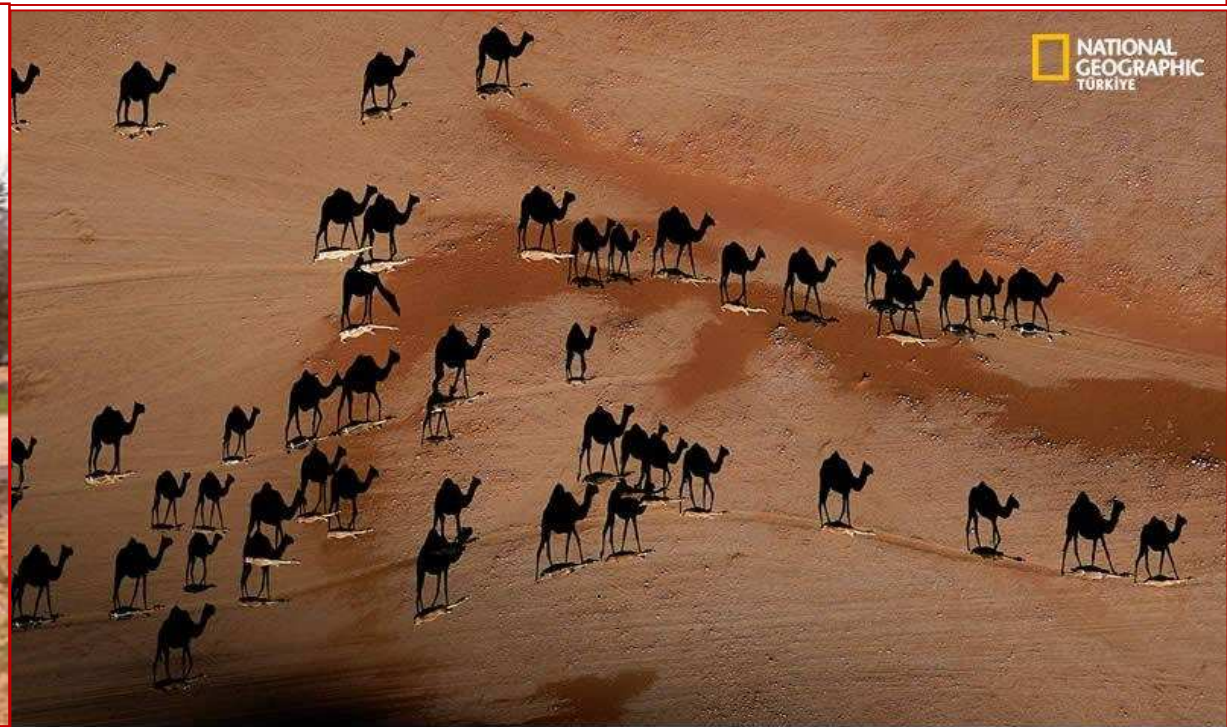


# ¿Crees que hay paradojas en matemáticas?

Marta Macho Stadler, UPV/EHU



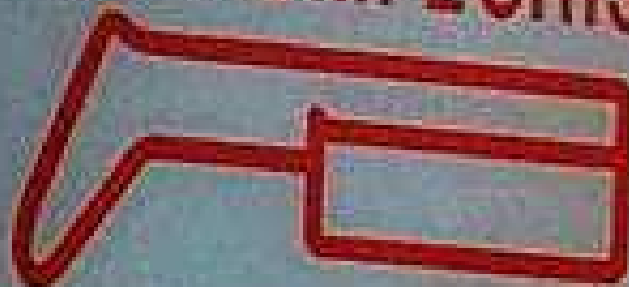
Fotoğraf: George Steinmetz  
© 2005 National Geographic Society. Her hakkı saklıdır.

Dev Develer  
National Geographic Türkiye, Şubat 2005



ES TÍMULO  MAT EMÀTICO

**MARTILLO ROMPECRISTALES**



**ROMPER EL CRISTAL PARA ACCEDER AL MARTILLO**

LA SIEMPRE ABIERTA

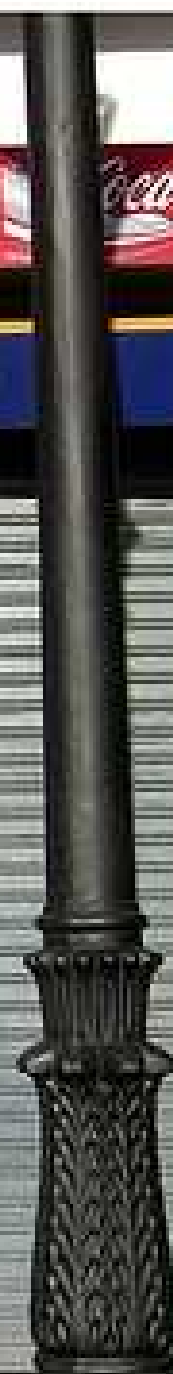
Tnos. 941 274 124 - 692 395 673

Coca-Cola

*Típico*

*Sabor*

*Latino*



LA SIEMPRE ABIERTA

Tnos. 941 274 124 - 692 395 673

Coca-Cola

*Típico*

*Sabor*

*Latino*

oferta

  
Boomerang

CAMISETA M/C  
ALGODÓN  
COLORES LISOS

una-

**6€**

dos-

**15€**

[www.elcartonjes.es](http://www.elcartonjes.es)

NO SE APLICAN LAS OFERTAS EN OTRAS





## **paradojo, ja.**

(Del lat. *paradoxus*, y este del gr. παράδοξος).

1. adj. desus. **paradójico.**

2. f. **Idea extraña u opuesta a la común opinión y al sentir de las personas.**

3. f. **Aserción inverosímil o absurda, que se presenta con apariencias de verdadera.**

4. f. *Ret.* Figura de pensamiento que consiste en emplear expresiones o frases que envuelven contradicción. *Mira al avaro, en sus riquezas, pobre.*



REAL ACADEMIA ESPAÑOLA

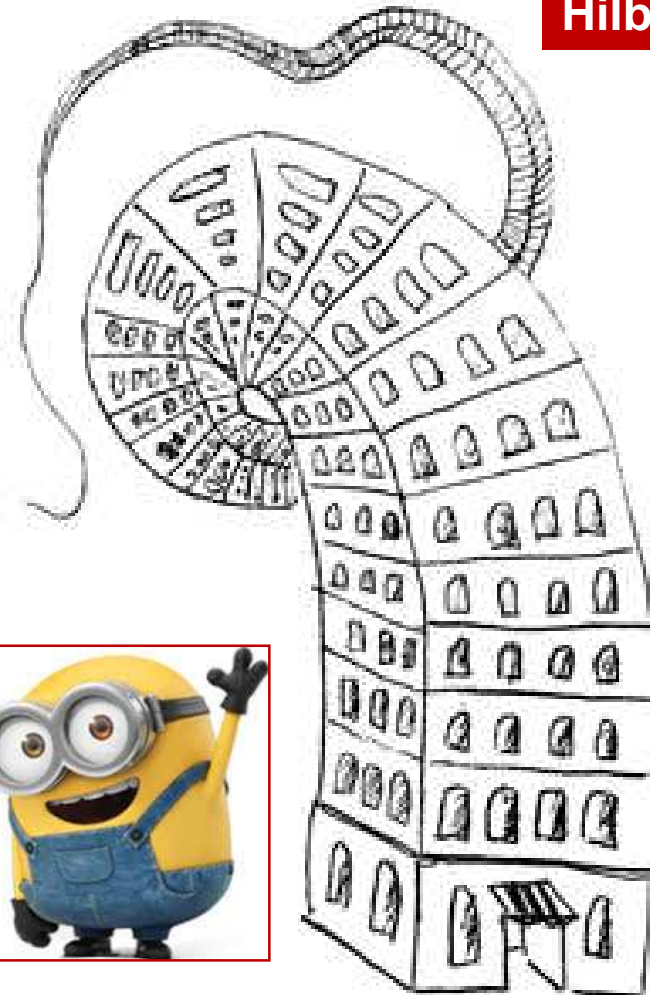
# ¡Bienvenidas(os) al Hotel Infinity!

Érase una vez *Hotel Infinity*, un hotel con infinitas habitaciones numeradas (1, 2, 3, 4, 5, etc.). Su eficiente recepcionista – **BOB** – tiene la misión de asegurar el cumplimiento del lema del hotel...

*Se garantiza el alojamiento de cualquier nuevo huésped.*

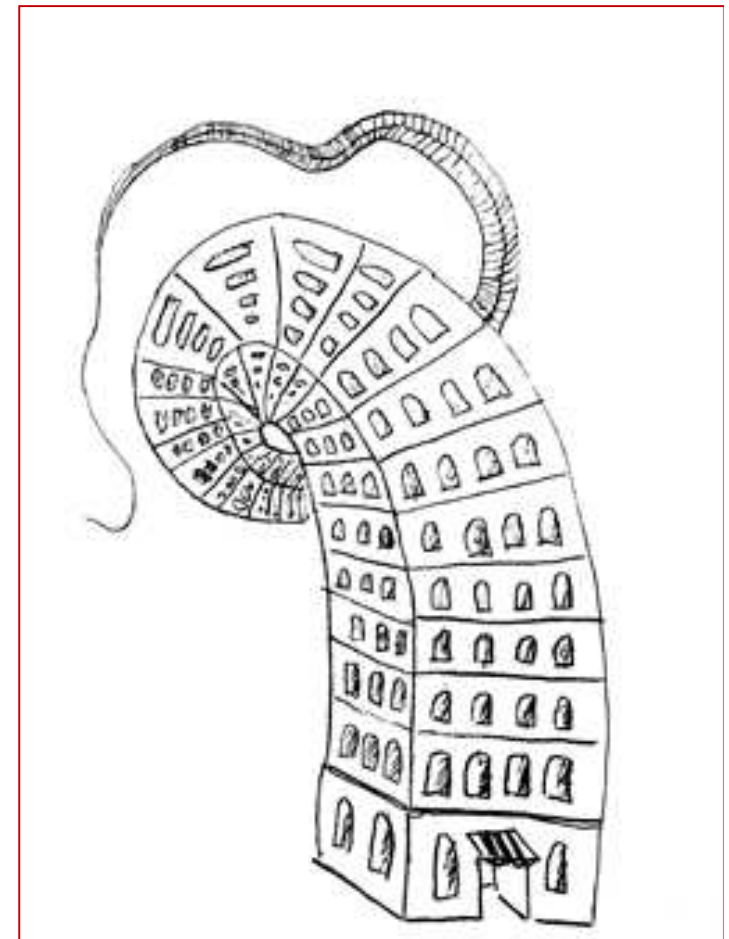
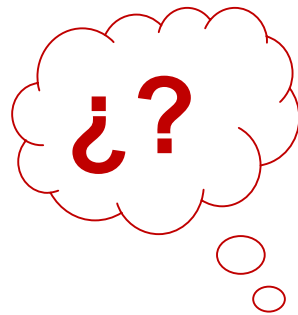
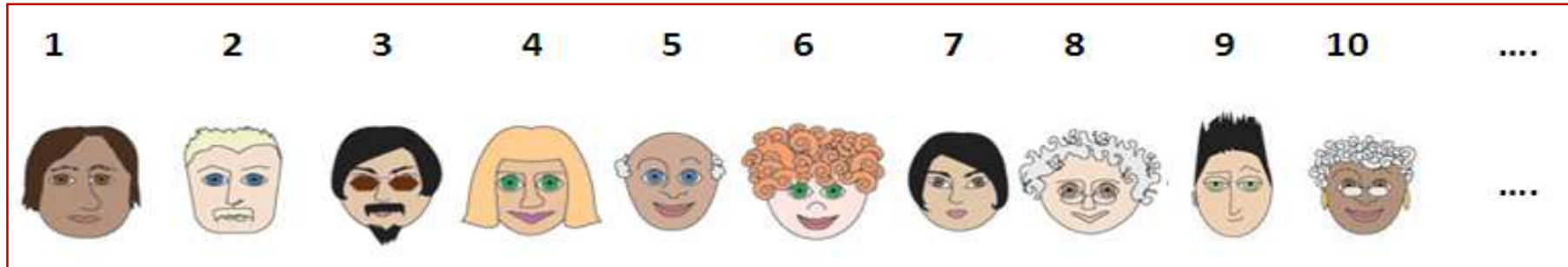
**BOB**

**Hotel de Hilbert**

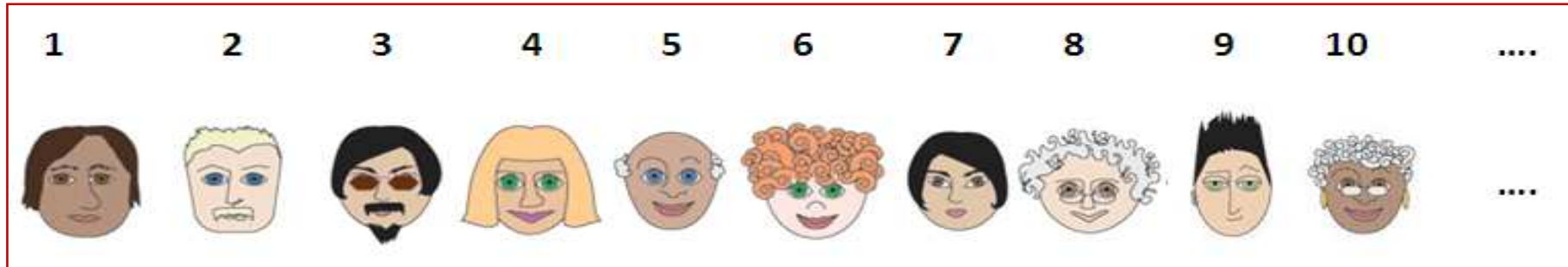




# El hotel se encuentra lleno... y llega un hombre

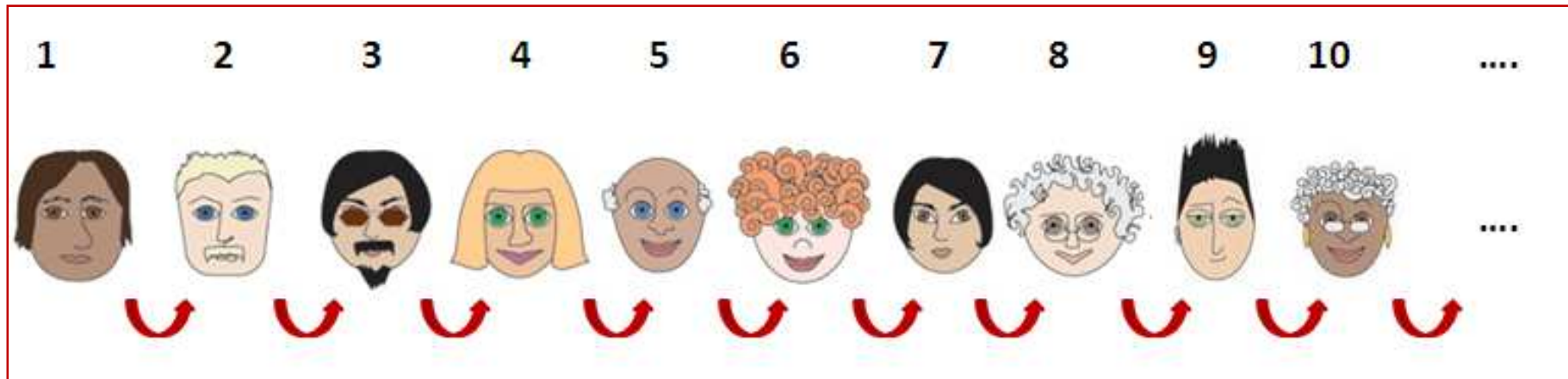


# El hotel se encuentra lleno... y llega un hombre

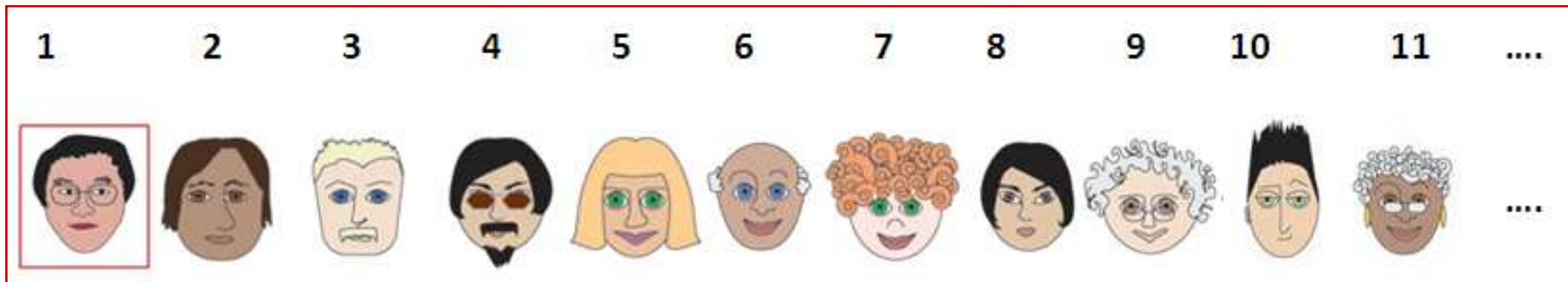
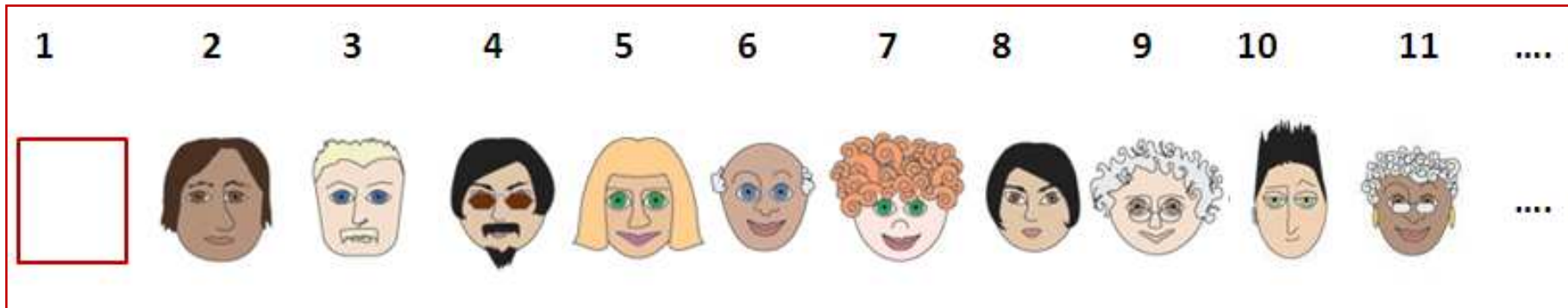


Bob, fiel al lema del *Hotel Infinity* solicita a todas y todos sus clientes...

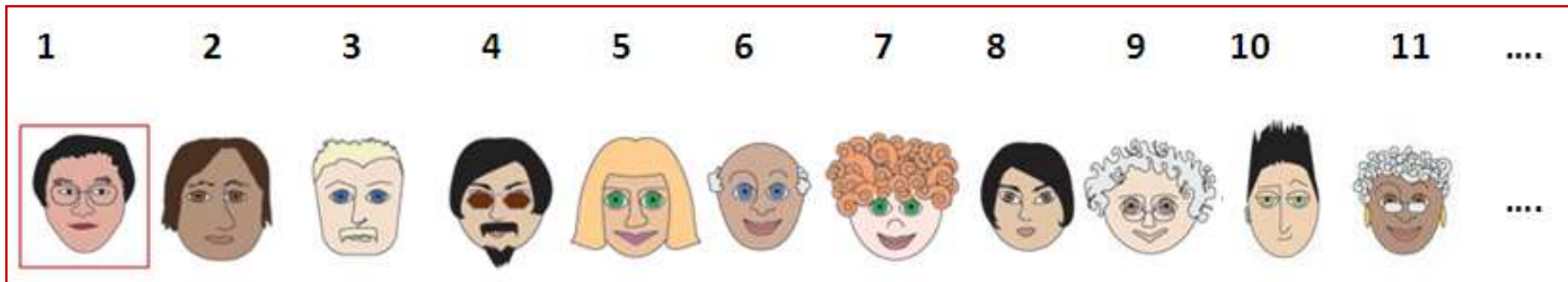
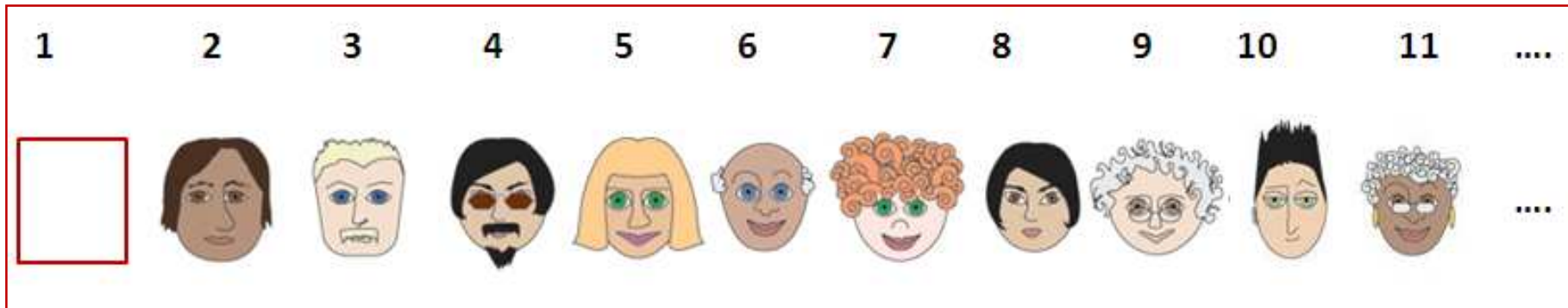
¡Cámbiate de tu habitación  $n$  a la habitación  $n+1$ , por favor!



Así, la habitación número **1** queda libre para el nuevo huésped...



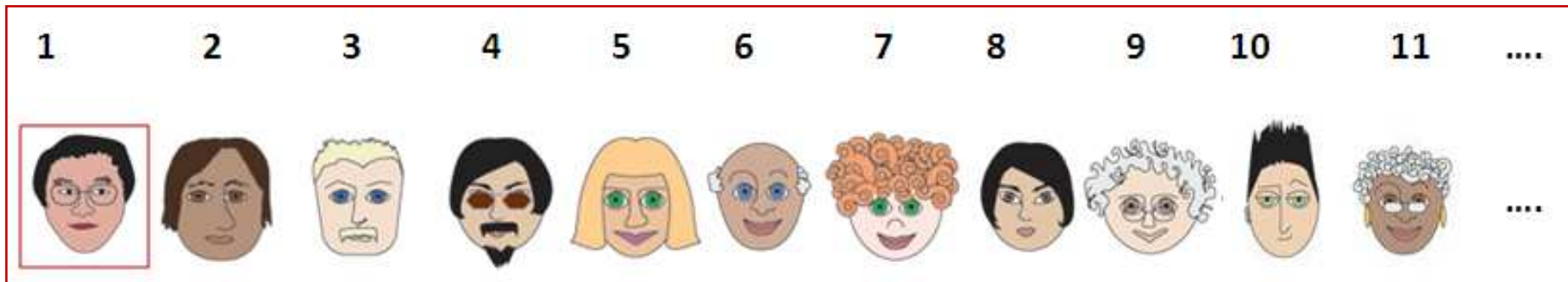
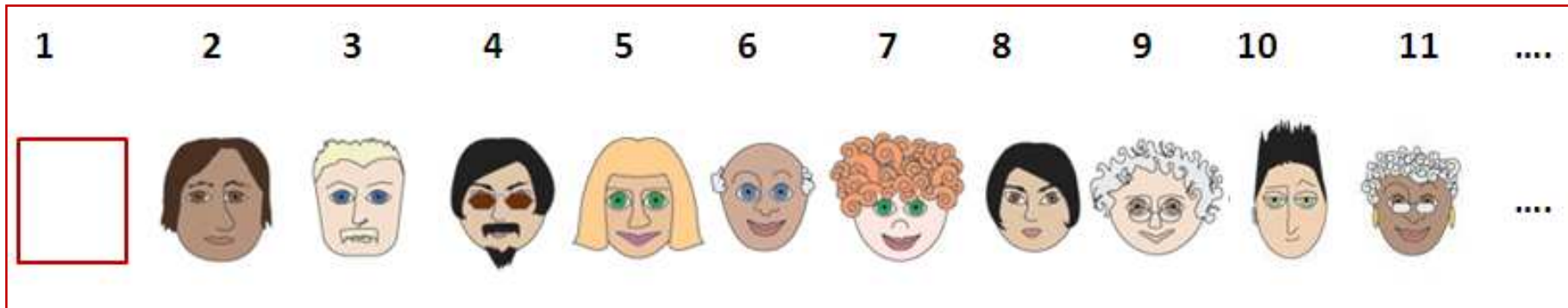
Así, la habitación número 1 queda libre para el nuevo huésped...



¿Y qué pasa con el huésped que se encontraba en la última habitación?



Así, la habitación número 1 queda libre para el nuevo huésped...



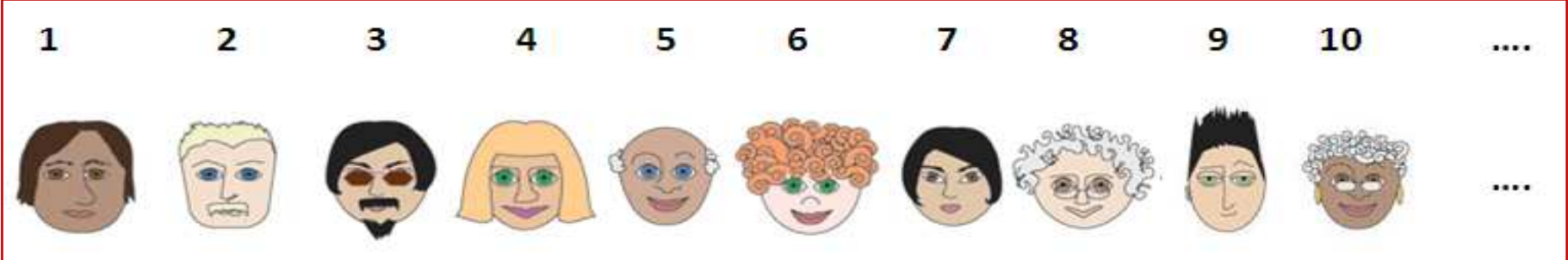
¿Y qué pasa con el huésped que se encontraba en la última habitación?

*... no hay “última habitación”...*

¡BRAVO,  
BOB!



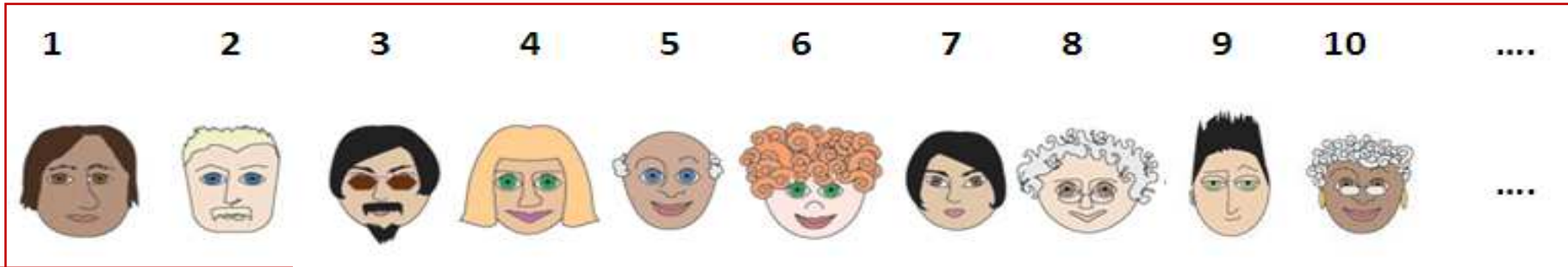
Llega al *Hotel Infinity* (que está lleno) una excursión con infinitos Boy Scouts (numerados: 1, 2, 3, 4...)



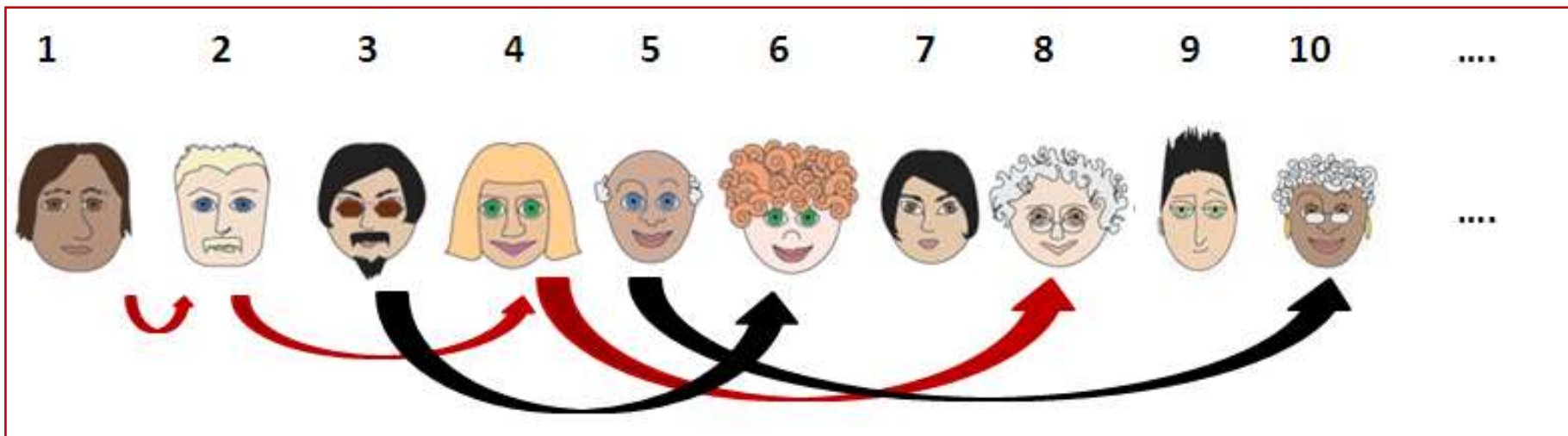
**BOB  
entra en  
pánico**



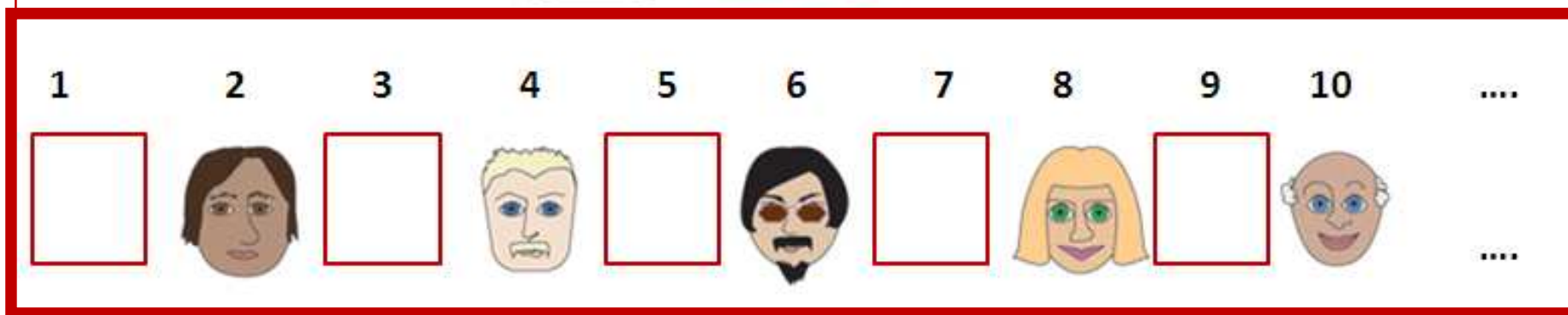
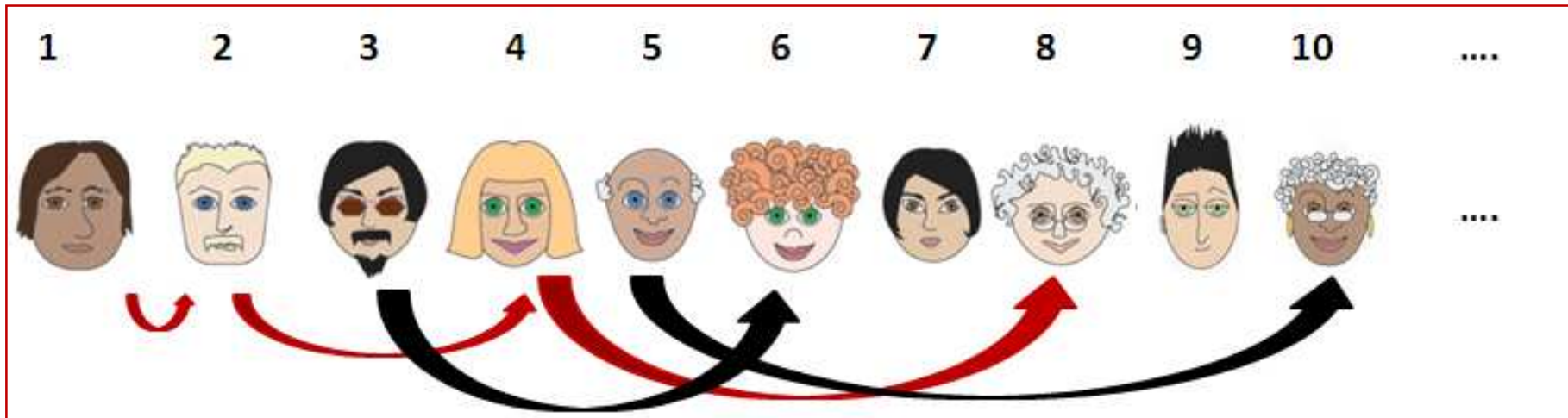
Llega al *Hotel Infinity* (que está lleno) una excursión con infinitos Boy Scouts (numerados: 1, 2, 3, 4...)



¡Cámbiate de tu habitación  $n$  a la habitación  $2n$ , por favor!



De esa forma todas las y los huéspedes se mudan a una habitación **par**, y las habitaciones **impares** quedan libres...



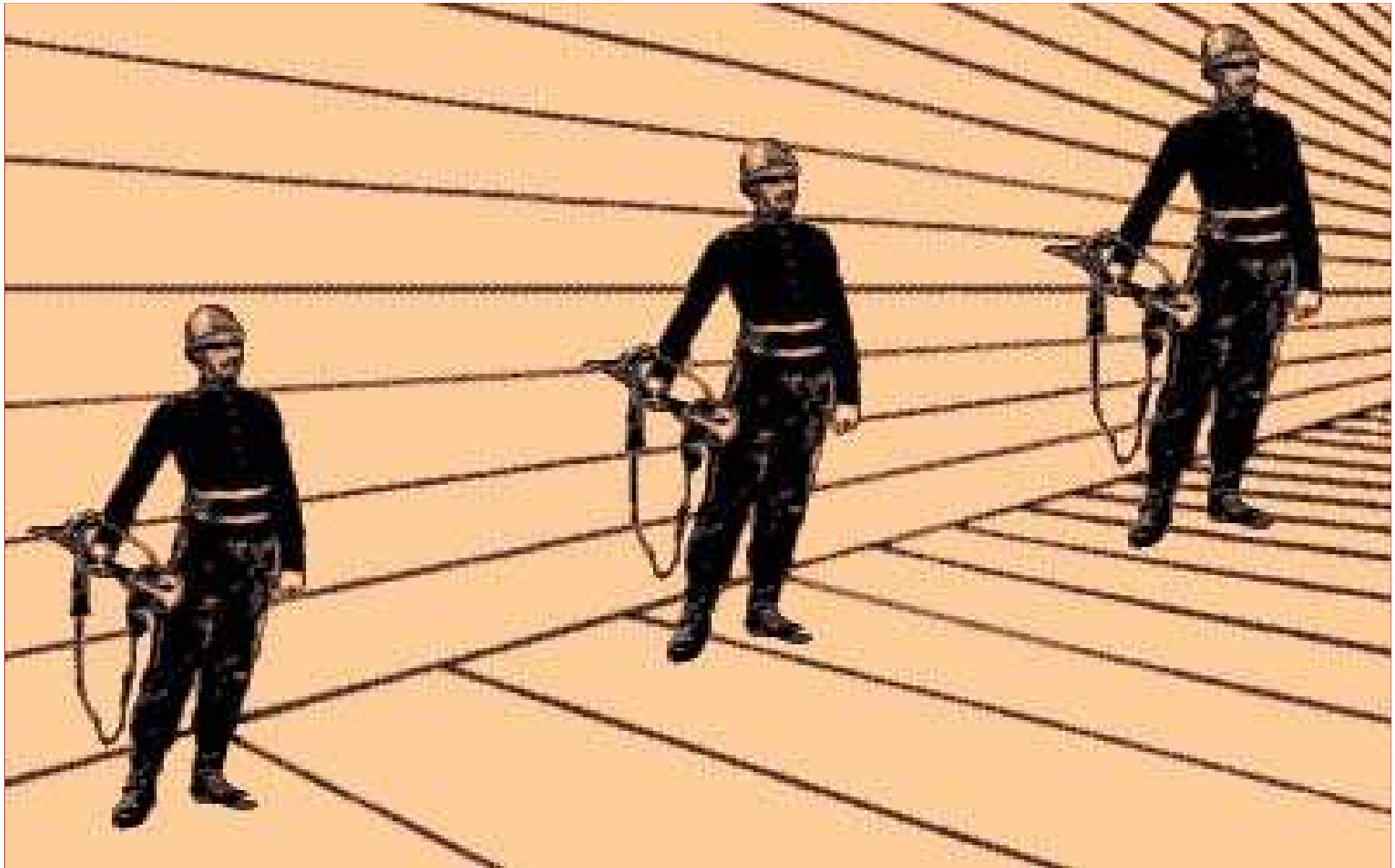




**¿Hay tantos números pares (e impares) como números naturales! ¿No son la mitad?**

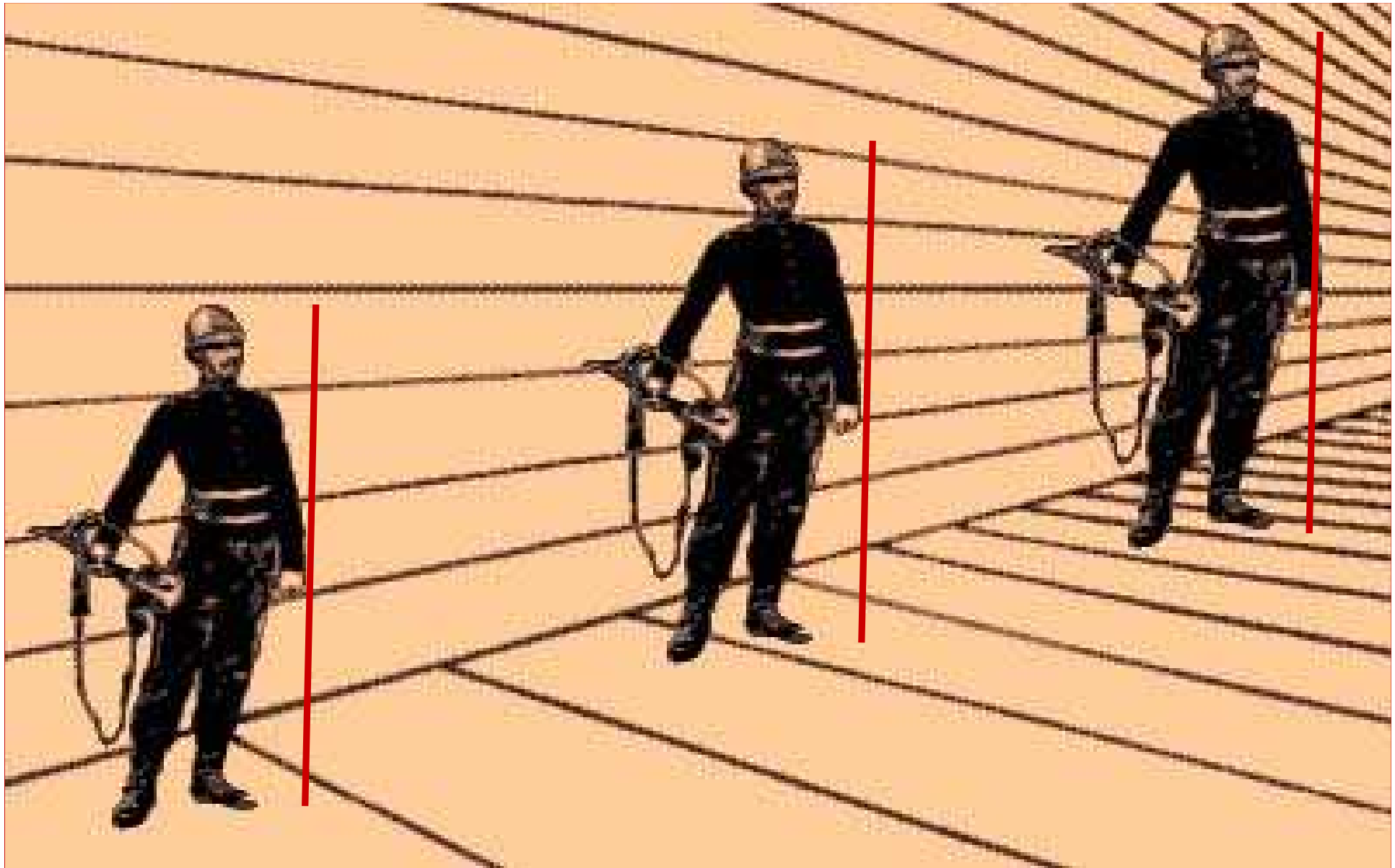
Naturales	Pares
1	2
2	4
3	6
4	8
5	10
...	...





**Paradoja de la perspectiva ascendente**

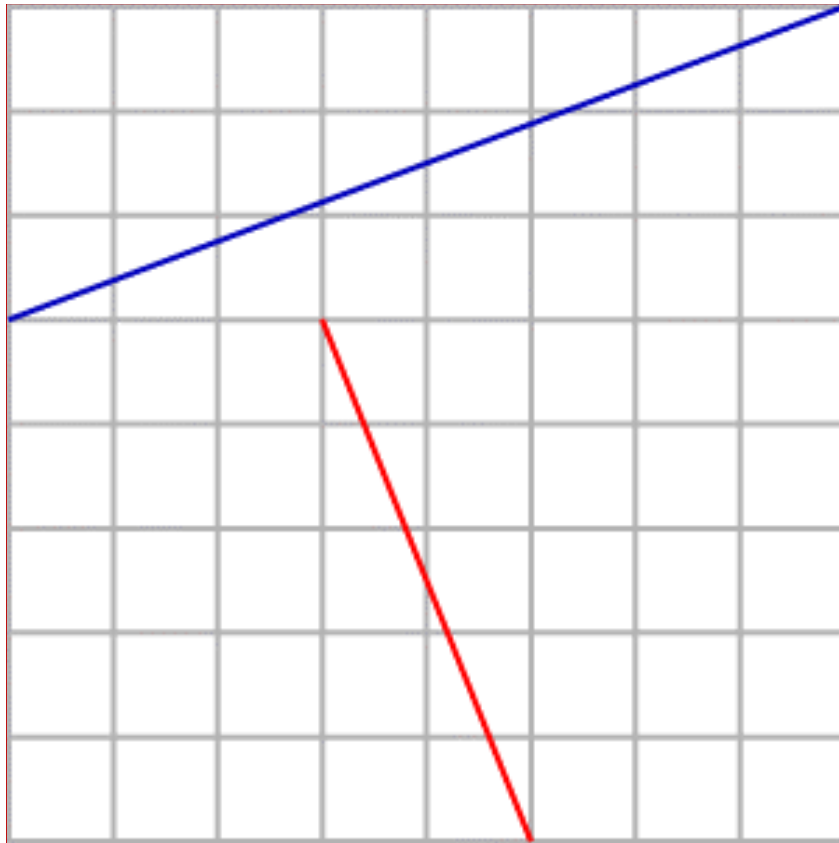
***¿Son los soldados del mismo tamaño?***



**Paradoja de la perspectiva ascendente**

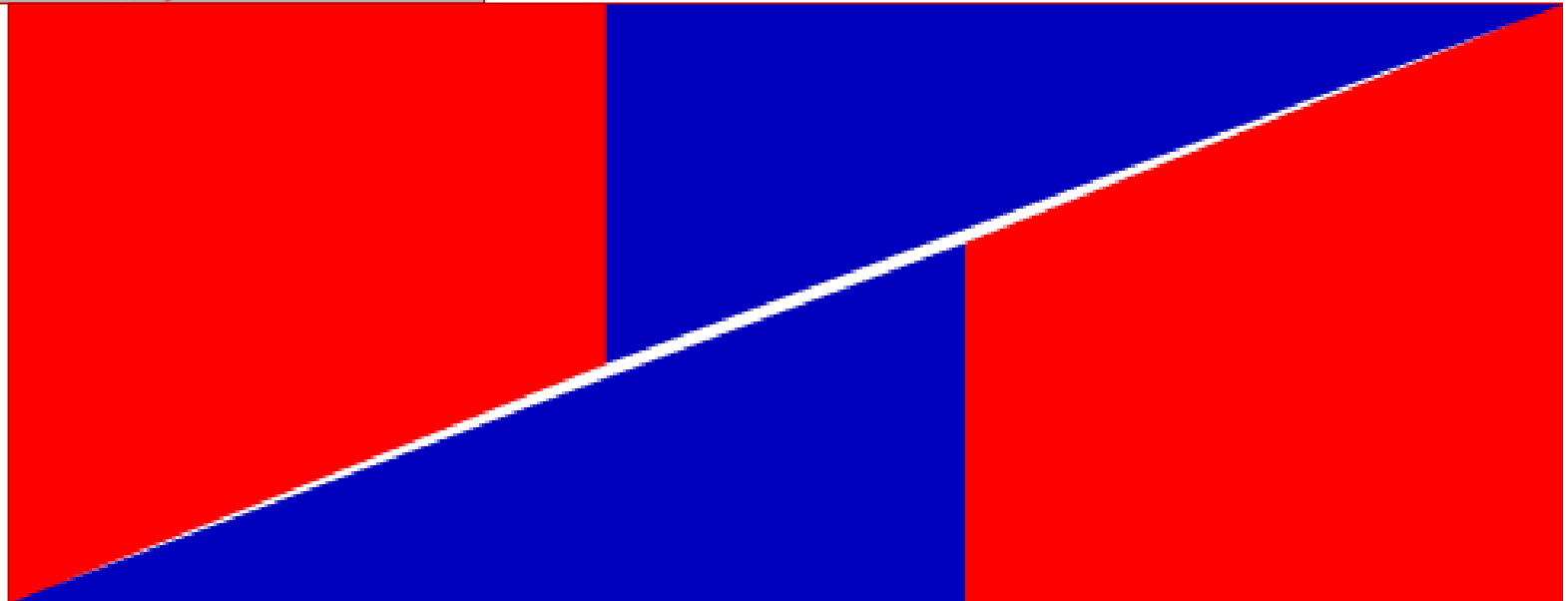
***¿Son los soldados del mismo tamaño?***

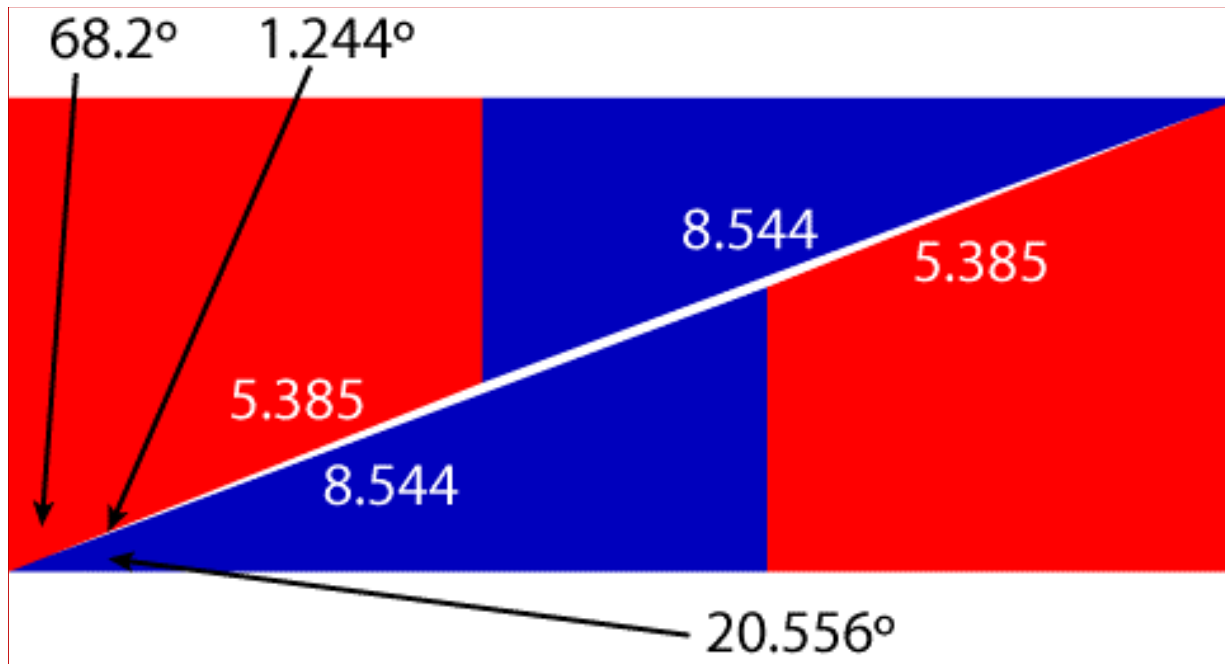
**64 = 65 ?**



**El segmento azul genera dos triángulos y el rojo dos trapezoides, se reajustan...**

**¿Ves la parte blanca?  
Es un paralelogramo con área 1.**

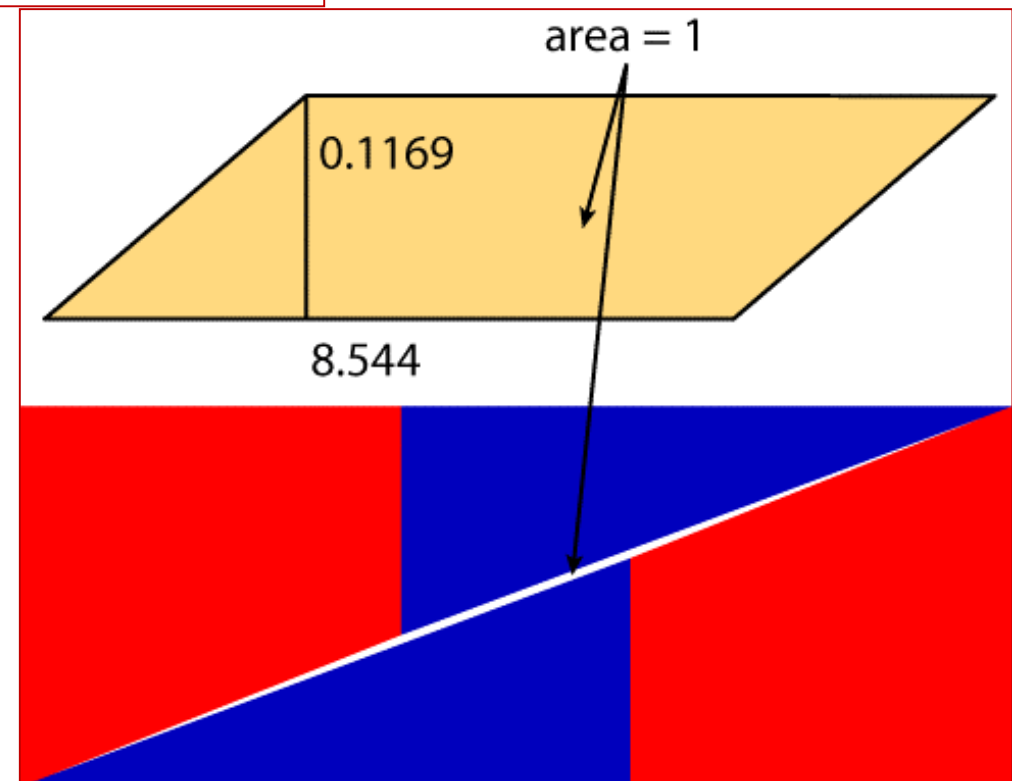




**El ángulo agudo del paralelogramo blanco es  $90^\circ - 68.2^\circ - 20.556^\circ = 1.244^\circ$ .**

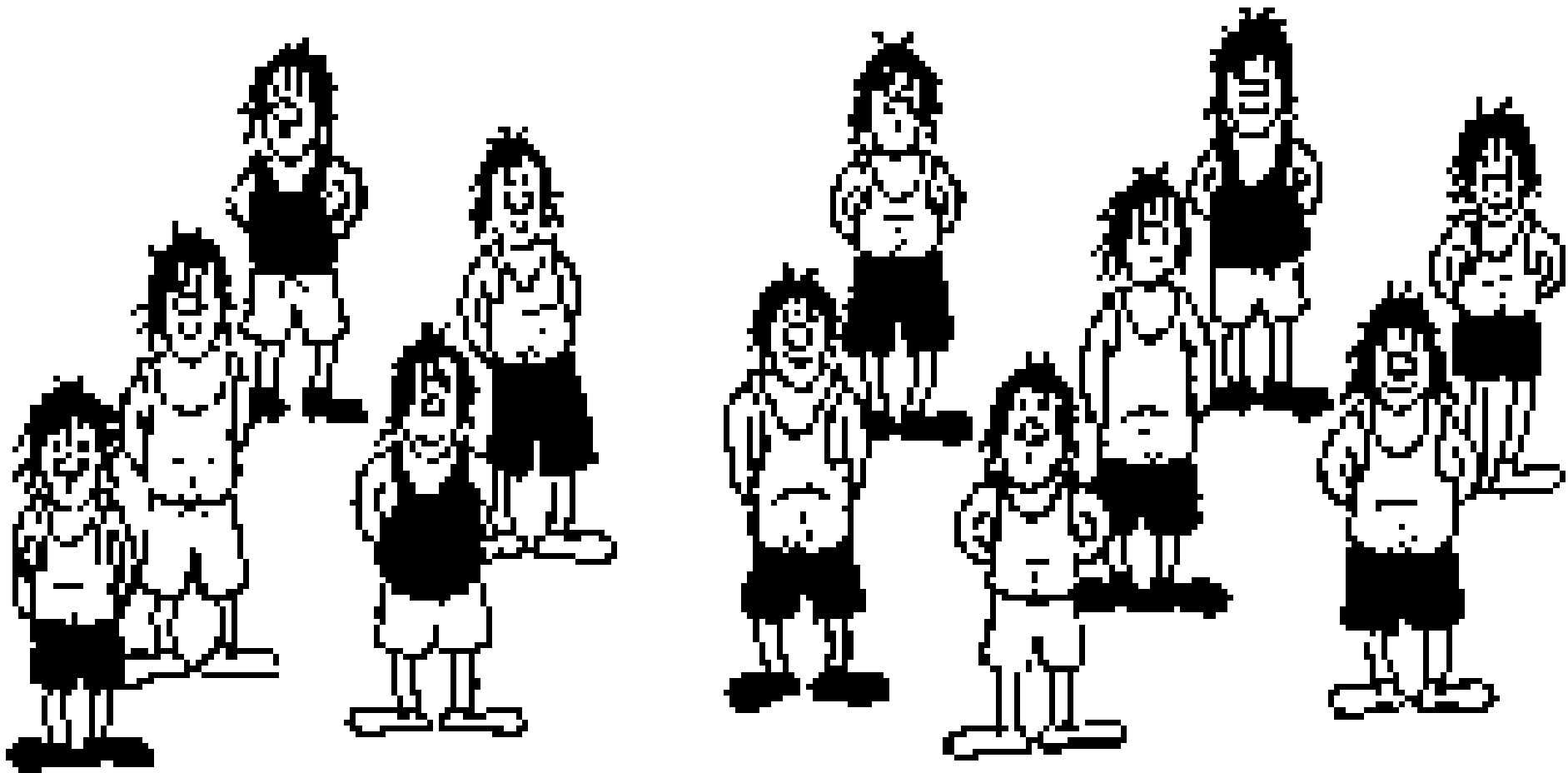
**Así, el área del paralelogramo blanco es:**

$$8.544 \times \text{sen}(1.244) \times 5.385 = 0.9988\dots$$



**64 = 65 ?**

¿Son **12** deportistas...? ¿O serán **13**?

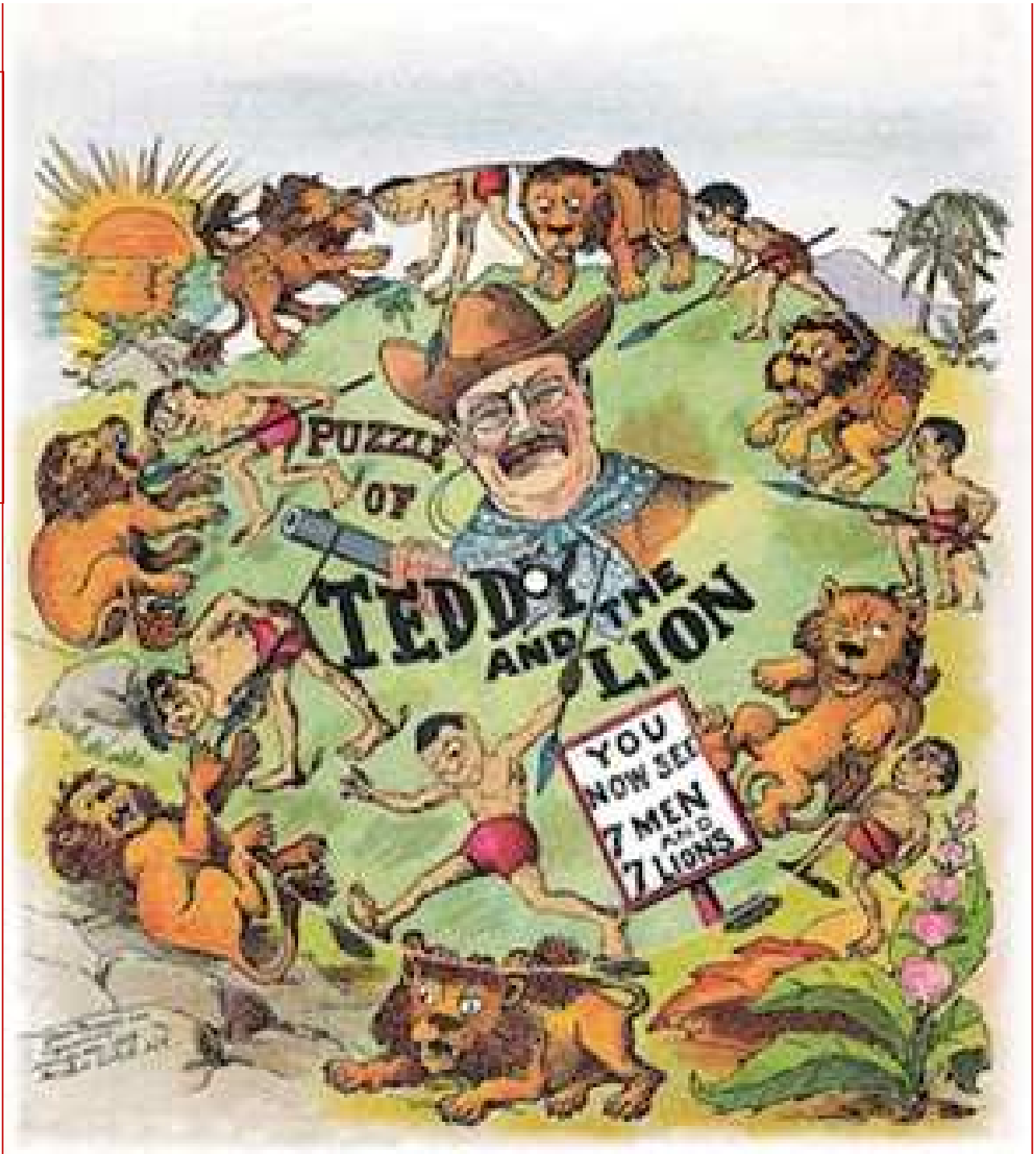


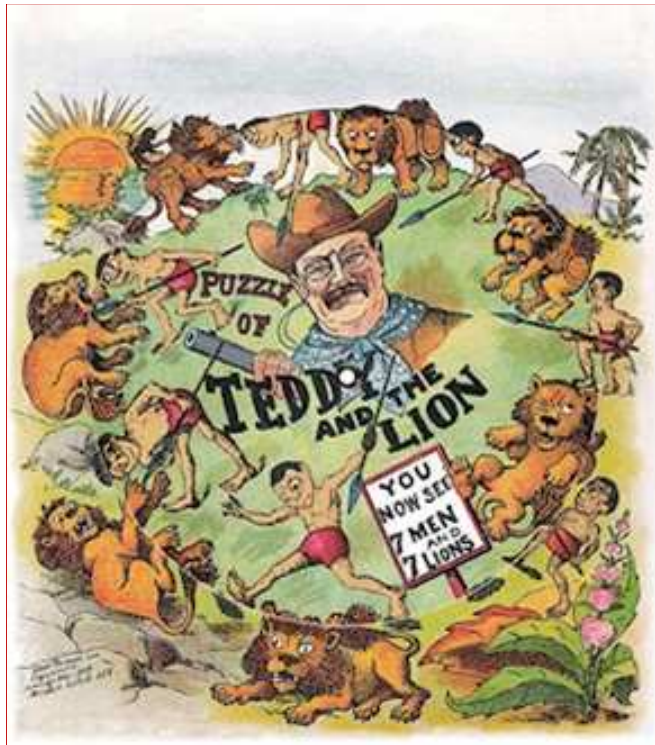


**Sam Loyd**  
**Teddy and the Lion**  
**(1909)**

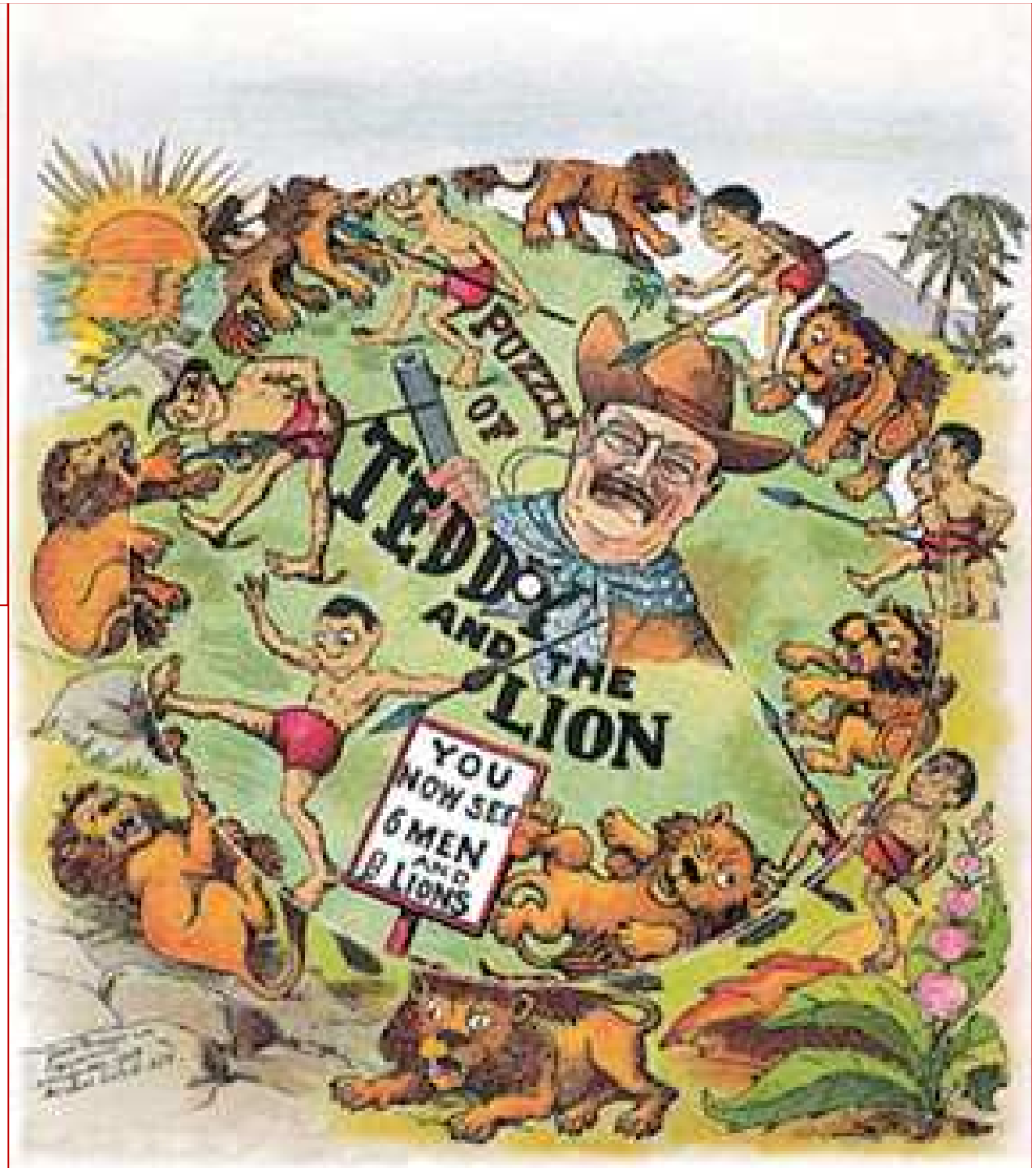
"Teddy" es  
Theodore Roosevelt  
que fue a África a un  
safari en 1909.

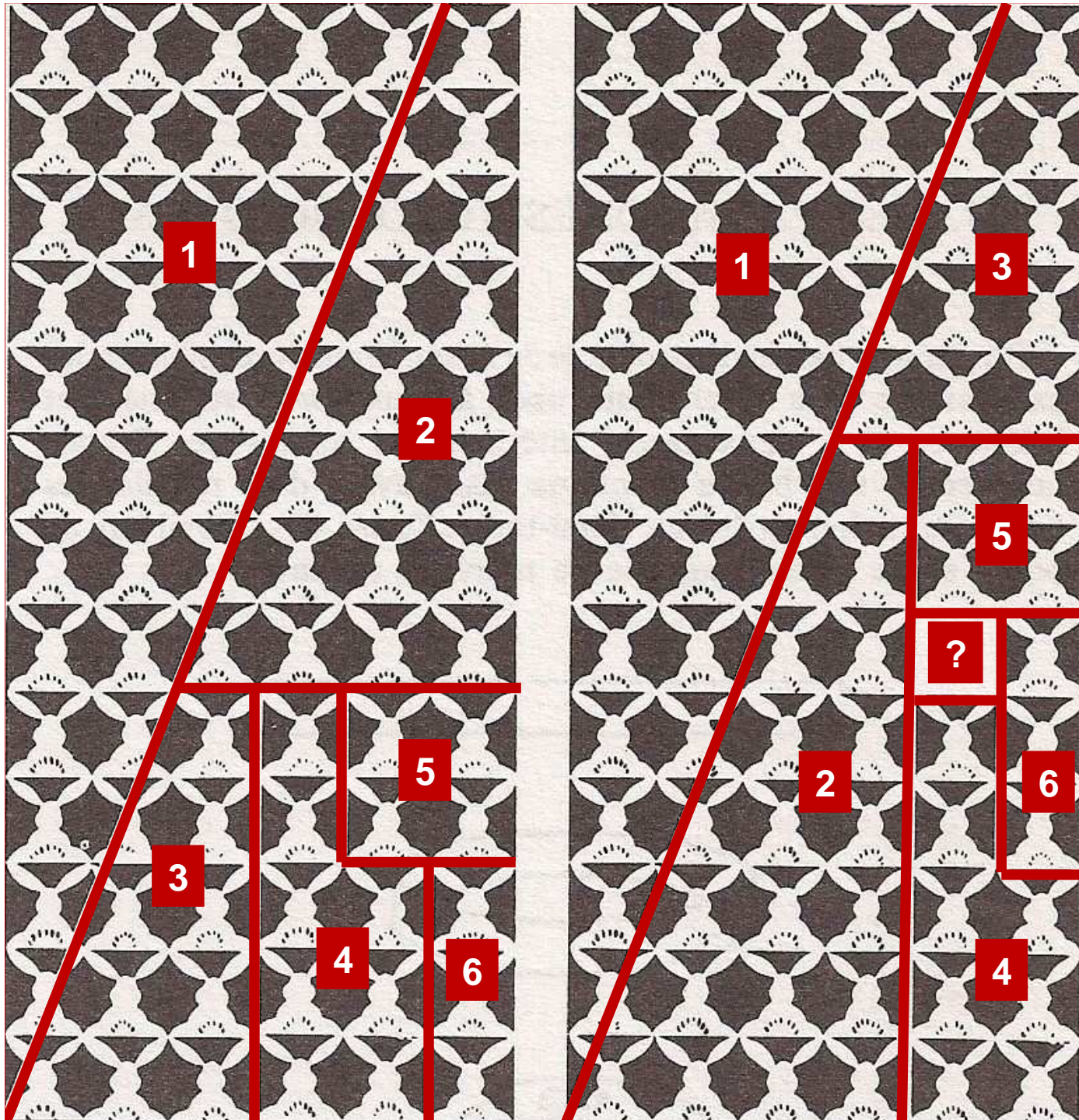
**7 hombres y 7  
leones... y si  
giras el círculo  
central...**





**6 hombres y 8 leones... ¿qué hombre se ha transformado en león?**



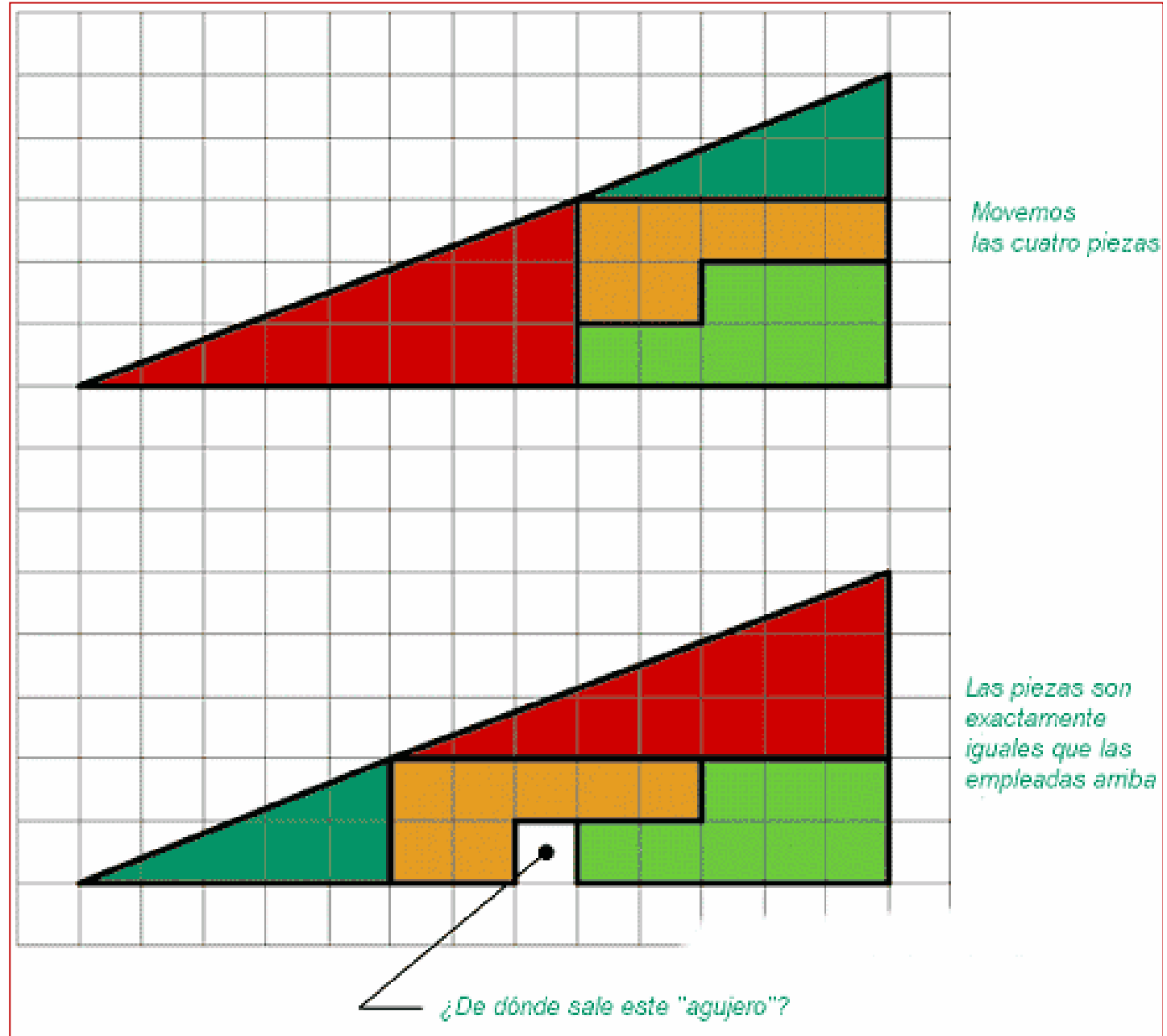


**Paradoja de Curry**  
 El primer rectángulo tiene  $6 \times 13 = 78$  conejos.  
 Tras cortar y recolocar quedan ¡77 conejos!  
 ¿Dónde ha quedado el conejo que falta?

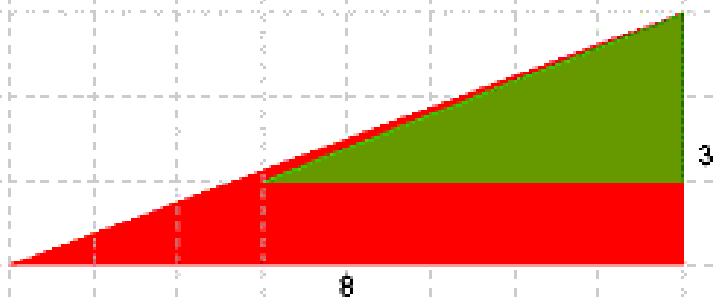


# Una paradoja de Hooper

La aparente  
pérdida de  
superficie es  
debida al  
reajuste de  
los trozos.



EL TRUCO ESTA EN EL BORDE NEGRO QUE OCULTA QUE LOS DOS TRIANGULOS NO SON PROPORCIONALES  
 LOS DOS TRIANGULOS NO TIENEN LA MISMA PENDIENTE



Los dos triángulos no tienen la misma pendiente

$$\frac{8}{3} \neq \frac{5}{2}$$

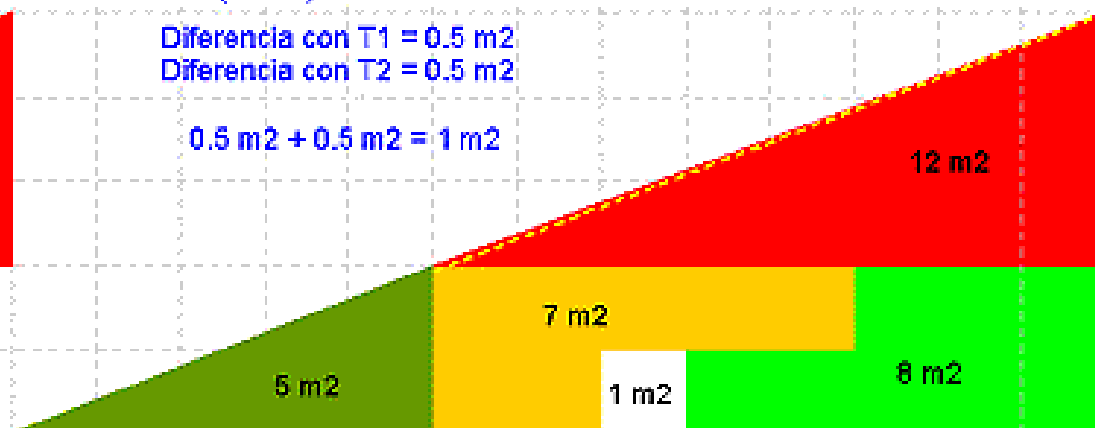
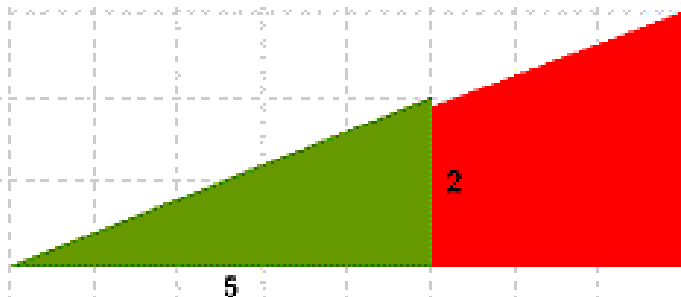


T1 Total 32 m<sup>2</sup>

Area del triángulo ficticio 13 x 5  
 $(13 \times 5) : 2 = 32.5 \text{ m}^2$

Diferencia con T1 = 0.5 m<sup>2</sup>  
 Diferencia con T2 = 0.5 m<sup>2</sup>

$$0.5 \text{ m}^2 + 0.5 \text{ m}^2 = 1 \text{ m}^2$$



T2 Total 33 m<sup>2</sup>

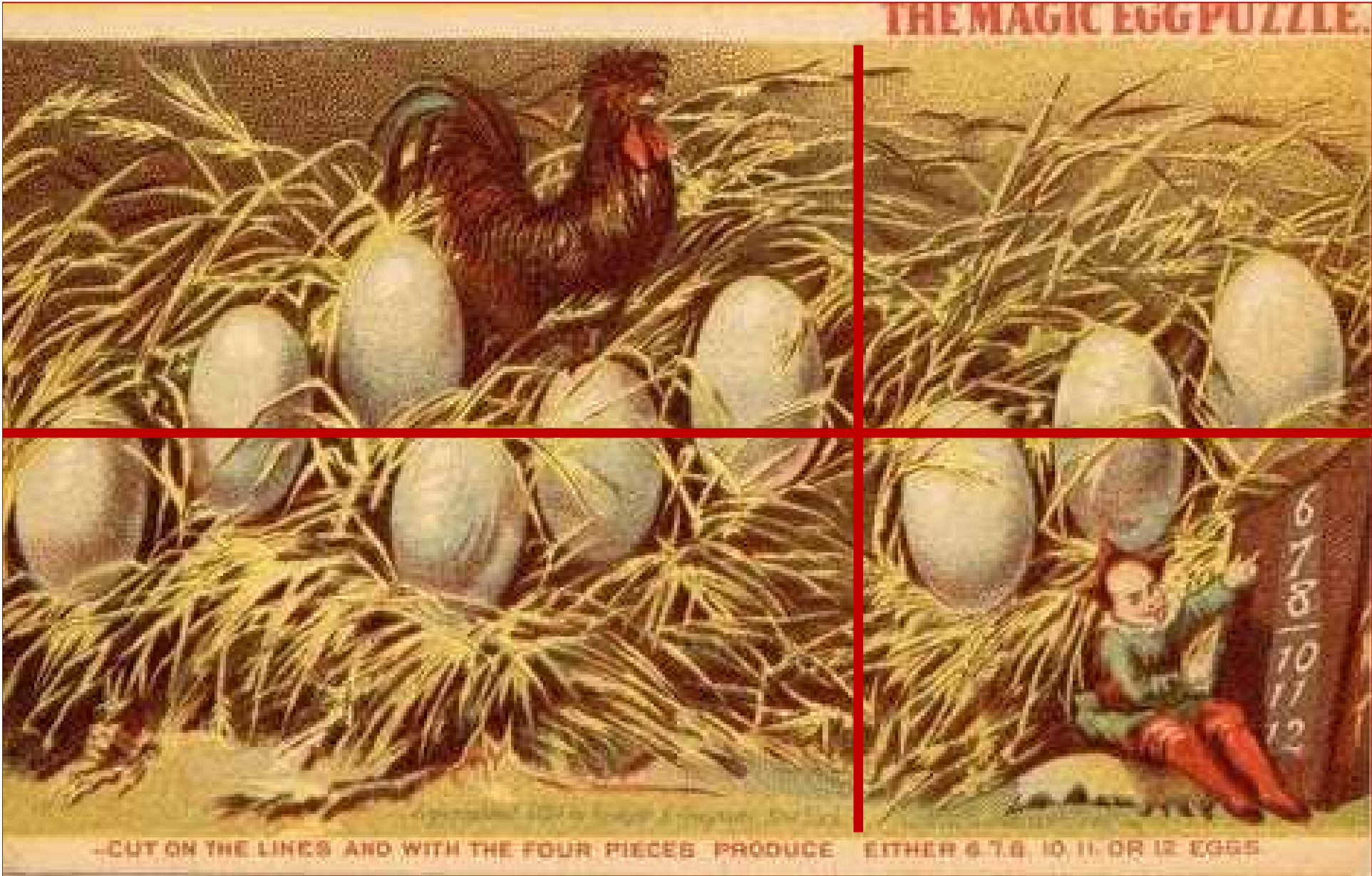
8 huevos

The Magical Eggs, Wemple & Company, 1880

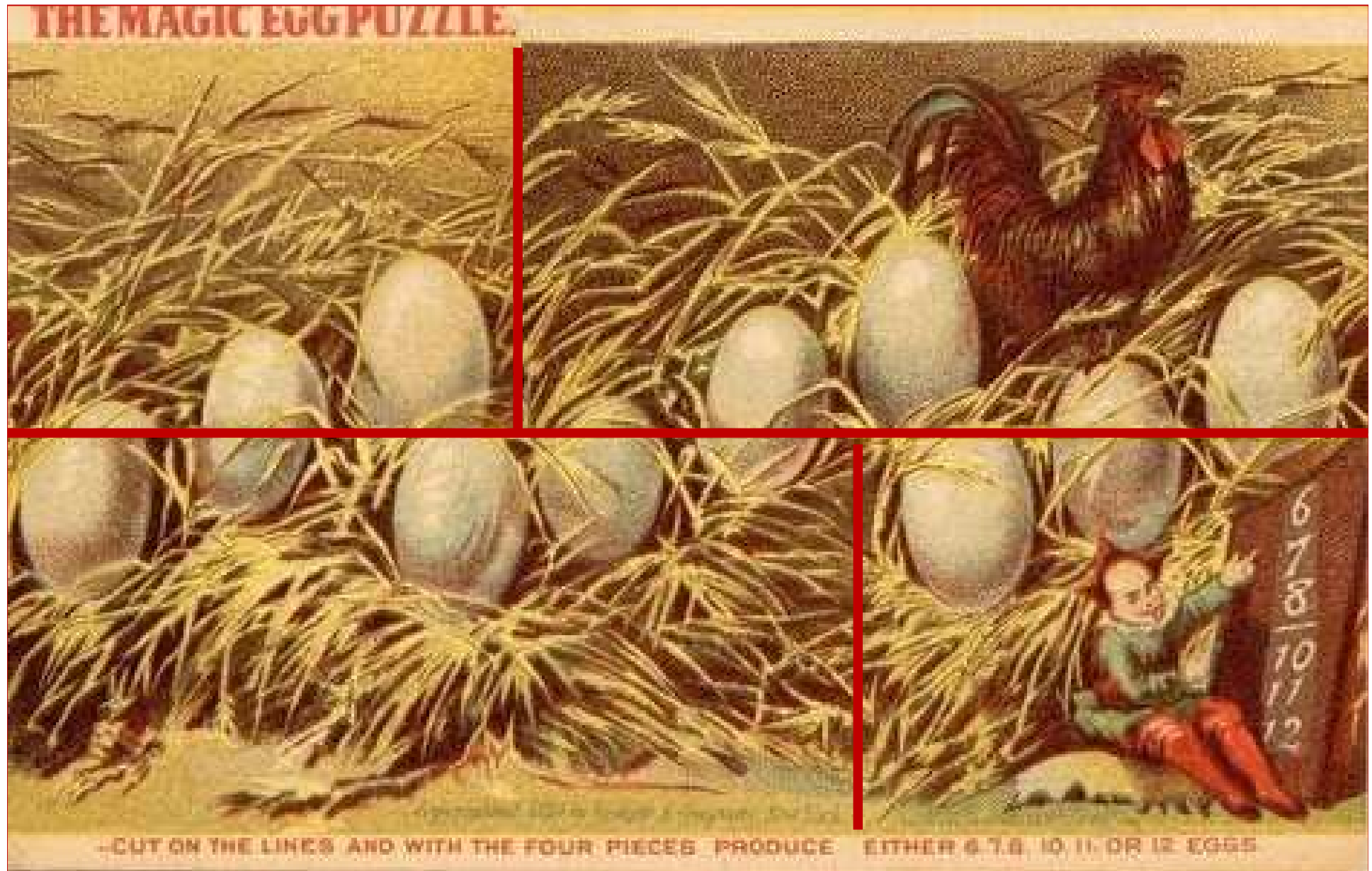


9 huevos

THE MAGIC EGG PUZZLE.



# 10 huevos





Nos dicen  
que... en  
**Barbilandia**,  
el barbero,  
**Jon**, afeita a  
los que no  
se afeitan a  
sí mismos.

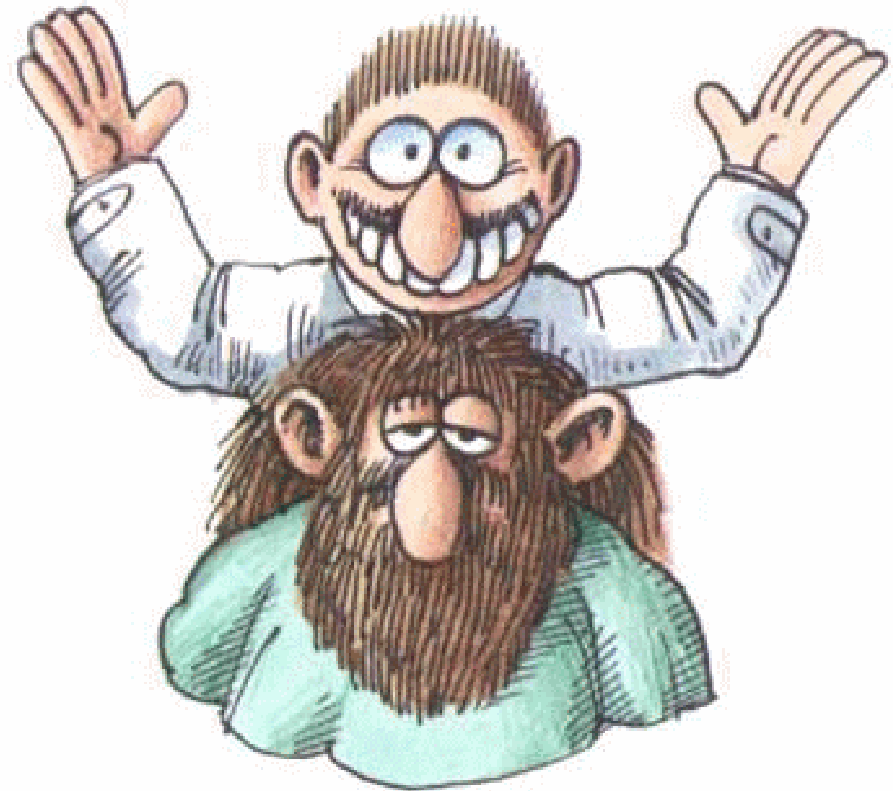
*¿Quién  
afeita al  
barbero de  
Barbilandia?*



[www.HelloCrazy.com](http://www.HelloCrazy.com)

**PARADOJA DE  
RUSSELL**

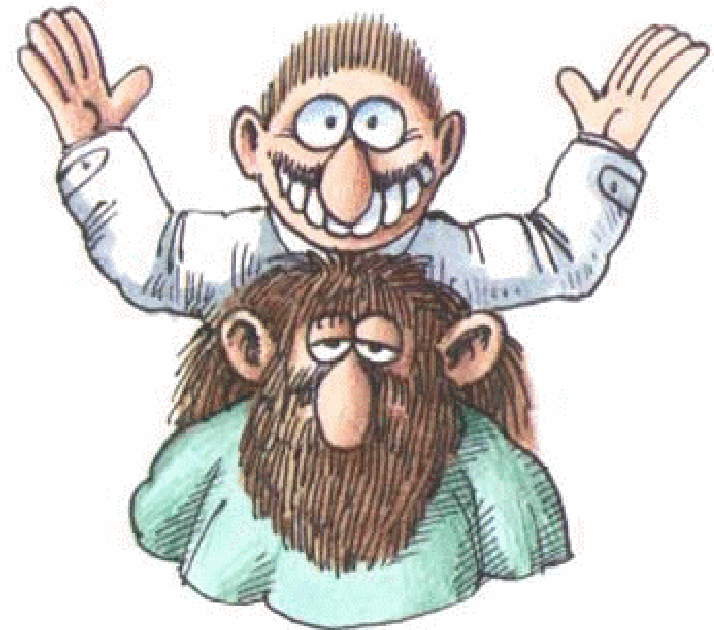
Si Jon no se afeita a sí mismo, será una de las personas de Barbilandia que no se afeitan a sí mismas...



[www.HelloCrazy.com](http://www.HelloCrazy.com)

Si Jon no se afeita a sí mismo, será una de las personas de Barbilandia que no se afeitan a sí mismas...

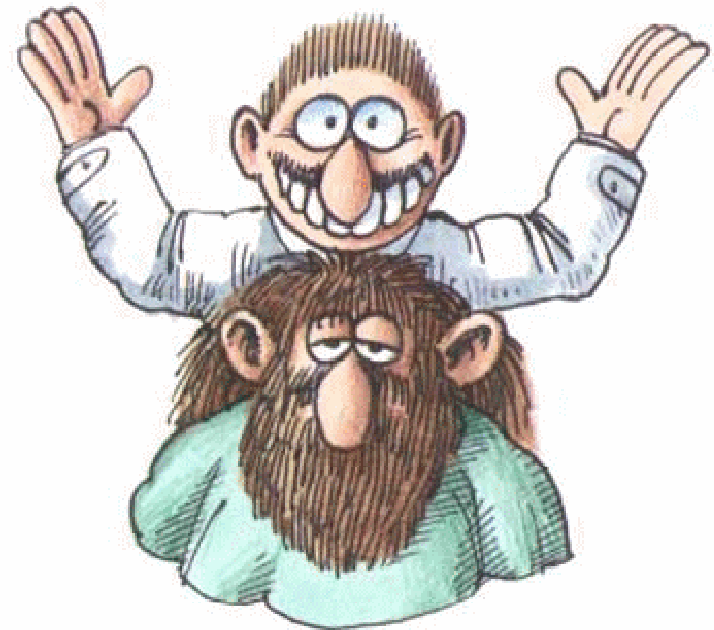
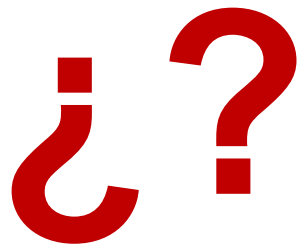
...con lo cual **Jon** debería de afeitarse, siendo por lo tanto una de las personas que se afeitan a sí mismas.



Si Jon no se afeita a sí mismo, será una de las personas de Barbilandia que no se afeitan a sí mismas...

...con lo cual **Jon** debería de afeitarse, siendo por lo tanto una de las personas que se afeitan a sí mismas...

... no debiendo por tanto afeitarse...



LA CIENCIA ESTÁ BASADA EN LAS MATEMÁTICAS,  
Y LAS MATEMÁTICAS EN LA LÓGICA,  
PERO, ¿LA LÓGICA ES TAN IRREFUTABLE COMO PARECE?

PARADOJA DE RUSSELL  
UN BARBERO AFEITA SÓLO A LOS HOMBRES  
QUE NO SE AFEITAN A SÍ MISMOS.  
¿QUIÉN AFEITA AL BARBERO?

SI ME AFEITO A MÍ MISMO,  
¡NO PUEDO SER AFEITADO  
POR EL BARBERO!

¡PERO YO SOY EL  
BARBERO!  
¡ME VOY A VOLVER LOCO!



LA CIENCIA ESTÁ BASADA EN LAS MATEMÁTICAS,  
Y LAS MATEMÁTICAS EN LA LÓGICA,  
PERO, ¿LA LÓGICA ES TAN IRREFUTABLE COMO PARECE?



PARADOJA DE RUSSELL  
UN BARBERO AFEITA SÓLO A LOS HOMBRES  
QUE NO SE AFEITAN A SÍ MISMOS.  
¿QUIÉN AFEITA AL BARBERO?

SI ME AFEITO A MÍ MISMO,  
¡NO PUEDO SER AFEITADO  
POR EL BARBERO!

¡PERO YO SOY EL  
BARBERO!  
¡ME VOY A VOLVER LOCO!



**¡Esta sentencia es contradictoria!**

LA CIENCIA ESTÁ BASADA EN LAS MATEMÁTICAS,  
Y LAS MATEMÁTICAS EN LA LÓGICA,  
PERO, ¿LA LÓGICA ES TAN IRREFUTABLE COMO PARECE?

PARADOJA DE RUSSELL  
UN BARBERO AFEITA SÓLO A LOS HOMBRES  
QUE NO SE AFEITAN A SÍ MISMOS.  
¿QUIÉN AFEITA AL BARBERO?

SI ME AFEITO A MÍ MISMO,  
¡NO PUEDO SER AFEITADO  
POR EL BARBERO!

¡PERO YO SOY EL  
BARBERO!  
¡ME VOY A VOLVER LOCO!



**¡JON NO EXISTE!**

**“Sorites”** es la palabra griega para “montón” o “pila”.  
Se da este nombre a una clase argumentos paradójicos –  
atribuidos al lógico Eubulides de Mileto.

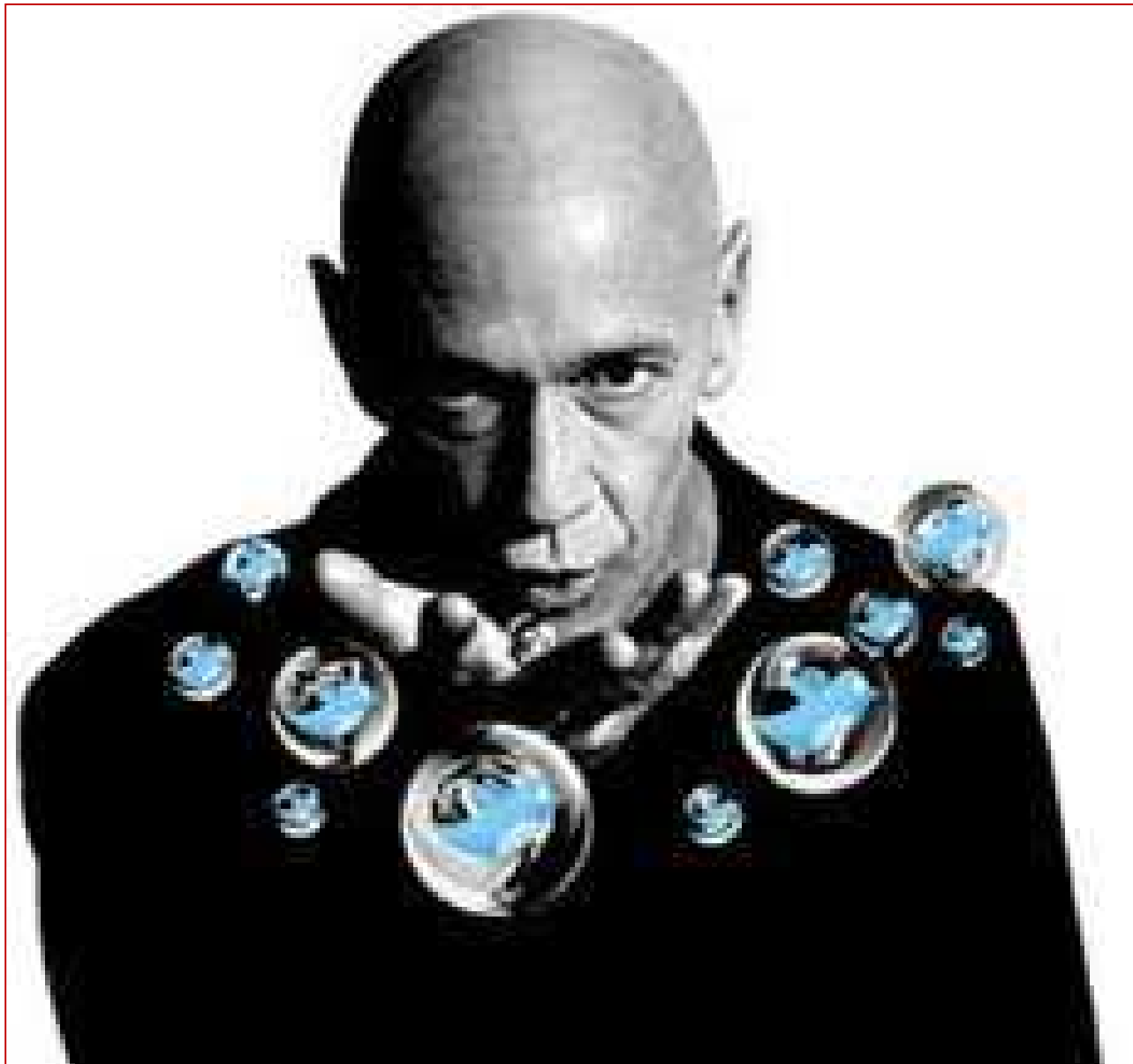
## PARADOJAS DE SORITES



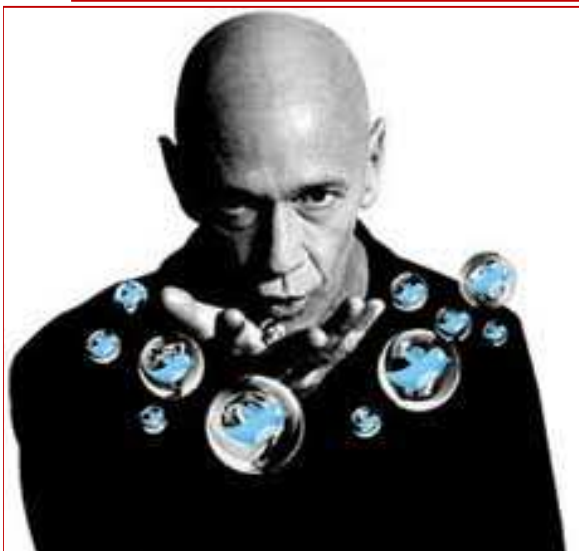
**El *hombre calvo*:**  
¿describirías a un hombre  
con un pelo en la cabeza  
como calvo?



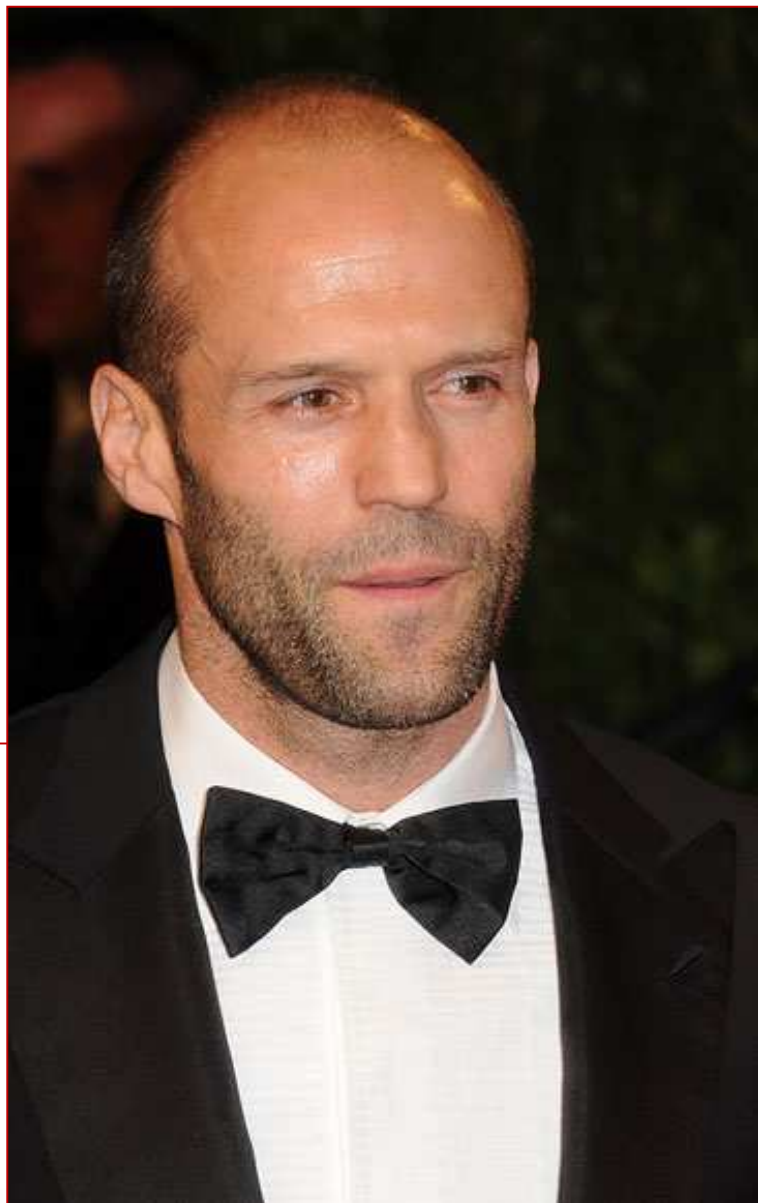
El *hombre calvo*: ¿describirías a un hombre con un pelo en la cabeza como calvo?



El *hombre calvo*: ¿describirías a un hombre con un pelo en la cabeza como calvo?



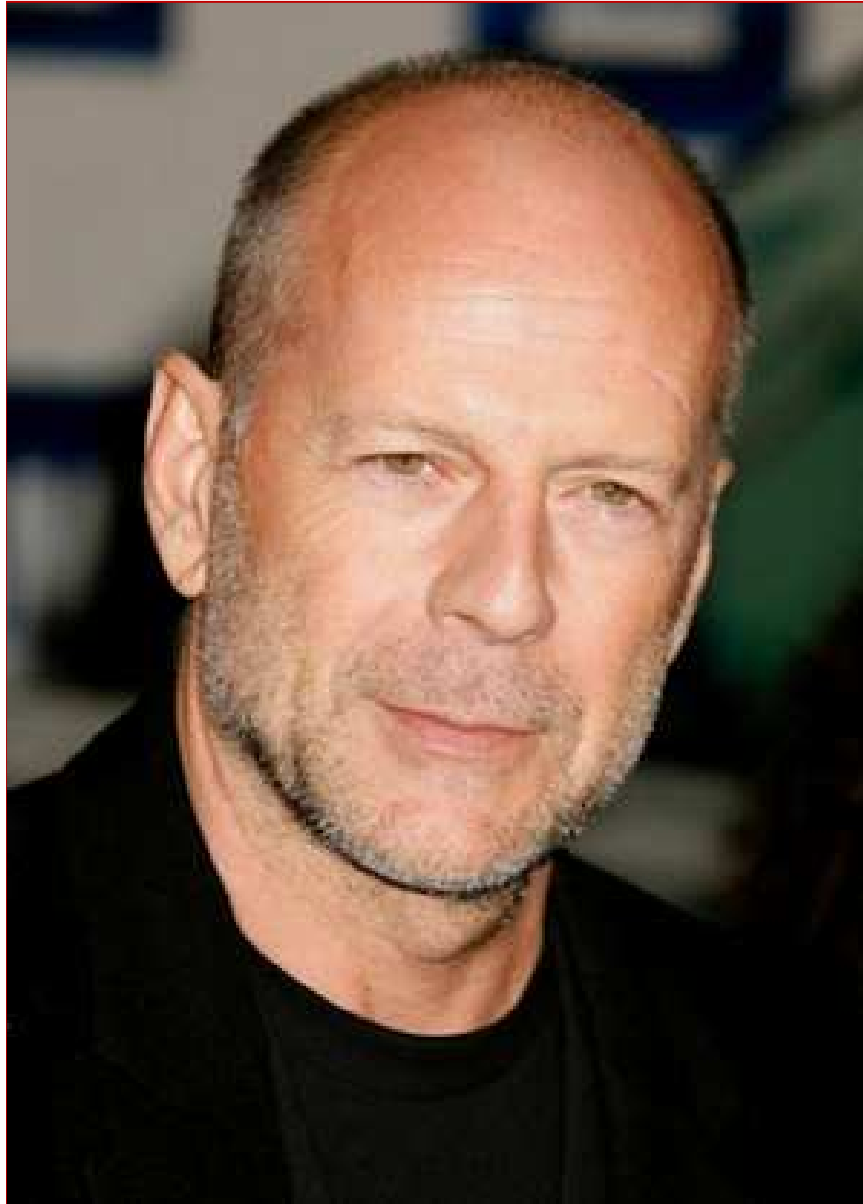
El *hombre calvo*: ¿describirías a un hombre con un pelo en la cabeza como calvo?



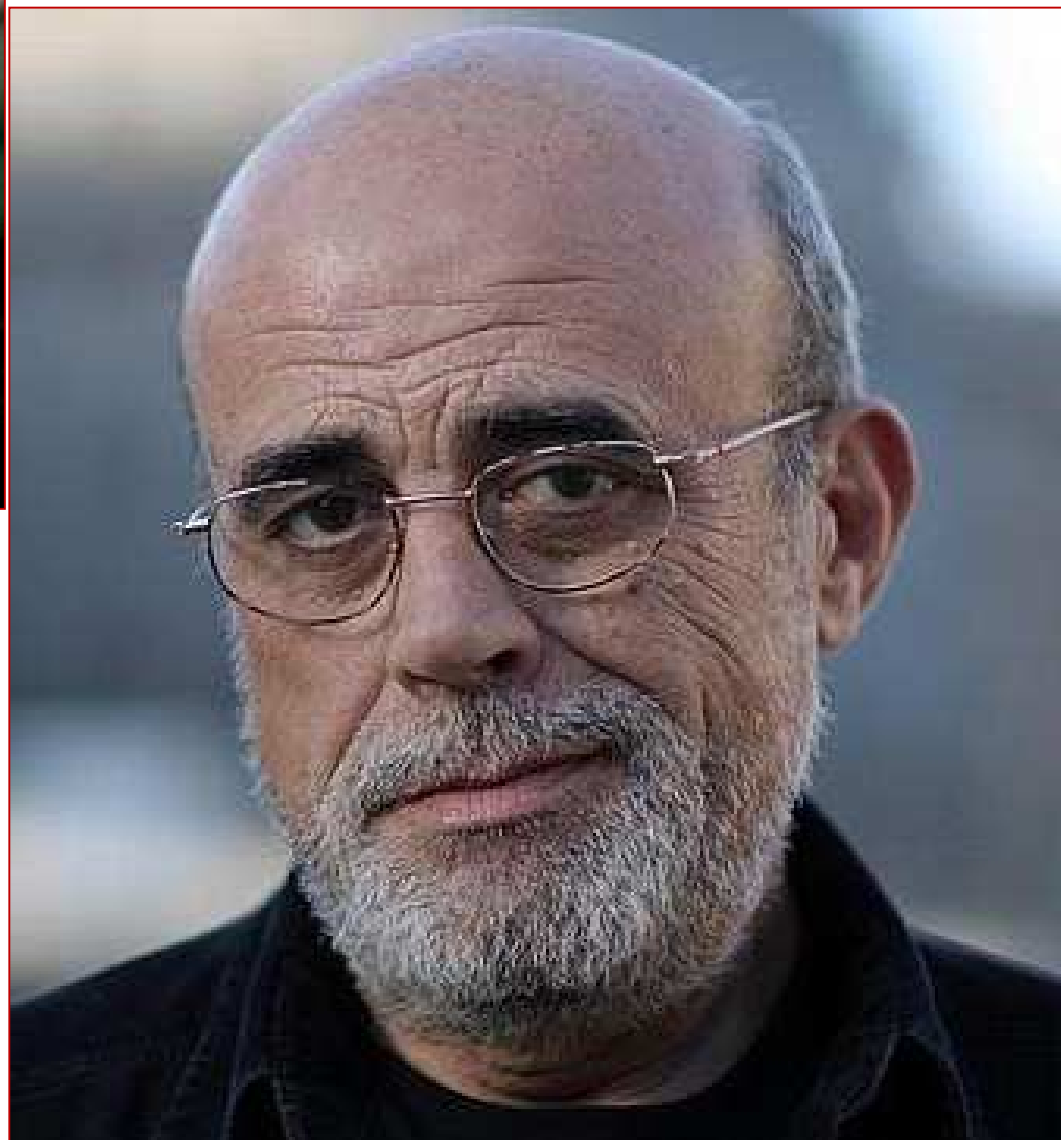
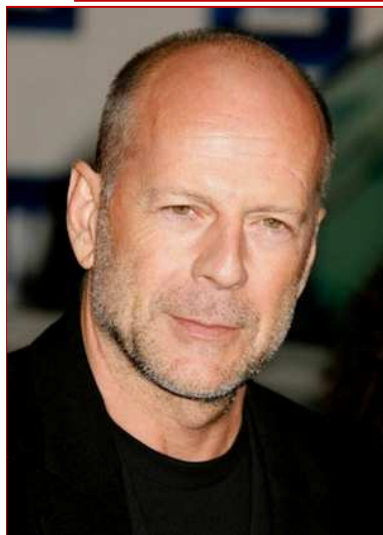
El *hombre calvo*: ¿describirías a un hombre con un pelo en la cabeza como calvo?



El *hombre calvo*: ¿describirías a un hombre con un pelo en la cabeza como calvo?



El *hombre calvo*: ¿describirías a un hombre con un pelo en la cabeza como calvo?



Me conté ayer los cabellos de la cabeza y tenía **100.000...**, y no soy calva. Si con esta cantidad no soy calva tampoco lo seré si me arranco una cana, es decir, con **99.999** pelos seguiría sin ser calva... pero entonces, si me quito otro pelo, tampoco lo sería, es decir, no sería calva con **999.998** pelos. Continuando de este modo, es claro que con 3 pelos no sería calva...



## **calvo, va.**

(Del lat. *calvus*).

1. adj. **Dicho de una persona: Que ha perdido el pelo de la cabeza.** U. t. c. s.
2. adj. Dicho de un terreno: Sin vegetación alguna.
3. adj. Dicho del paño o de otro tejido: Que ha perdido el pelo.
4. f. Parte de la cabeza de la que se ha caído el pelo.
5. f. Parte de una piel, felpa u otro tejido semejante que ha perdido el pelo por el uso.
6. f. Sitio en los sembrados, plantíos y arbolados donde falta la vegetación correspondiente.
7. f. Juego que consiste en tirar los jugadores a proporcionada distancia piedras a la parte superior de un madero sin tocar antes en tierra.

## **calva de almete.**

1. f. Parte superior de esta pieza de la armadura que cubre el cráneo.



REAL ACADEMIA ESPAÑOLA



¿



**Acercamiento a lenguaje ideal; lo esencial es la precisión, la vaguedad del lenguaje natural es un defecto a eliminar: Frege y Russell.**

?



**Acercamiento a lenguaje ideal; esencial la precisión, la vaguedad del lenguaje natural es un defecto a eliminar: Frege y Russell.**

**Utilización de lógicas multivaluadas (no clásicas), como la lógica difusa de Goguen y Zadeh.**





**Acercamiento a lenguaje ideal; esencial la precisión, la vaguedad del lenguaje natural es un defecto a eliminar: Frege y Russell.**

**Utilización de lógicas multivaluadas (no clásicas), como la lógica difusa de Goguen y Zadeh.**

**... Aceptar la paradoja...**



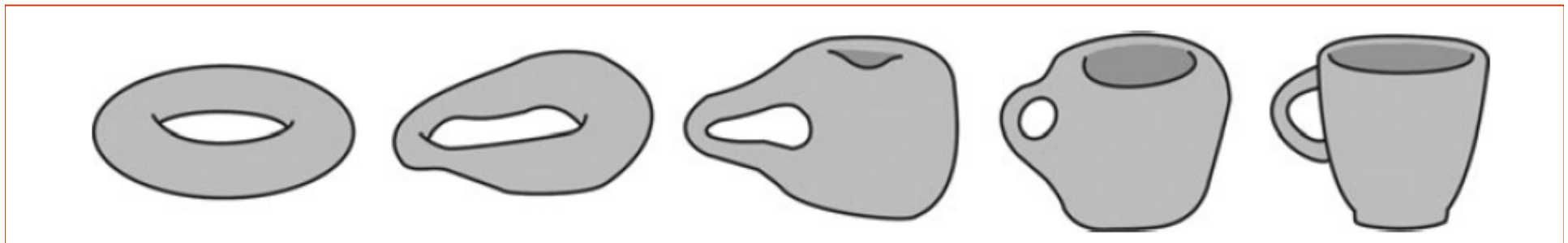
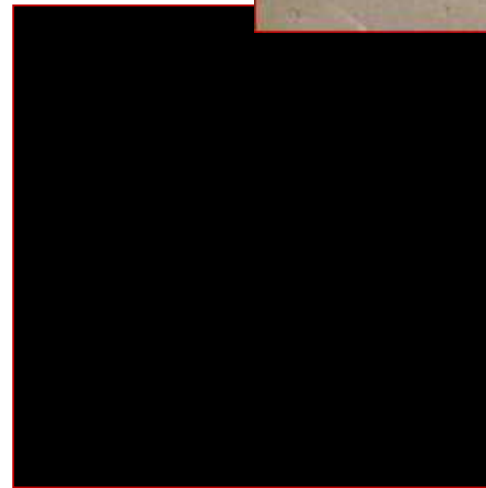
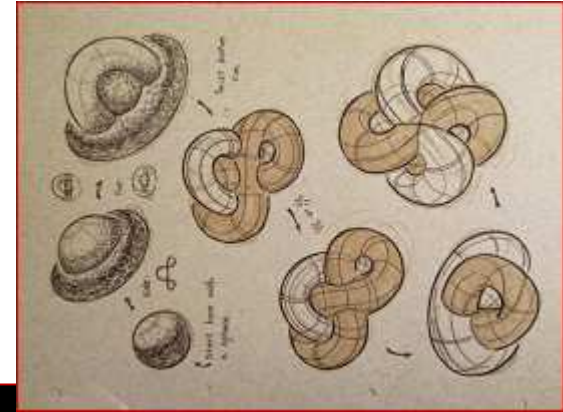
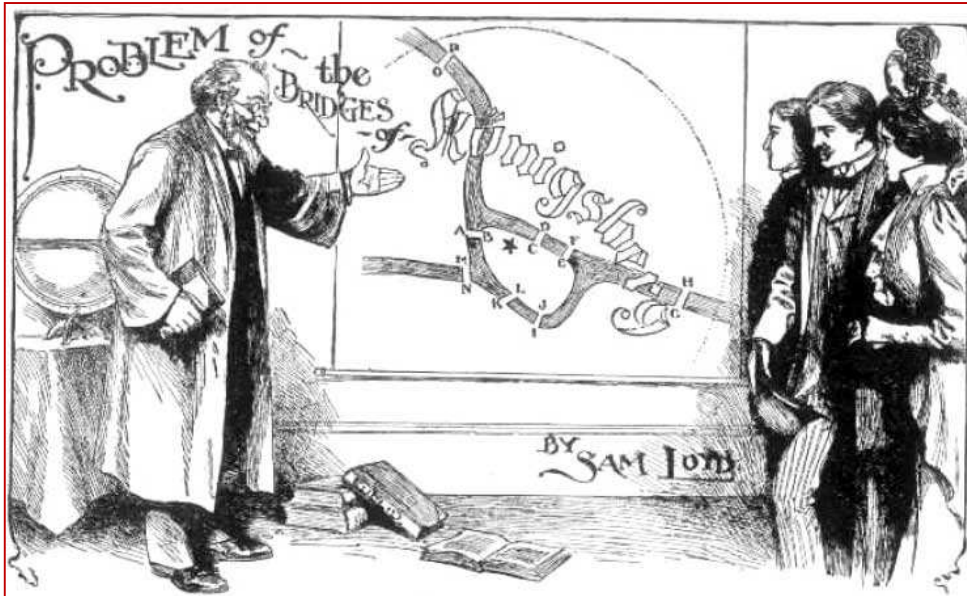


**Un grano de arena no es un montón**



**¿En qué momento ha pasado de no ser un montón a serlo?**

# TOPOLOGÍA

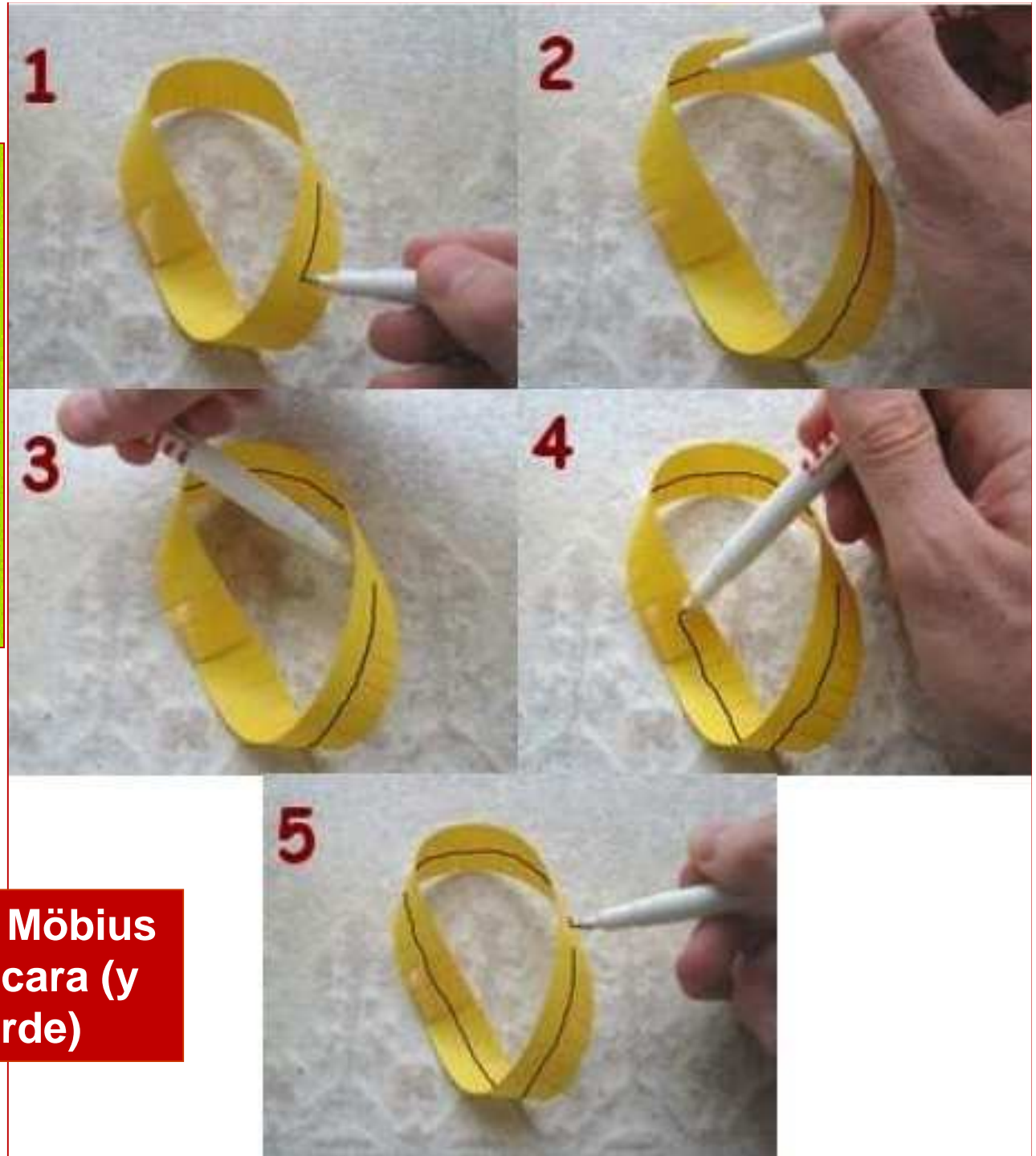
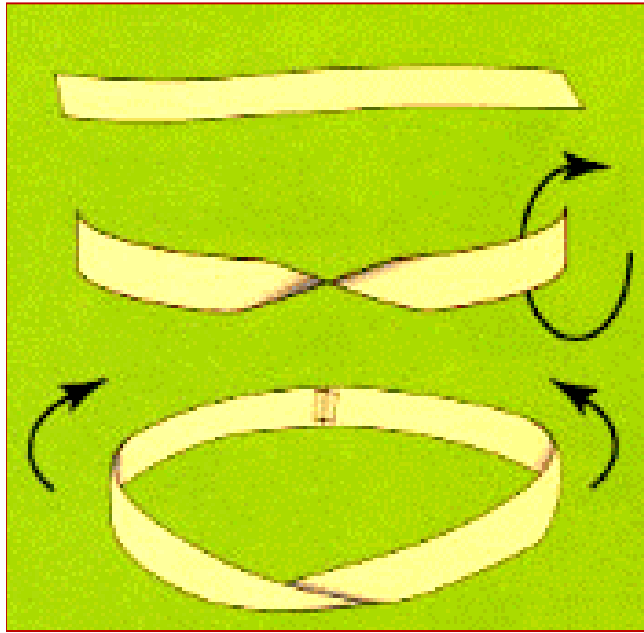




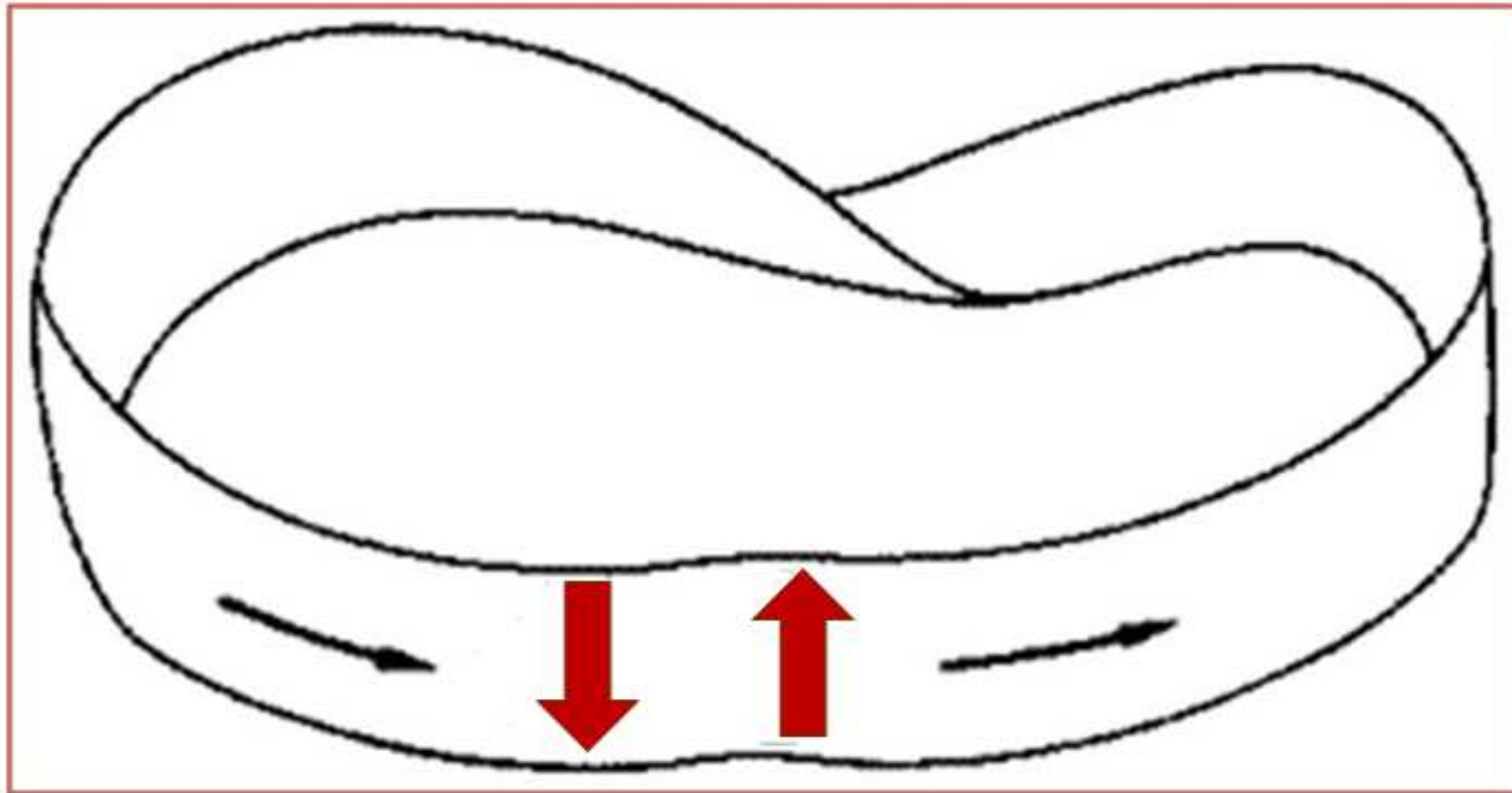
Si se toma una tira de papel y se pegan los extremos como muestra la figura, se obtiene un **cilindro**, es decir, una superficie que tiene como bordes dos circunferencias disjuntas y dos lados (la cara interior y la exterior de la figura).

Si se hace lo mismo, pero antes de pegar los extremos se gira uno de ellos **180°**, el objeto que se obtiene es una **banda de Möbius**.





**1.- La banda de Möbius sólo tiene una cara (y un único borde)**



2.- La banda de Möbius es *no orientable*: dibuja por ejemplo una flecha sobre la banda, y muévela a lo largo de su única cara... observa que cuando regresas al punto de partida, ¡la flecha ha cambiado de sentido!



En la primera cara de una banda de papel rectangular (al menos 10 veces más larga que ancha) se escribe la mitad de la poesía:

***Trabajar, trabajar sin cesar,  
para mi es obligación  
no puedo flaquear  
pues amo mi profesión...***



***Poema sobre banda de Möbius, Luc Étienne***

En la primera cara de una banda de papel rectangular (al menos 10 veces más larga que ancha) se escribe la mitad de la poesía:

***Trabajar, trabajar sin cesar,  
para mi es obligación  
no puedo flaquear  
pues amo mi profesión...***

Se gira esta tira de papel sobre su lado más largo (es esencial), y se escribe la segunda mitad del poema:

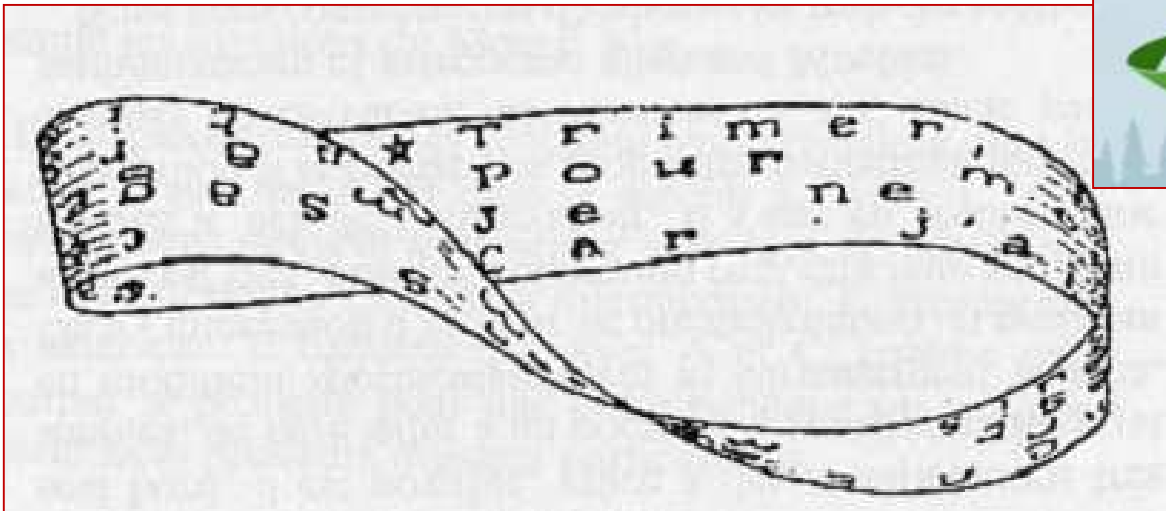
***Es realmente un tostón  
perder el tiempo,  
y grande es mi sufrimiento,  
cuando estoy de vacación.***



***Poema sobre banda de Möbius, Luc Étienne***

Se pega la tira para obtener una banda de Möbius y sobre ella se lee (sólo tiene una cara) algo con sentido “opuesto” a la suma de los dos poemas anteriores:

***Trabajar, trabajar sin cesar, es realmente un tostón  
para mi es obligación perder el tiempo  
no puedo flaquear y grande es mi sufrimiento,  
pues amo mi profesión... cuando estoy de vacación.***





**... y para acabar...**



Construye dos bandas de Möbius (con papel rojo), girándolas en direcciones opuestas (una en la dirección de las agujas del reloj y la otra en la contraria. Pégalas de manera que quede la una perpendicular a la otra. Corta cada banda de Möbius por la mitad de manera longitudinal...

**... y entonces...**





... porque las matemáticas enamoran...

ES TÍMULO TAL  MAT TEMÀTICO

G  
R  
A  
C  
I  
A  
S