2008.

[Wa2] C. Wagschal; *Livrets d'exercices: Topologie*, Hermann, 1995.

[WD] G. Whyburn and E. Duda; *Dynamic Topology*, Springer, 1979.

[Wi] $*$ S. Willard; *General Topology*, Addison-Wesley, 1970.