Sorpresas y desengaños

Marta Macho Stadler

Las paradojas han tenido un papel crucial en la historia intelectual, a menudo presentando los desarrollos revolucionarios de las Ciencias, de las Matemáticas y de la Lógica. Cada vez que, en cualquier disciplina, aparece un problema que no puede resolverse en el interior del cuadro conceptual susceptible de aplicarse, experimentamos un choque, choque que puede constreñirnos a rechazar la antigua estructura inadecuada y a adoptar una nueva. Es a este proceso de mutación intelectual al que se le debe el nacimiento de la mayor parte de las ideas matemáticas y científicas.

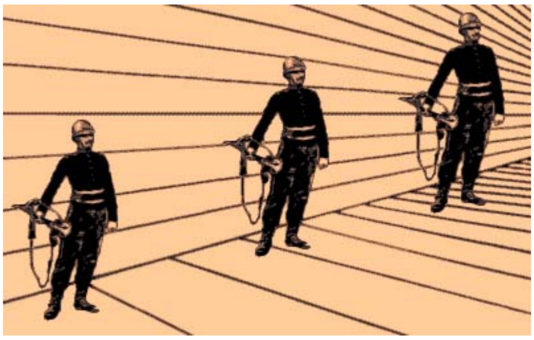
"Escapar a la paradoja", Anatol Rapoport (1911-2007)

Las paradojas abundan en todos los aspectos de nuestra vida… de hecho "convivimos" con la paradoja, como muestran estas dos simpáticas imágenes:

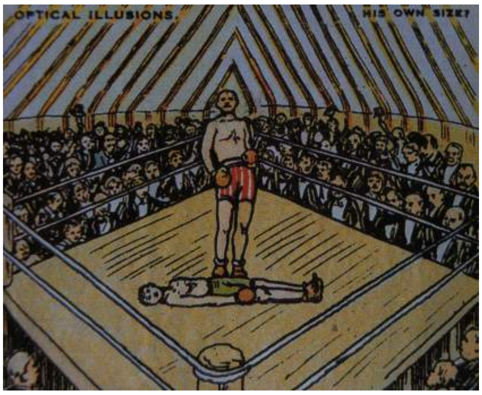
En este texto nos vamos a centrar en nueve tipos de paradojas, muchas de ellas relacionadas con las matemáticas.

1.- PARADOJAS VISUALES Y GEOMÉTRICAS

Las siguientes son dos paradojas de la perspectiva:



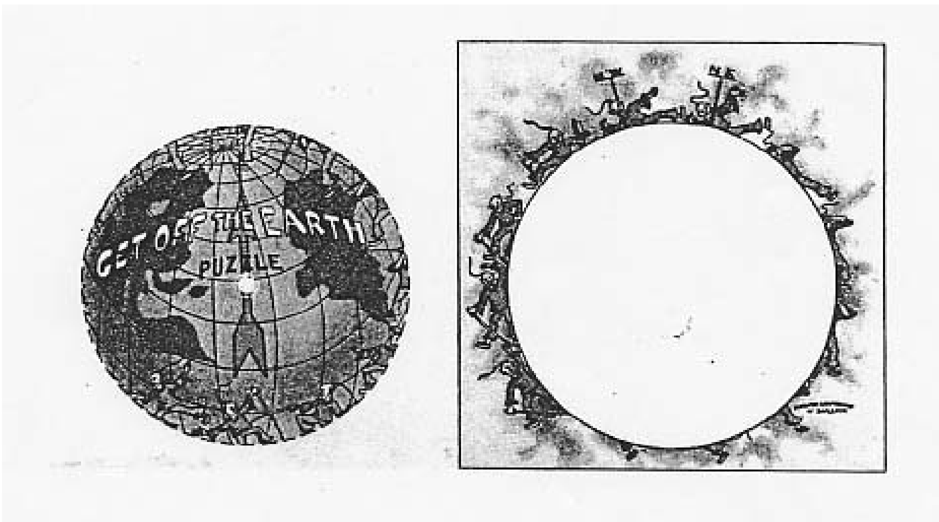
¿Son los soldados del mismo tamaño?



¿Cuál de los dos boxeadores es más alto?

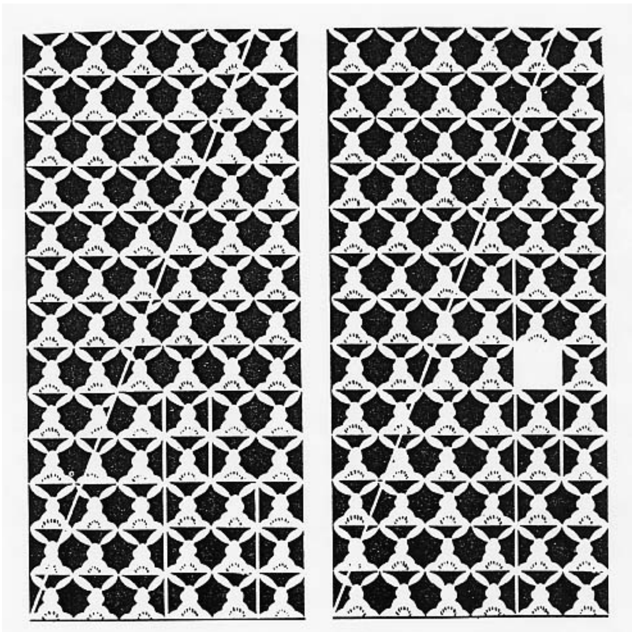
Una de las desapariciones geométricas más divertidas es este Rompecabezas "*Abandone la Tierra"* de Sam Loyd (1841-1911), http://www.mathpuzzle.com/loyd/.

Consta de dos piezas: un globo terráqueo con trozos de cuerpos de guerreros samurais y una flecha, en cuyo centro debe colocarse una chincheta, para clavarlo en la segunda pieza que es un círculo con guerreros dibujados en el exterior, como muestra la figura:

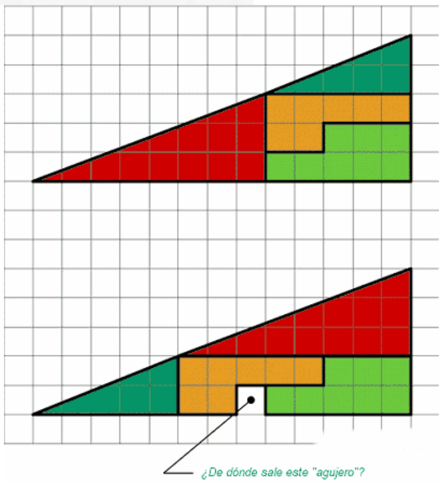


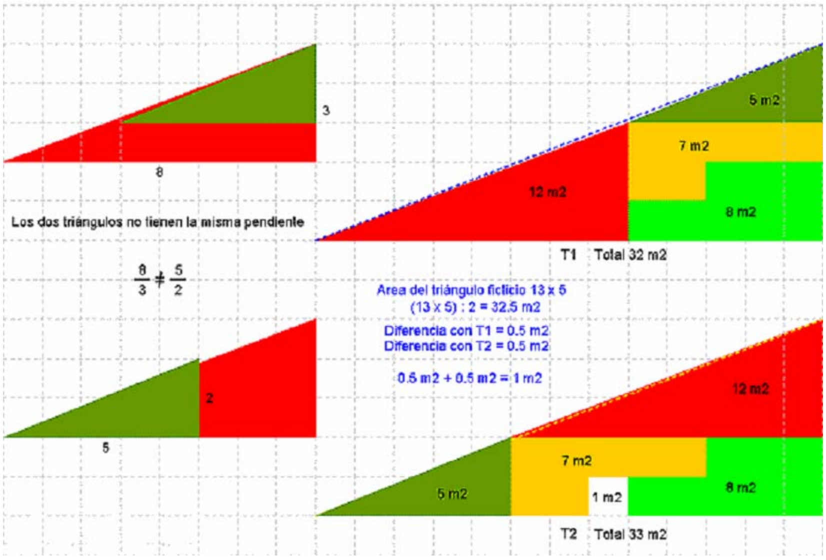
El juego consiste en girar la primera pieza (una vez clavada en la segunda) para colocar la flecha en dirección norte o noroeste, y sorprendentemente, aparecen **13 guerreros** en posición norte y tan solo **12** en dirección noroeste.
¿Dónde ha quedado el guerrero que falta?

La *paradoja de Curry* consiste en un primer rectángulo con 6x13=78 casillas, en cada una de las cuales se sitúa un conejo. Tras cortar las piezas como se indica y recolocarlas, se obtiene una segunda figura, donde sólo quedan **¡77 conejos!**
¿Dónde ha quedado el conejo que falta?

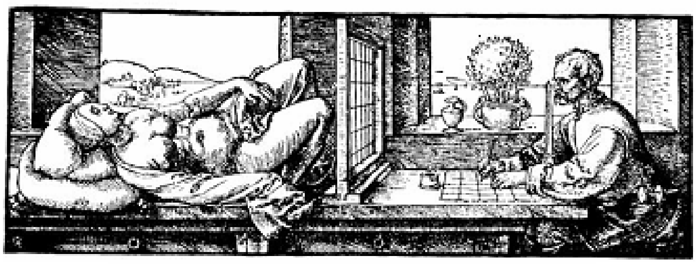


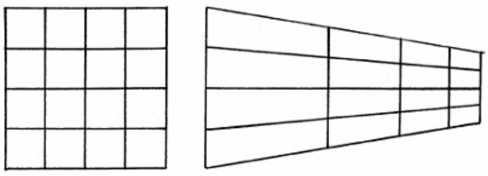
Estas dos desapariciones *paradójicas* se engloban dentro de las llamadas *paradojas de Hooper*, donde hay sólo *aparentes* desapariciones de superficie, debido a reajustes de los trozos.
La explicación es tan sencilla como que los triángulos involucrados tienen pendientes diferentes, propiedad que no se aprecia a simple vista debido al grosor de los trazos negros fronterizos.





Las anamorfosis son deformaciones reversibles de imágenes a través de procedimientos matemáticos u ópticos.



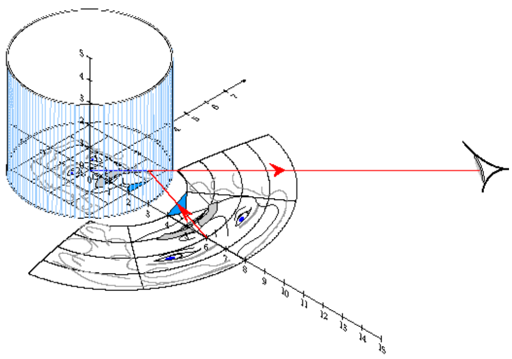


Por ejemplo en este grabado de Durero (el velo de Alberti), el artista usa un retículo para guardar las proporciones de la modelo.

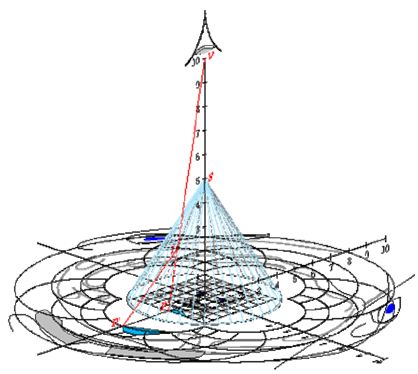
¿Y si no se coloca el enrejado de forma perpendicular?

Existen también (entre otras, ver http://www.anamorphosis.com y http://members.aol.com/ManuelLuque3/miroirs.htm):

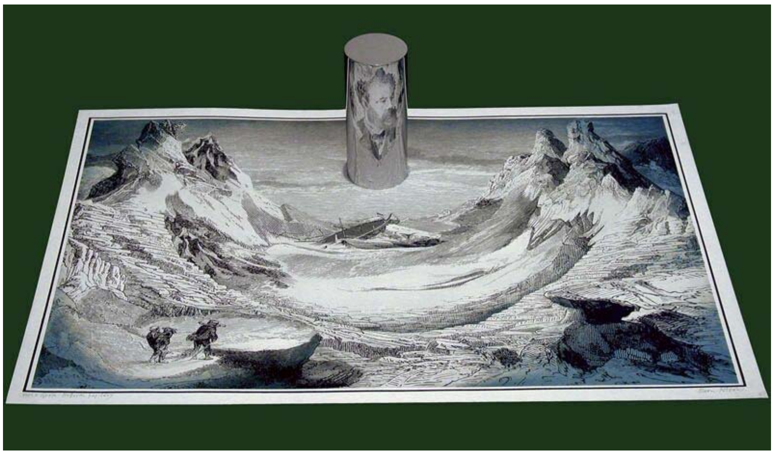
1) **anamorfosis cilíndricas, donde la imagen deformada se recupera al verla proyectada sobre un espejo cilíndrico, como indica la figura:**



2) **anamorfosis cónicas:**



Algunos ejemplos de anamorfosis cilíndricas son:



István Orosz; *"La isla misteriosa y el retrato de Julio Verne"*
http://www.geocities.com/SoHo/Museum/8716/

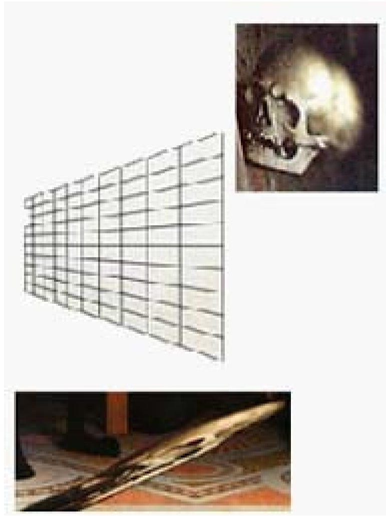
Uno de los ejemplos más bellos de anamorfosis oblicua es este retrato *"Los Embajadores"* (*http://www.math.nus.edu.sg/~mathelmr/teaching/holbein.html*) de Holbein el joven (1497-1543).

La escena representada por el pintor esta datada con gran precisión: 11 de abril de 1533. Poco tiempo antes, Enrique VIII solicitaba al papa Clemente VII anular su matrimonio con Catalina de Aragón, ya que de su unión no había nacido ningún heredero varón. El papa no accede a este favor, lo que no impide al monarca esposar en secreto a Ana Bolena el 25 de enero. A principios de abril, el arzobispo de Canterbury, Thomas Cranmer, anula él mismo el matrimonio precedente y declara a Ana Bolena reina de Inglaterra

El hecho no tenía precedentes, y se envío una embajada francesa para intentar una reconciliación con el papa. El cuadro de Holbein representa a los dos miembros de esta embajada: Jean de Dinteville y Georges de Selve.

En primer plano, en el centro, se observa un objeto enigmático: se trata de un cráneo estirado, cuya forma no se aparece delante del espectador más que si éste adopta un cierto punto de vista con respecto al cuadro.

La técnica empleada por Holbein para producir este efecto es la de la *anamorfosis oblicua*. La imagen ofrece su secreto cuando uno se coloca en el lado lateral del cuadro para mirarlo oblicuamente: entonces se ve una calavera deformada proyectando una sombra sobre el embaldosado del suelo. Se cuenta que la calavera es el símbolo de la muerte de la monarquía, al no haber un heredero varón.



"Robotmur" es un robot capaz de reproducir anamorfosis sobre edificios, etc. Puede verse con más detalle en http://jourdain.ifrance.com/ .

Vista desde el suelo, la imagen se ve totalmente deformada.

Desde el segundo piso se observa la imagen real.

Julian Beever es un artista gráfico que usa la anamorfosis en sus obras. Ver http://users.skynet.be/J.Beever/pave.htm

Vista de frente

Make Poverty History
Dibujo encargado para la campaña de presión al G8.

Vista de lado: la obra mide 13 metros

***Musas*, Suiza**

Kurt Wenner posee también unas obras impresionantes. Incluso la NASA requiere sus servicios para recrear mundos extraterrestres…
Ver http://www.kurtwenner.com/

***Dies Irae*, Italia**

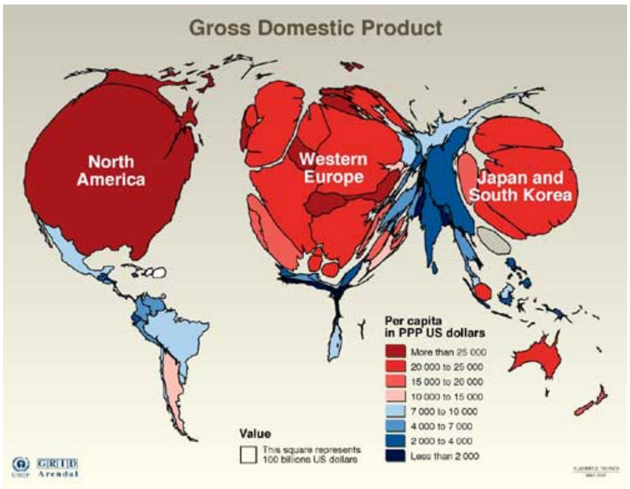
Escalera anamórfica de dimensión tres, vista desde diferentes ángulos.
István Orosz (1951-)

Las anamorfosis se usan a menudo en señales de tráfico, para que los símbolos sean correctamente interpretados por los conductores.

Las anamorfosis se utilizan también en cartografía estadística, para mostrar la importancia de un fenómeno dado.

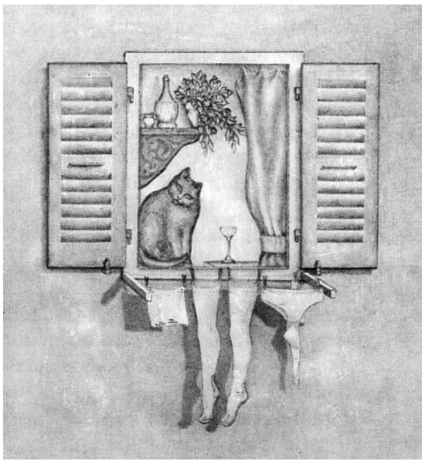
El mapa ya no representa la realidad geográfica, sino la del fenómeno a estudiar.

La deformación se realiza usando transformaciones matemáticas.

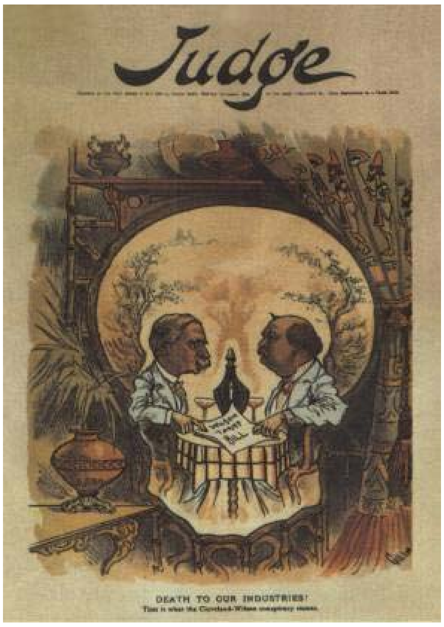


La siguiente serie de imágenes trata de *figuras ambiguas*.

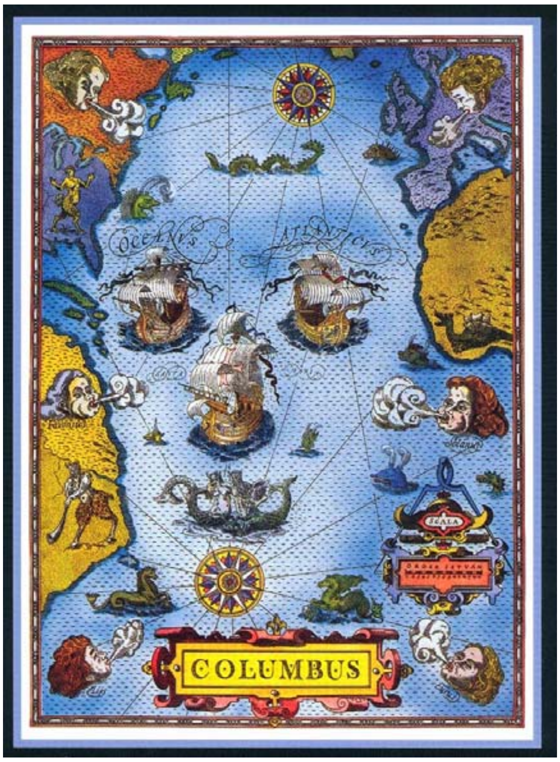
Roger N. Shepard (1929-)*Sara Nader*



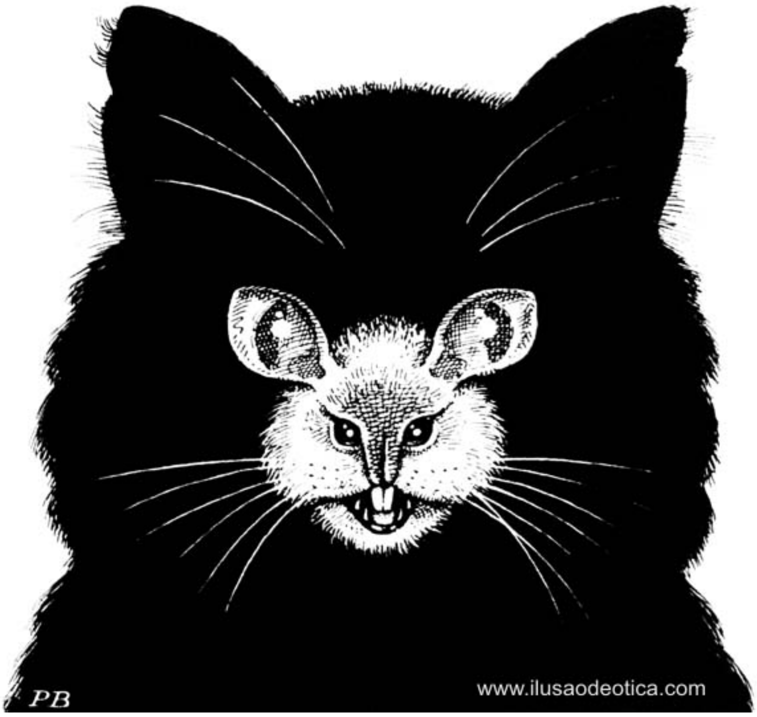
Sandro del Prete (1937-)
http://www.del-prete.ch/index.html



Gillam: Cubierta del Magazine *JUDGE* 26, 1894. Cartel reivindicativo contra los aranceles.
Papel del cartel: *"Wilson Tariff Bill"*
Base del cartel: *"Death to our industries. That is what Cleveland-Wilson conspiracy means"*.



***Columbus,* Itsván Orosz**



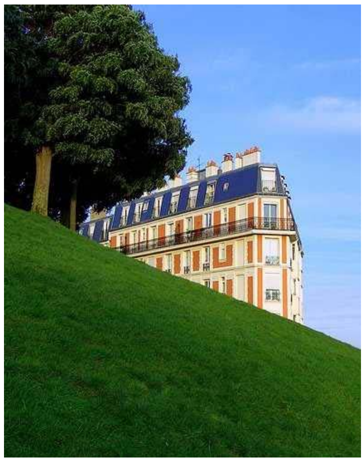
Peter Brookes.

De cerca se ve el ratón y de lejos,… el gato.

Un *ambigrama* es una frase, una palabra, etc. que posee algún tipo de simetría, que provoca ambigüedad en algún sentido.

Scott Kim (1955-) es uno de los más famosos creadores de ambigramas. Ver: http://www.scottkim.com/

La siguiente es una curiosa *ilusión fotográfica:* este castillo francés parece hundirse en el césped: sólo es una foto, que no ha sido manipulada ni retocada. La segunda imagen es del mismo edificio, pero tomada desde otro punto de vista. En la primera imagen se ha inclinado la cámara, y se ha tenido cuidado de incluir parte del árbol, pero no el tronco. Nuestra mente interpreta que la hierba marca la línea del horizonte… Sin embargo, la segunda imagen indica lo contrario: hay una inclinación en el césped, y el edificio no está hundiéndose. La vista del tronco ratifica la realidad de la imagen.

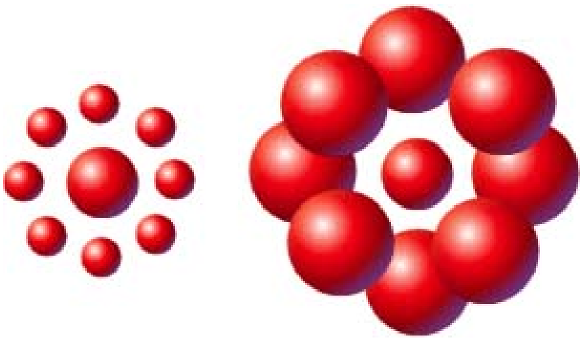


La siguiente serie de imágenes representan *ilusiones ópticas.*

¿Qué muestra esta imagen del Zoo de Pittsburg?

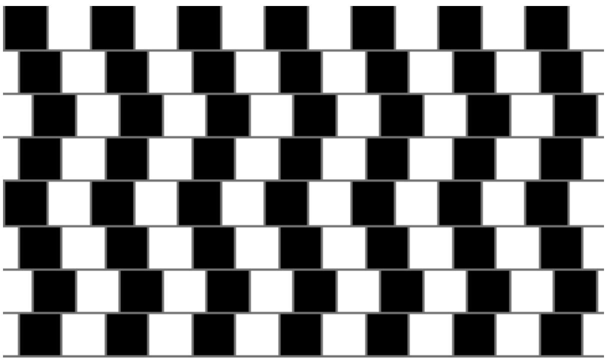
El color en esta foto de una vaca no está bien equilibrado; el lado izquierdo es menos amarillo que el derecho… Para restaurar el color, mira la mosca del segundo diagrama durante 30 segundos y mira después a la vaca de nuevo…

http://www.archimedes-lab.org/Gallery/new_optical_illusions/index.htm



Esta es la llamada *ilusión Titchener y Delboeuf.*

¿Cuál de los dos círculos centrales es de mayor tamaño? Sorprendentemente, son iguales…



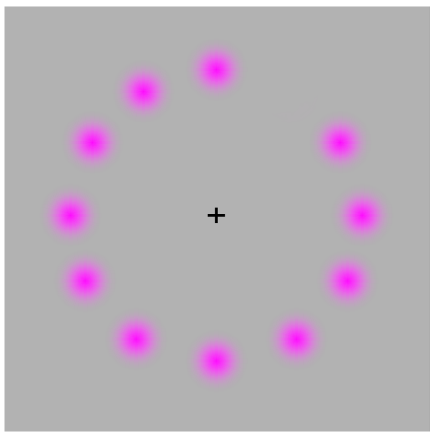
¿Son paralelas las líneas?

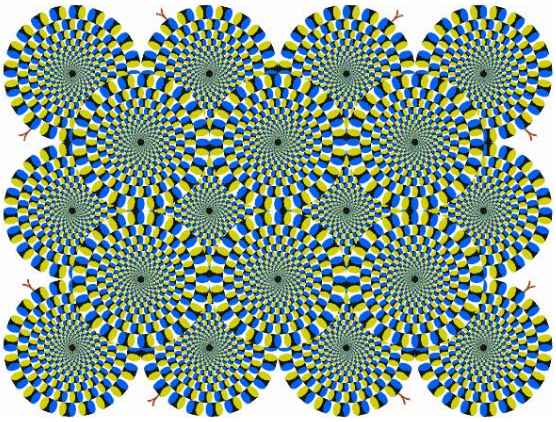
Parece que no,… pero en realidad si lo son.

Si tus ojos siguen el movimiento del punto rotativo rosado, sólo verás un color: rosado.

Ahora, concéntrate en la cruz del centro. Después de un breve periodo de tiempo, todos los puntos rosados desaparecerán y sólo verás un único punto verde girando.

En realidad no hay ningún punto verde… y los puntos rosados no desaparecen…





Akiyoshi Kitaoka es un psicólogo que utiliza este tipo de figuras para hacer pruebas de stress. Esta obra se titula *Serpientes rotando*

http://www.ritsumei.ac.jp/~akitaoka/index-e.html

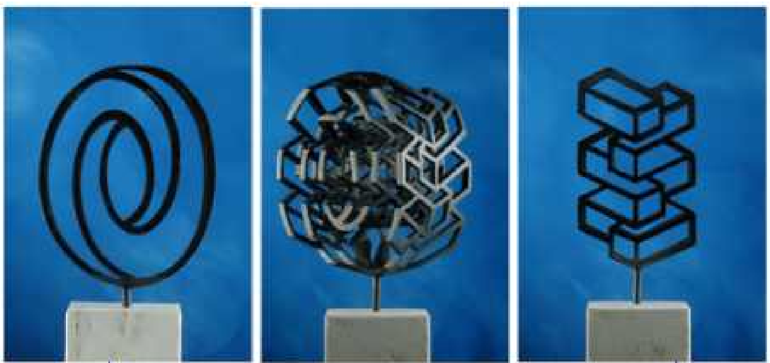
http://www.grand-illusions.com/opticalillusions/dragon_illusion/

La siguiente es una *ilusión óptica en 3D*

Si te mueves alrededor de este dragón de papel, parece que te sigue a lo largo de la habitación. ¿Qué sucede?

Cuando te mueves alrededor de un objeto sólido, tu cerebro sabe como se comporta. Pero este dragón nos da “falsas pistas”… interpretamos que la nariz del dragón apunta hacia nosotros, cuando de hecho su cara es cóncava…

Esta figura imposible del físico Guido Moretti (1947-) es… ¡la misma! vista desde tres posiciones diferentes. Ver http://www.guidomoretti.it/S_terzavia.htm.



Anillo y Paralelepipedos imposibles

A continuación, se muestran varias imágenes de *figuras reversibles:*

Esta imagen de Sergio Buratto ¿es un sapo…?

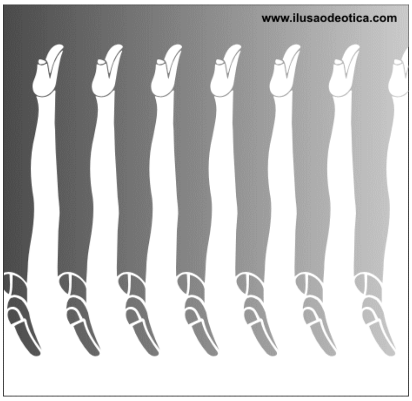
¿... o un caballo?

Shigeo Fukuda (1932-) es un artista gráfico que juega en sus obras con la paradoja:

***Encore* es una escultura en madera… de un pianista…**

… Pero al girarla ¿qué sucede?

…un violinista aparece...

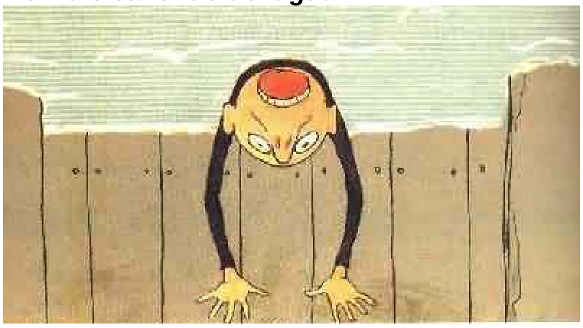


Y esta es sus *Piernas de dos géneros diferentes*

En su página web aparecen otras magníficas obras: http://psylux.psych.tu-dresden.de/i1/kaw/diverses%20Material/www.illusionworks.com/html/art_of_shigeo_fukuda.html

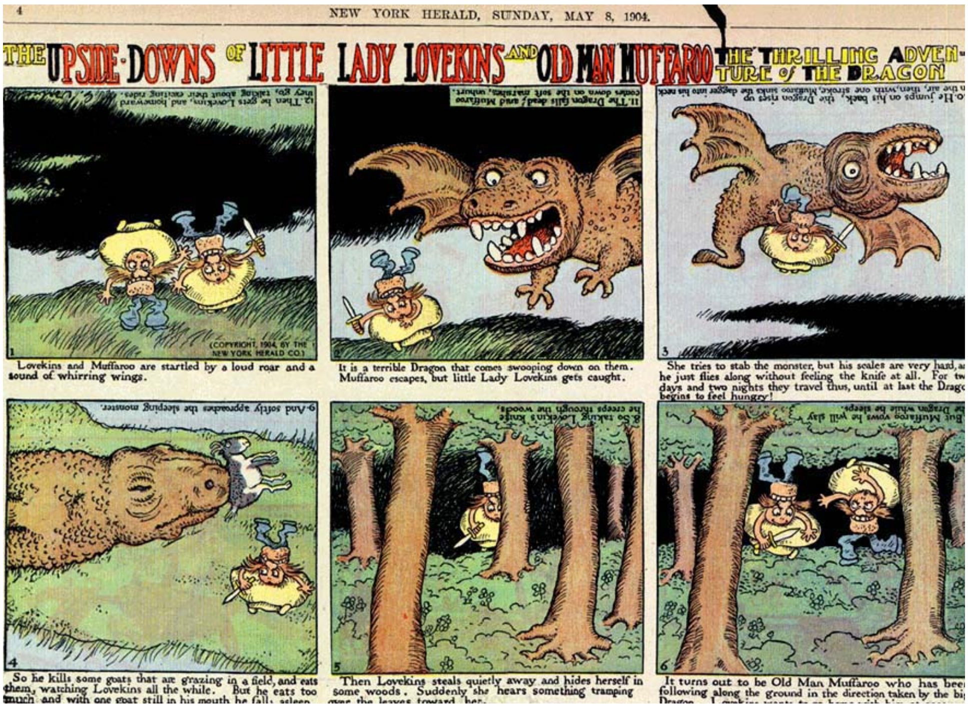
Peter Newell (1862-1924) era un famoso artista, que en sus *"Topsys and turvys"* creó todo un mundo de ilusión (ver *http://wwar.com/masters/n/newell-peter.html*):

Hombre saliendo del agua…



… o ahogándose.

Gustave Verbeck (1867-1937) (ver *http://www.lambiek.net/verbeck.htm)* tenía su hueco en el New York Herald con sus historias reversibles *Little lady Lovekins and Old man Muffaroo: the Thrilling Adventure of the Dragon:*



"*A fish story"* El mayor de los pájaros la coge por su vestido…

… Justo cuando llega cerca de la isla, otro pez le ataca, golpeándole furiosamente con su cola…

Rex Whistler (1905-1944) creó estos dibujos para una campaña de la *Shell* (ver *http://wwar.com/masters/w/whistler-rex.html):*

¿Sherlock Holmes?...

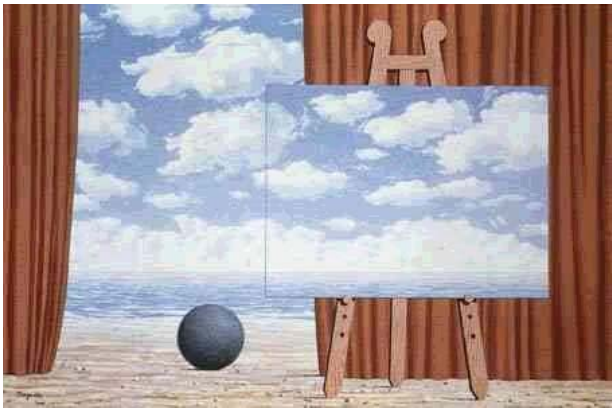
… ¿o Robin Hood?

Del surrealista Salvador Dali (1904-1989) destacamos esta preciosa obra:

Rostro paranoico: la tarjeta postal transformada en Picasso

Se cuenta que Dali, viendo la tarjeta postal de la derecha y girándola, creyó ver uno de los típicos rostros picasianos y creó este ambiguo cuadro para reproducir este efecto.

De René Magritte (1898-1967), surrealista belga, resaltamos estas dos bellezas:



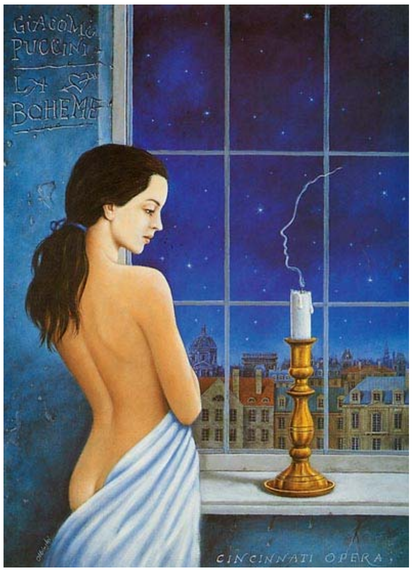
La bella cautiva

La noche que cae

El pintor mexicano Octavio Ocampo (1943-) es un creador de pinturas enigmáticas. Su mural *La evolución del hombre* es una de las más impresionantes:

El pintor de origen polaco Rafal Olbinski (1945-) se ha especializado en ilustrar piezas de ópera (ver http://www.tendreams.org/olbinski.htm):

Cartas a Europa



La bohème

Incluso en el mundo la arquitectura existen obras paradójicas, como las dos que se muestran a continuación:

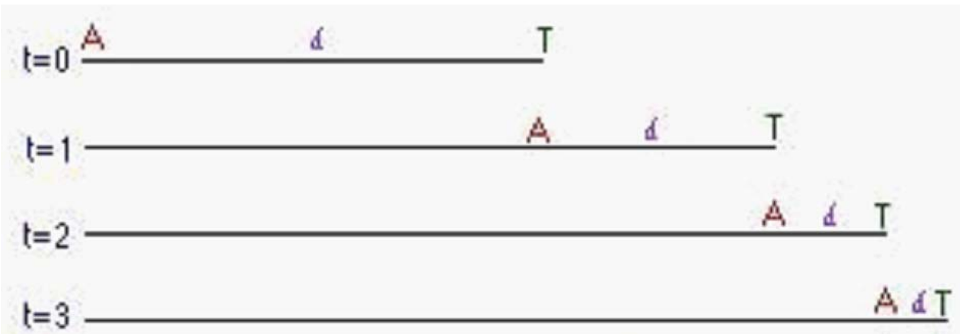
***135 Degree Angle:* construida por arquitectos orientales. Restaurante Masaka, Japón.**

A la izquierda: *Nationale Nederlanden Building*, es conocido populamente como "Ginger & Fred". Es uno de los edificios más sorprendentes de Praga, construido entre 1992 y 1995, por los arquitectos V. Milunic y F. Gehry.

2.- PARADOJAS DEL INFINITO

Aquiles y la tortuga

Se arregla una carrera entre Aquiles y la tortuga. Como Aquiles es mucho más veloz que la tortuga, el héroe permite una cierta ventaja al "lentísimo" animal.
Sin embargo, Aquiles no puede *nunca* alcanzar a la tortuga, independientemente de lo rápido que corra y de lo larga que sea la carrera: en efecto, cada vez que el perseguidor alcanza un lugar donde ha estado la perseguida, la tortuga se adelanta un poco…



El sentido común dice que algo debe ser falso en el argumento… Esta paradoja surge debido a la idea equivocada de que el espacio y el tiempo son indefinidamente divisibles, … La solución matemática pasa por la convergencia de la serie geométrica ***$1/2 + 1/4 + 1/8 + \ldots + 1/2^n + \ldots = 1$.***

El hotel infinito de Hilbert

Érase una vez un hotel con infinitas habitaciones (numeradas), con el lema: *"Se garantiza el alojamiento de cualquier nuevo huésped".*

Un día llega un hombre al hotel que se encuentra completamente lleno. El eficaz recepcionista, fiel al lema del *Hotel Infinito* avisa por megafonía a todos sus clientes, para que se cambien a su número de habitación más uno, con lo que la habitación número 1 queda libre para el nuevo huésped… ¿Pero, qué pasa con el huésped que se encontraba en la *última* habitación? No hay problema, no existe una tal habitación.

Unos días más tarde llega al *Hotel Infinito* (que está lleno de nuevo) una excursión con infinitos pensionistas… ¿Se podrán alojar? Por supuesto, nuestro diligente recepcionista solicita por e-mail a todos sus clientes que se cambien a su número de habitación multiplicado por 2, …de esa forma todos los huéspedes se mudan a una habitación par, y todas las habitaciones impares quedan libres para los pensionistas ...

3.- PARADOJAS LOGICAS

En la ciudad de Barbilandia hay un único barbero, *Jon*, que afeita sólo a los que no se afeitan a sí mismos. *¿Quién afeita al barbero de Barbilandia?*

Si *Jon* no se afeita a sí mismo, será una de las personas de Barbilandia que no se afeitan a sí mismas… con lo cual Jon debería de afeitarse, siendo por lo tanto una de las personas que se afeitan a sí mismas… no debiendo por tanto afeitarse…

Para solucionar este tipo de paradojas, Bertrand Russel (1872-1970) define su famosa *teoría de tipos*, donde se eliminan los conjuntos auto-contradictorios. De este modo *Jon*, el barbero de Barbilandia, lamentablemente*… ¡no existe!*

4.- PARADOJAS SEMÁNTICAS

Estudiemos la sentencia siguiente:

L: Lo que estoy diciendo ahora es falso.

La paradoja del mentiroso

Si *L* es verdad, es falsa, y si es falsa, es verdad. ¿Es esto paradójico? Tenemos dos afirmaciones condicionales:

1) si *L* es verdad, entonces es falsa,   2) si *L* es falsa, entonces es verdad.

Asumiendo que cuando algo es falso no es verdad, y que todo lo que es verdad no es falso, 1) y 2) pueden reescribirse del modo:

1*) si *L* es cierta, entonces es no cierta,   2*) si *L* es falsa, entonces es no falsa.

Existe un principio de razonamiento llamado *consequentia mirabilis*, que dice que si algo implica su propia negación, se puede deducir su falsedad. Así, ambas 1*) y 2*) dan argumentos para este principio: 1*) nos asegura que *L* es cierto, implica su negación, luego el principio nos lleva a inferir que *L* es no cierto y 2*), de manera exactamente paralela, nos lleva a inferir que *L* no es falso. Así que un razonamiento estándar nos garantiza que *L* es no cierto y no falso. Luego *L* no es cierto ni es falso. *¿Es esto paradójico?* No, excepto si se admite un *principio de bivalencia,* que dice que toda sentencia es cierta o falsa.

¿Es todo principio de bivalencia cierto? Las preguntas se expresan en sentencias, pero no toda pregunta es o bien cierta o bien falsa. Supongamos entonces que restringimos el principio a sentencias declarativas. Aún hay contraejemplos... Consideremos, por ejemplo, la afirmación *“Has dejado de fumar”: s*i tú nunca has fumado, la sentencia es no cierta, pero decir que es falsa sugiere que sigues fumando...

El principio de bivalencia se alcanza debido a la creencia de que toda representación no defectuosa de como las cosas están en el mundo, debe ser o bien correcta o incorrecta, verdadera o falsa.

Una solución a esta paradoja es la famosa *jerarquía de Tarski*: el concepto ordinario de *verdad* es incoherente y debe ser rechazado y reemplazado por una serie de “conceptos de verdad”, jerárquicamente ordenados, y cada uno expresado en un lenguaje diferente de cada lenguaje natural (es decir, de cada lenguaje que evoluciona de manera natural). Muchas personas han pedido una solución menos radical, una respuesta que preserve más de nuestro pensamiento y lenguaje ordinarios. Una de estas respuestas se basa en la anterior noción, pero afirma que esta jerarquía está de hecho implícita en nuestro uso de “verdad” y los defectos son una *mera apariencia.*

5.- PARADOJAS DE LA VAGUEDAD

Sorites es una palabra griega que significa “montón” o “pila”.

Se denominan paradojas tipo *sorites* a una clase argumentos paradójicos, que se derivan de los límites indeterminados de aplicación de los predicados envueltos.

Un ejemplo es e*l hombre calvo*: ¿describirías a un hombre con un pelo en la cabeza como calvo? Si yo que tengo 3.000.000 de pelos en la cabeza no soy calva, no lo será alguien que posee 2.999.999 pelos, y argumentando de este modo, quitando pelo a pelo, alguien con un único pelo en la cabeza no será tampoco calvo.

De manera similar: un *grano de arena no es un montón*, si 1 grano de arena no es un montón, tampoco 2 granos de arena lo son… Si 9.999 granos de arena no son un montón, tampoco los son 10.000 granos. *¿Cuántos granos tiene un montón?*

Algunas respuestas a esta paradoja son:

1. el acercamiento a un *lenguaje ideal,* cuyo atributo clave es su precisión: la vaguedad del lenguaje natural es un defecto a eliminar (Gottlob Frege y Bertrand Russell);
2. la utilización de lógicas multivaluadas (no clásicas), como la *lógica difusa* de Goguen y Zadeh (1969), que sustituye a la usual (dos-valuada), y que reconoce para un objeto *los grados* de verdad;
3. sencillamente, se debe aceptar la paradoja: ninguna cantidad de granos de arena hace un montón… o en otra versión… ¡ la calvicie no existe !

6.- PARADOJAS DE LA CONFIRMACIÓN

Carl Hempel (1905-1997), inventor de la *paradoja del cuervo*, afirma que la existencia de una vaca de color violeta incrementa la probabilidad de que los cuervos sean negros.

¿Por qué?

Para responder, establezcamos la ley: *Todos los cuervos son negros,* de una manera diferente, pero lógicamente equivalente *Todos los objetos no-negros no son cuervos.* Hempel dice: *He encontrado un objeto no-negro - una vaca violeta. Esto confirma (débilmente) la ley "Todos los objetos no-negros no son cuervos". Y así, también confirma la ley equivalente "Todos los cuervos son negros".*

Es fácil encontrar miles de objetos no-negros que no son cuervos, confirmando así de manera más fuerte la ley. El problema es que observando objetos no-negros se confirma la ley *Todos los cuervos son negros*, pero sólo a un nivel "infinitesimal". La clase de objetos que no son cuervos, es tan enormemente grande comparada con las que son cuervos que el grado con en el cual un no-cuervo que es no negro confirma la hipótesis es despreciable...
Los detractores de Hempel opinan que la existencia de una vaca de color violeta confirma del mismo modo el enunciado *Todos los cuervos son blancos...*

7.- PARADOJAS DE LA PREDICCIÓN

En la Edad Media, un rey de reconocida sinceridad, pronuncia su sentencia: *Una mañana de este mes serás ejecutado, pero no lo sabrás hasta esa misma mañana, de modo que cada noche te acostarás con la duda, que presiento terrible, de si esa será tu última sobre la Tierra...*

En la soledad de su celda, el reo argumenta: *Si el mes tiene 30 días, es evidente que no podré ser ajusticiado el día 30, ya que el 29 por la noche sabría que a la mañana siguiente habría de morir. Así que el último día posible para cumplir la sentencia es el 29. Pero entonces, el 28 por la noche tendré la certeza de que por la mañana seré ejecutado...*

Continuando de este modo, el prisionero concluye triunfalmente que la condena es de ejecución imposible, y comienza a dormir aliviado, aguardando que transcurra el mes para pedir su libertad… Sin embargo, sorpresa, un día cualquiera, por ejemplo el fatídico día 13, el verdugo, con el hacha afilada en la mano, despierta al reo... que instantes más tarde es decapitado. La sentencia se ha cumplido literalmente (el condenado se ha llevado una sorpresa).

¿Dónde ha fallado el razonamiento del prisionero? Una solución puede pasar por la noción fundamental de que no es lo mismo el día 30, más el día 29, más el día 28, etc., que el mes. Un conjunto es diferente y contiene cualidades distintas de la mera adición de sus partes. El análisis individual, día por día, por parte del prisionero es tan

irreprochable como el análisis paso por paso de la carrera de Aquiles. Sin embargo, el defecto de su argumento aparece cuando atribuye al conjunto (este mes) las mismas y exclusivas cualidades que poseían sus partes (cada día), no advirtiendo que el conjunto mes ha incorporado algunas características: entre otras la de contener *días sorpresa*.

Hacia el siglo III, el filósofo chino Hui Tzu afirmaba: *Un caballo bayo y una vaca parda son tres: el caballo, la vaca, y el conjunto de caballo y vaca.*
El razonamiento no es trivial, y es la esencia de la paradoja del condenado.

8.- PARADOJAS FISICAS

Si un pequeño porcentaje de los billones de estrellas en la galaxia fueran el hogar de civilizaciones con *tecnología avanzada*, capaces de colonizar a distancias interestelares, la galaxia completa estaría *invadida* en unos pocos millones de años. La ausencia de tales civilizaciones extraterrestres visitando la tierra es la llamada *paradoja de Fermi.* ¿Dónde están?

Existe una fórmula debida al astrónomo *Frank Drake* (1930-) que permite estimar el número de civilizaciones inteligentes tecnológicamente avanzadas susceptibles de estar presentes en nuestra galaxia, basada en conocimientos que van de la astrofísica a la biología (http://en.wikipedia.org/wiki/Fermi_paradox): es el producto:

$$N = E \times P \times F \times V \times I \times C \times L,$$

donde cada letra representa:

- ***E*,** número de estrellas en nuestra galaxia (400.000.000.000),
- ***P***, número medio de planetas alrededor de las estrellas (5 a 20),
- ***F**,* porcentaje de planetas favorables a la vida (20 a 50%),
- ***V**,* probabilidad de aparición de la vida (20 a 50%),
- ***I*,** probabilidad de emergencia de seres inteligentes (20 a 50%),
- ***C**,* probabilidad de aparición de una civilización tecnológica con capacidad de comunicación (20 a 50%),
- ***L**,* duración de la vida de una civilización avanzada (100 a 10.000.000 años).

Como se ve claramente, el factor preponderante en la ecuación de Drake es el tiempo, es decir la fórmula tiene una gran dependencia del factor ***L***. Así,

1. si las civilizaciones tecnológicas viven un breve instante de tiempo antes de autodestruirse ¡el número de civilizaciones en el universo es cercano a 1!
2. Al contrario, si la duración de la vida de estas civilizaciones se cuenta en millones de años, entonces ¡el universo debería estar invadido por mensajes de radio!

Por ejemplo, sustituyendo en la ecuación de Drake ***L***=10.000 años (¿modelo terrestre?) existirían por esta fórmula unas 10.000 civilizaciones, y si estuvieran repartidas de manera aleatoria por las estrellas de la galaxia, la más cercana a nosotros estaría a 1.000 años-luz.
Nuestras emisiones de radio datan de apenas 100 años, así que estaríamos a muchos años de ser encontrados (y estudiados). *¿Estamos solos? No… estamos muy lejos.*

9.- PARADOJAS TOPOLOGICAS

La Topología es la parte de las matemáticas que estudia las propiedades de los objetos que son invariantes por *transformaciones continuas.* Los tamaños, las formas y las posiciones no son importantes, lo interesante es saber si es posible, sin realizar roturas ni pegados, transformar unos objetos en otros (que serían entonces *topológicamente equivalentes* u *homeomorfos)*.

Uno de los objetos más sorprendentes en Topología es la banda de Möbius, que debe su nombre a Augustus Möbius (1790-1868).

Vamos a realizar una serie de experimentos con papel, tijeras y pegamento: si se toma una tira de papel y se pegan dos de sus extremos opuestos (tal y como se presentan), se obtiene un cilindro. Sin embargo, si se realiza una semi-vuelta en uno de los extremos antes de pegar, se obtiene otro objeto, llamado la *banda de Möbius*.
Es fácil probar que si antes de pegar se realizan un número par de semi-vueltas se obtiene un cilindro y si el número es impar, se obtiene una banda de Möbius: son los únicos objetos que pueden obtenerse así salvo homeomorfismo.

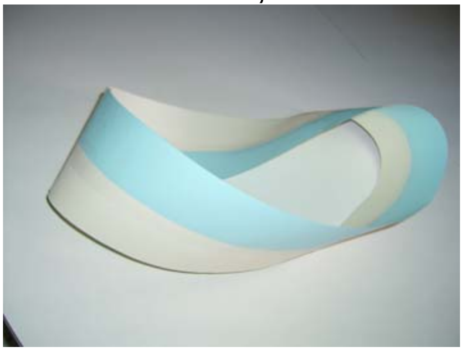
El cilindro posee dos caras (interior y exterior) y dos componentes conexas en su borde (dos circunferencias). Sin embargo, paradójicamente, la banda de Möbius posee una única cara (se ve por simple inspección) y un único borde (una circunferencia de longitud el doble de cada circunferencia frontera del cilindro).

Empecemos a experimentar…

Al cortar a la mitad de altura un cilindro (a lo largo de una circunferencia central),…

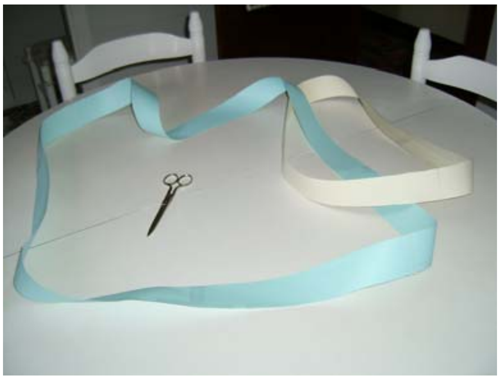
… se obtienen dos cilindros, la mitad de altos que el cilindro original.

Si se hace lo mismo con una banda de Möbius, …



… se obtiene un cilindro (4 semivueltas) el doble de largo y la mitad de alto que la banda original.

¿Y si se corta por la tercera parte la banda? La sorpresa es aún mayor, se obtiene…



… una banda de Möbius (igual de larga y 1/3 de ancha) y un cilindro (el doble de largo y 1/3 de ancho, 4 semivueltas) y enlazados…

En general, al cortar una banda de Möbius por su *n*-ésima parte a lo largote una circunferencia, se obtienen una banda de Möbius (igual de larga y *(n-2)/n* de ancha) y un cilindro (el doble de largo y *1/n* de ancho) y enlazados…

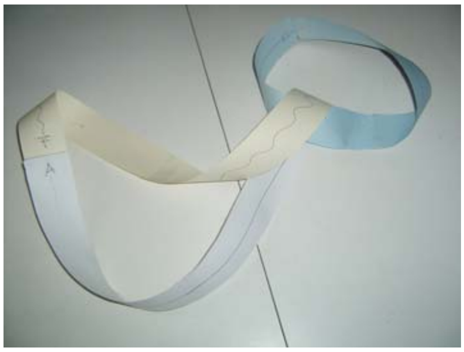
Y aún hay más experimentos con sorprendentes resultados:

Se cortan dos tiras de papel que se marcan con las letras A y B (blanca) y C y D (azul) en sus extremos. Se colocan una sobre la otra (ver la figura izquierda), se da una semi-vuelta y se pegan A con D y B con C. Si pasas un lápiz entre las dos figuras, hay dos bandas… no hay obstáculos.

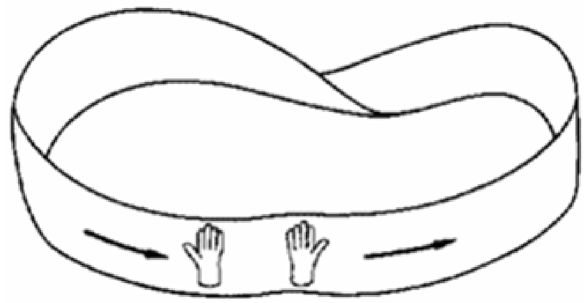
Sorprendentemente, no hay dos bandas de Möbius, sino un cilindro (2 semivueltas).

Se cortan tres tiras de papel que se marcan con las letras A y B (blanca), C y D (azul) y E y F (beis) en su extremos. Se da una semivuelta, y se pegan A con F, B con E y C con D…

Al deshacer la figura, aparece un cilindro formado por las bandas de los extremos y la banda de Möbius central se conserva…



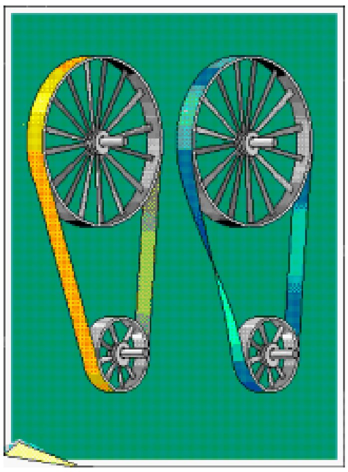
Estas propiedades extrañas se deben a que la banda de Möbius es no orientable, como se ilustra en la siguiente figura:



La banda de Möbius se utiliza en la vida cotidiana, no es un mero *divertimiento matemático,* como muestra Elisabeth Zimmermann con su *Bufanda de Möbius*:

En algunas industrias se están cambiando las correas cilíndricas por "correas de Möbius" que se desgastan a menor velocidad…

El uso de estas correas dobla la vida de elementos tipo lazo como correas de transmisión planas, cintas magnéticas, etc.



Y, sorprendentemente, la banda de Möbius también se usa en poesía: Luc Étienne (1908-1984) perteneciente al grupo OULIPO (http://www.oulipo.net/) toma la banda de Möbius, la somete a simples manipulaciones, y transforma un poema en otro cuyo sentido cambia espectacularmente… y lo hace de la siguiente manera: en la primera cara de una banda de papel rectangular (al menos 10 veces más larga que ancha) se escribe la mitad de la poesía (traducida de la original, intentando preservar la rima y el sentido):

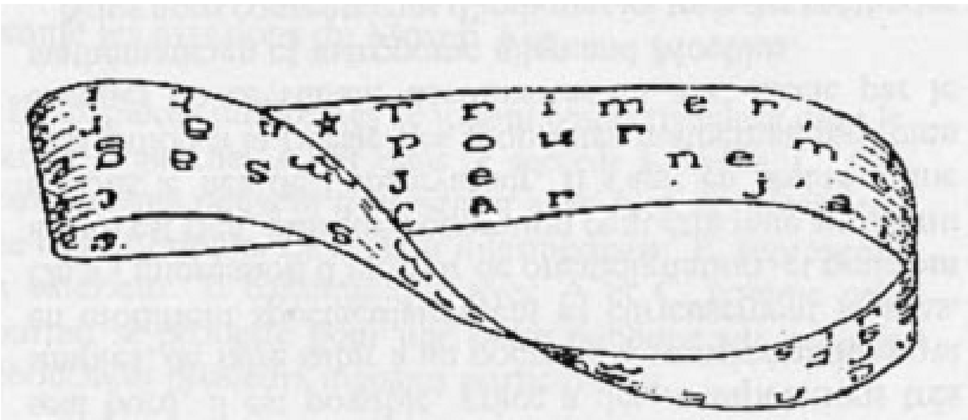
Trabajar, trabajar sin cesar,
para mi es obligación
no puedo flaquear
pues amo mi profesión…

Se gira esta tira de papel sobre su lado más largo (es esencial), y se escribe la segunda mitad del poema, pensada por una persona trabajadora:

Es realmente un tostón
perder el tiempo,
y grande es mi sufrimiento,
cuando estoy de vacación.

Se pega entonces la tira para obtener una banda de Möbius y sobre ella se lee (ahora sólo tiene una cara) algo con sentido "opuesto" a la suma de los dos poemas anteriores:

Trabajar, trabajar sin cesar, es realmente un tostón
para mi es obligación perder el tiempo
no puedo flaquear y grande es mi sufrimiento,
pues amo mi profesión… cuando estoy de vacación.



Quiero terminar agradeciendo a Elena su invitación para participar en esta ***ANDAINA,*** con esta preciosa frase, que pienso resume el contenido de este escrito:

Una verdad sin interés puede ser eclipsada por una falsedad emocionante.
Aldous Huxley (1894-1963)

BIBLIOGRAFÍA

J. Baltrusaitis, *Anamorphoses: les perspectives dépravées II*, Flammarion, 1996.

J.R. Block, *Seeing Double,* Routledge, 2002.

G.W. Erickson and J.A. Fossa*, Dictionary of paradox*, Univ. Press of America, 1998.

N. Falleta, *Paradoxicon*, Doubleday and Co., 1983.

M.Gooding and J. Rothenstei, *The Playful eye,* Chronicle Books, 2000.

F. Leeman, *Hidden images. Games of perception. Anamorphic art. Illusion,* Harry N. Abrahams, 1975

S. Loyd, *Cyclopedia of 5000 puzzles, tricks and conundrums (with aswers),* Lamb. Publis. Co. 1914.

McLoughlin Bros., *The Magic mirror. An antique optical toy*, Dover, 1979.

S. Moretti, *La "terza via" alla scultura,* Comunicare Ed., 2004.

J. Ninio, *The science of illusions*, Cornell Univ. Press, 2001.

Oulipo, *Atlas de littérature potentielle*, Gallimard, 1988.

A. Seckel, *La mirada fantástica*, Onlybook, 2002.

A. Seckel, *El ojo habla*, Onlybook, 2002.

A. Seckel, *Masters of Deception: Escher, Dalí & the Artists of Optical Illusion*, Sterling Publishing Co., 2004.

R.N. Shepard, *Mind sights*, Freeman, 1990.

Marta Macho-Stadler
Universidad del País Vasco-Euskal Herriko Unibertsitatea
Facultad de Ciencia y Tecnología
Departamento de Matemáticas
Barrio Sarriena s/n
48940 Leioa
e-mail: marta.macho@ehu.es
URL: http://www.ehu.es/~mtwmastm/