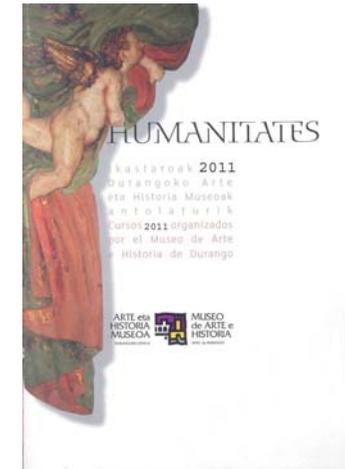
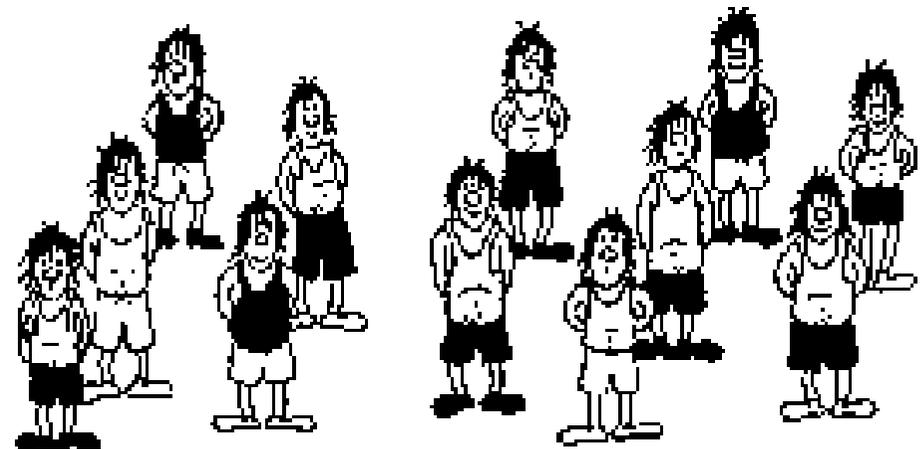


# Paradojas lógicas y visuales

Marta Macho Stadler, UPV/EHU



**Durango**, 21  
de marzo  
de 2011



***Las **paradojas** han tenido un papel crucial en la historia intelectual, a menudo presentando los desarrollos revolucionarios de las ciencias, de las matemáticas y de la lógica.***

***Cada vez que, en cualquier disciplina, aparece un problema que no puede resolverse en el interior del cuadro conceptual susceptible de aplicarse, experimentamos un choque, choque que puede constreñirnos a rechazar la antigua estructura inadecuada y a adoptar una nueva.***

***Es a este proceso de mutación intelectual al que se le debe el nacimiento de la mayor parte de las ideas matemáticas y científicas.***

***Escapar a la paradoja***

**1967**

**Anatol Rapoport  
(1911-2007)**





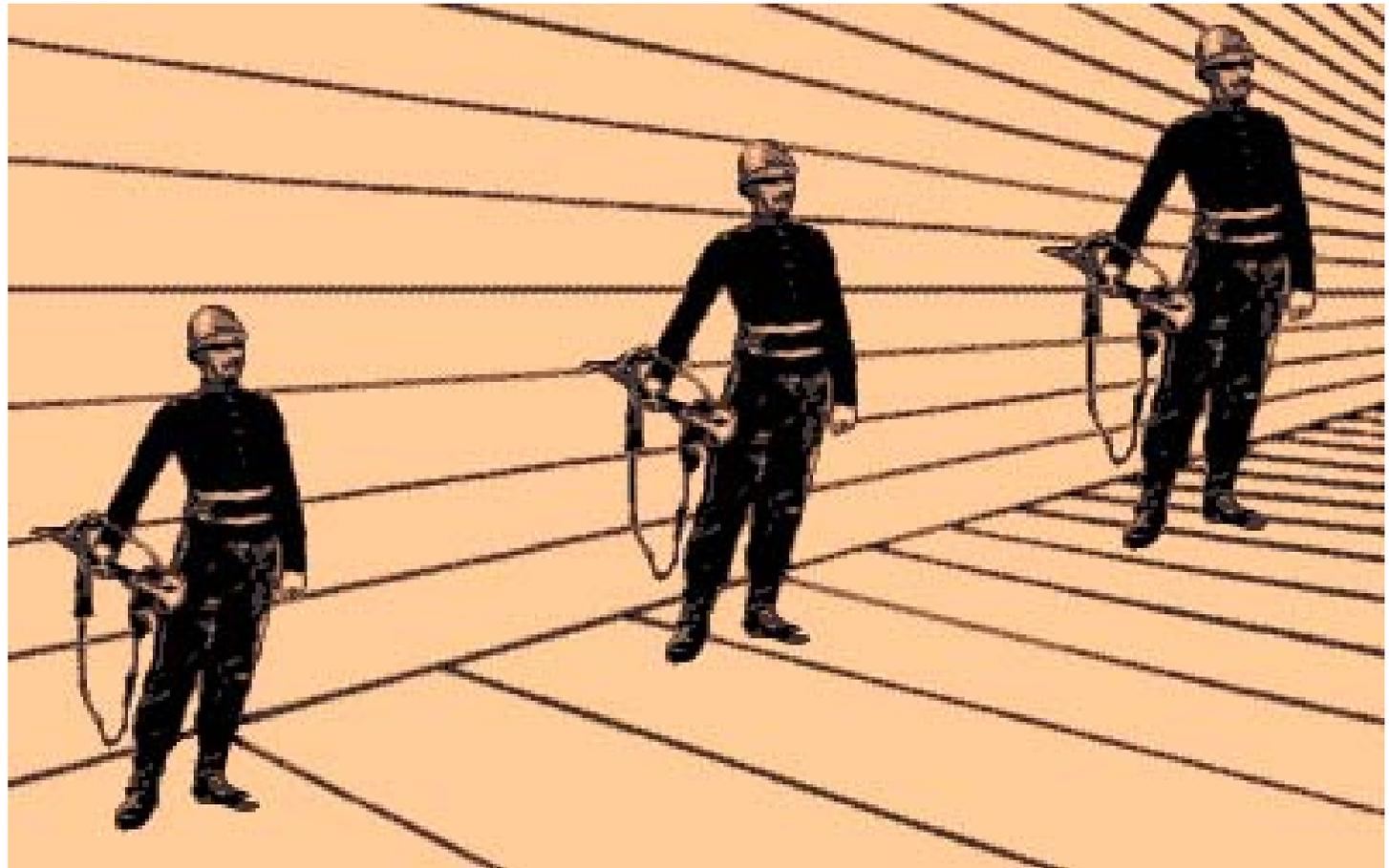
**Las paradojas  
aparecen a diario,  
aunque no nos demos  
cuenta...**

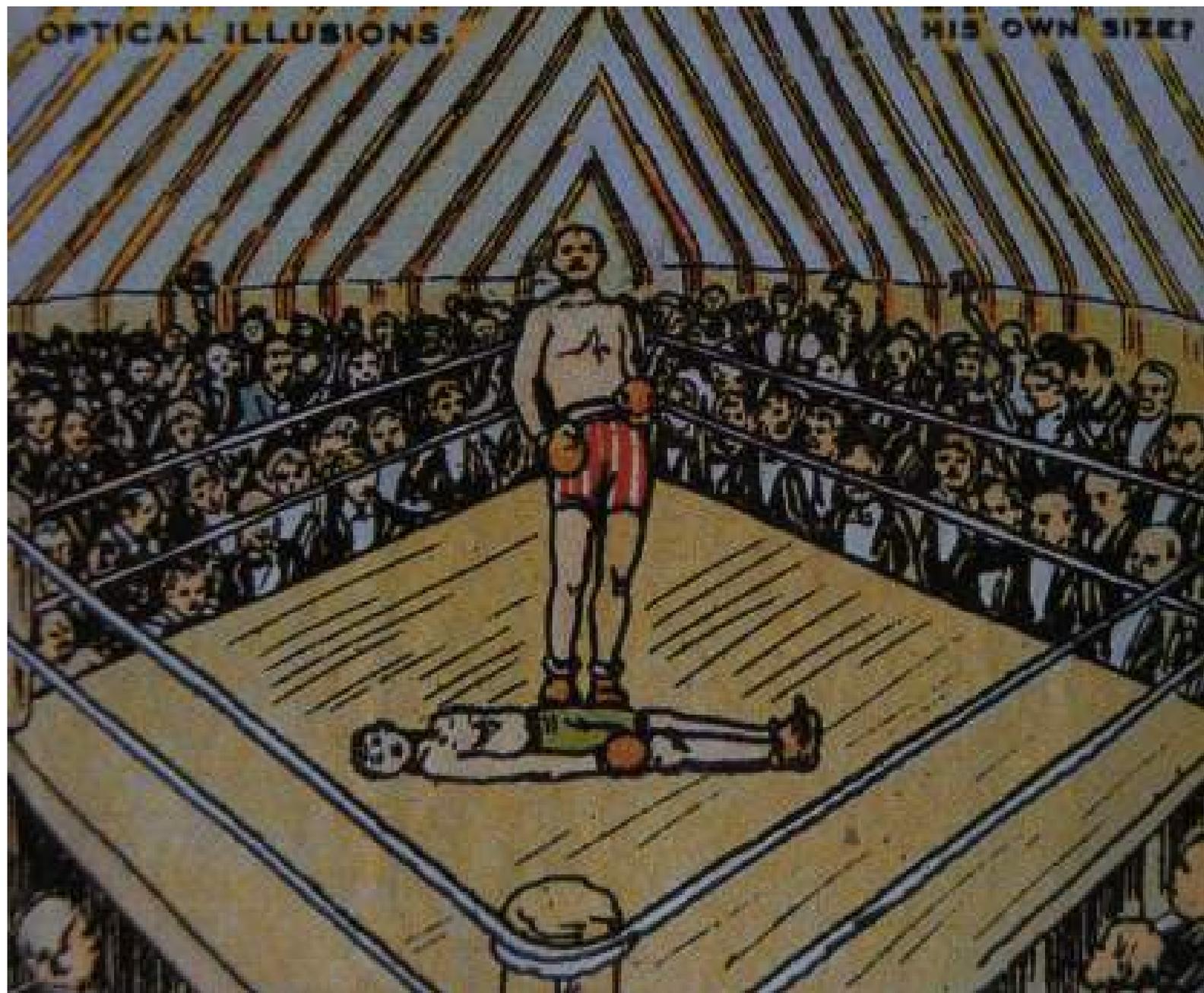


# Paradojas de la perspectiva

Paradoja  
de la  
perspectiva  
ascendente

*¿Son los  
soldados  
del  
mismo  
tamaño?*





***¿Cuál de los boxeadores es más alto?***

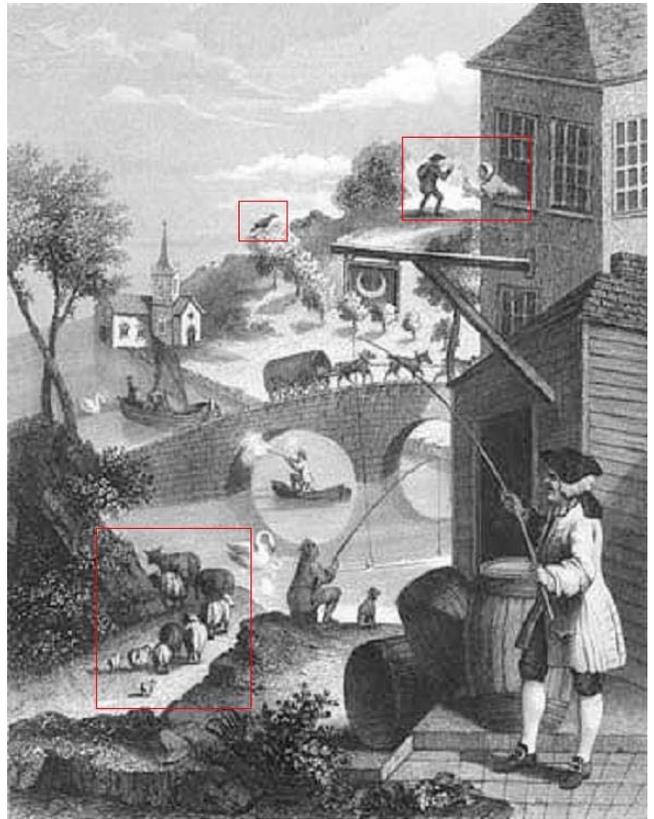


**William Hogarth  
(1697-1764)**

***The Magpie on  
the Gallows***

**1754**

**Contiene más  
de 20 errores de  
perspectiva**



# El hotel infinito

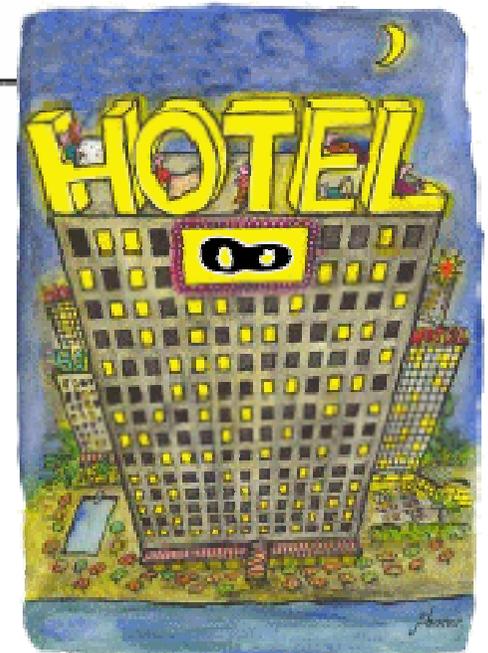
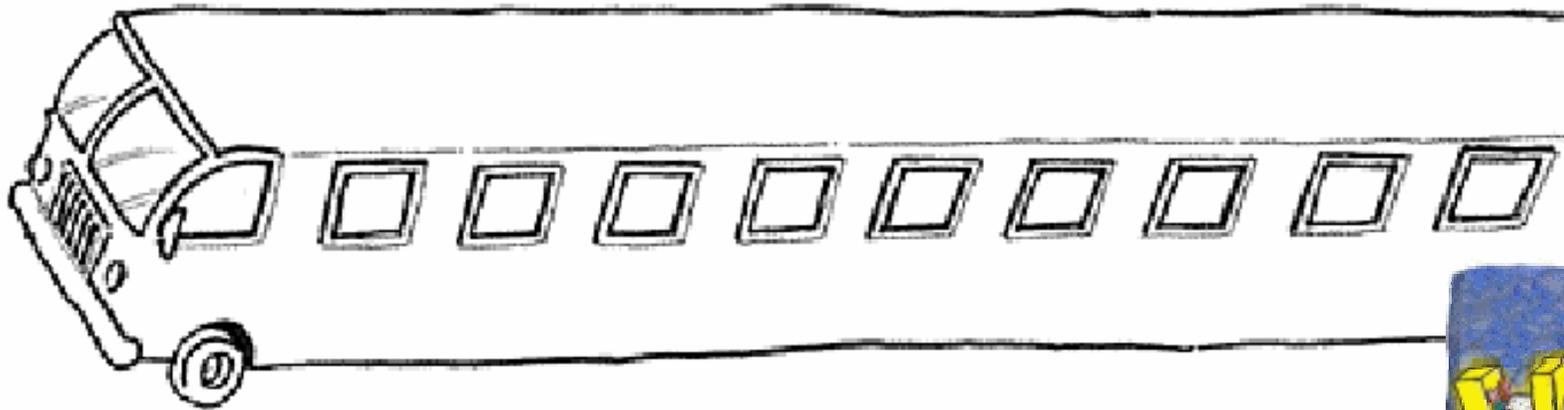
Érase una vez un hotel con infinitas habitaciones (numeradas), con el lema: *“Se garantiza el alojamiento de cualquier nuevo huésped”*.

Primera paradoja: llega un hombre al hotel que se encuentra lleno, ... el recepcionista, fiel al lema del *Hotel Infinito* avisa por megafonía a todos sus clientes, para que se cambien de su habitación  $n$  a la habitación  $n+1$ , con lo que la habitación número  $1$  queda libre para el nuevo huésped...

Duda: ¿Qué pasa con el huésped que se encontraba en la última habitación?

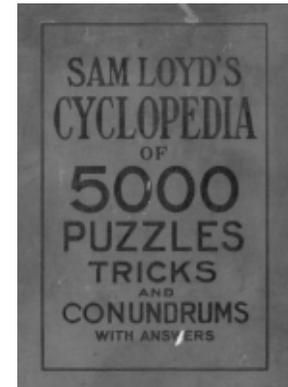
*... No existe la “última habitación”*

Segunda paradoja: llega al *Hotel Infinito* (que está lleno) una excursión con infinitos pensionistas (numerados)... el recepcionista solicita por megafonía a todos sus clientes que se cambien de su habitación número  $n$  a la habitación  $2n$ . De esa forma todos los huéspedes se mudan a una habitación par, y todas las habitaciones impares quedan libres...



# Desapariciones geométricas

## Rompecabezas *Abandone la Tierra*, 1914 Sam Loyd (1841-1911)



Just to show the style best calculated to sell in the stores or by street hawkers as a novelty, occasion is taken to illustrate the famous "Get Off the Earth" puzzle, of which over ten millions were sold to the public. The puzzle was printed in bright colors upon two movable pieces (which cannot be shown here). You first see thirteen men, and then only twelve, and the puzzle is to tell which man disappeared.

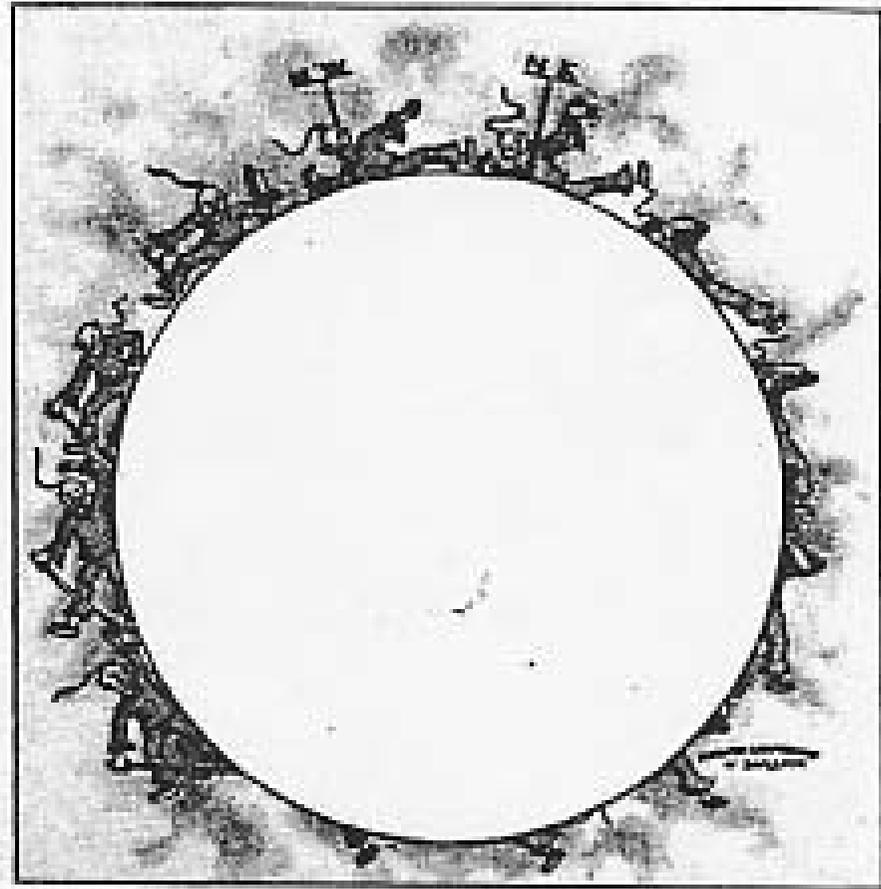
Out of many hundreds of thousands of attempted answers, the most idiotic of which recently appeared in the **LONDON STRAND MAGAZINE**, not one explained the mystery, for which reason Mr. Loyd has issued a new puzzle called **TEDDY AND THE LIONS**, which fully refutes all so-called explanations.

\$1,000 worth of prizes being offered for the best answers received during the year 1909.

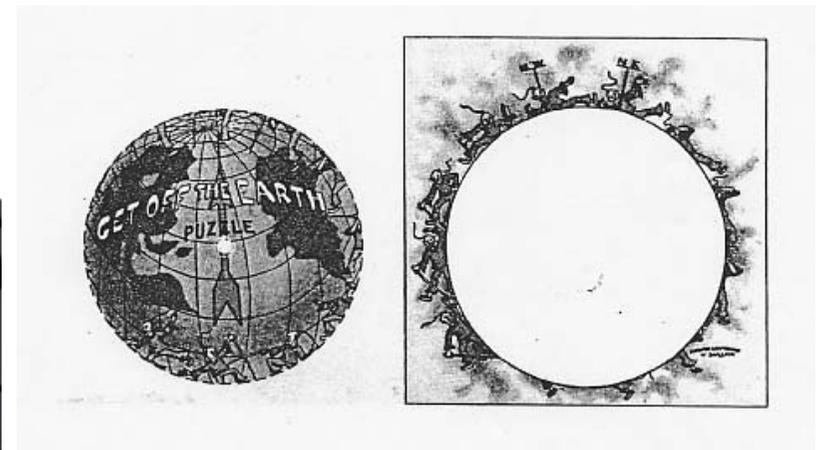


# Rompecabezas “Abandone la Tierra”, Sam Loyd

<http://www.mathpuzzle.com/loyd/>

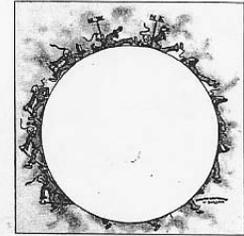


<http://www.samuelloyd.com/gote/index.html>



13 guerreros al norte...

<http://www.samuelloyd.com/gote/index.html>



Click here to play the puzzle

GET OFF THE EARTH  
PUZZLE  
MYSTERY

PATENTED & COPYRIGHTED  
1896  
BY SAM. LOYD.

WHEN THE BUTTON IS **DOWN**, THERE ARE THIRTEEN WARRIORS. STUDY THEIR FACES, POSTURES, SWORDS AND PIG-TAILS. THEN MOVE THE BUTTON **UP**, AND TELL WHICH ONE HAS VANISHED. **WHERE DOES HE GO TO?**

Click here to play the puzzle

GET OFF THE EARTH  
PUZZLE  
MYSTERY

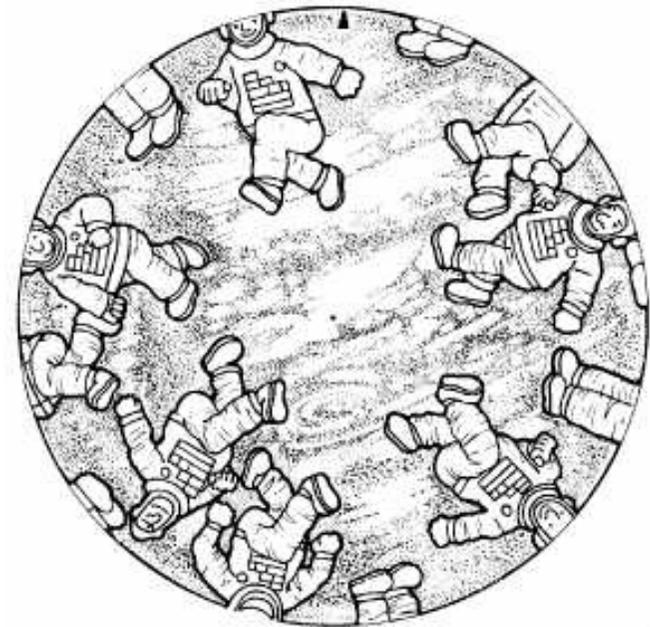
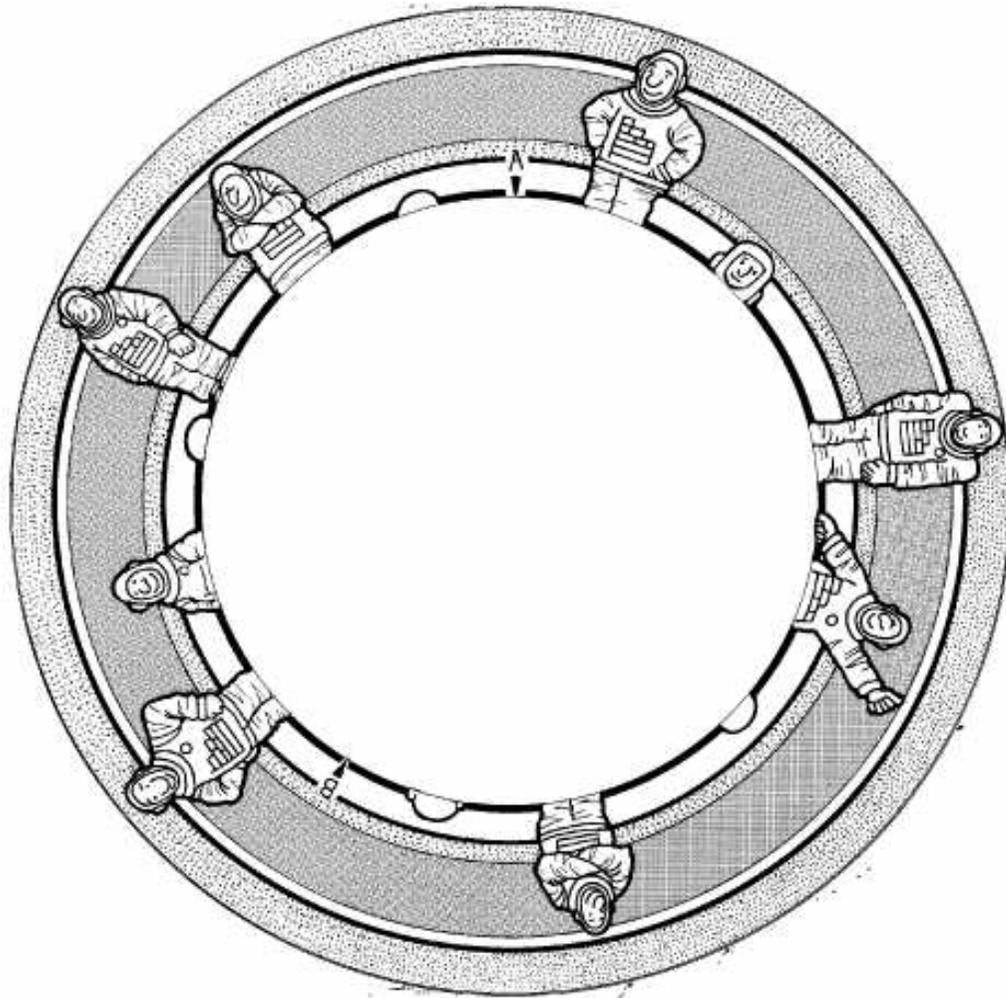
PATENTED & COPYRIGHTED  
1896  
BY SAM. LOYD.

WHEN THE BUTTON IS **DOWN**, THERE ARE THIRTEEN WARRIORS. STUDY THEIR FACES, POSTURES, SWORDS AND PIG-TAILS. THEN MOVE THE BUTTON **UP**, AND TELL WHICH ONE HAS VANISHED. **WHERE DOES HE GO TO?**

13 guerreros al norte... y 12 guerreros al noroeste

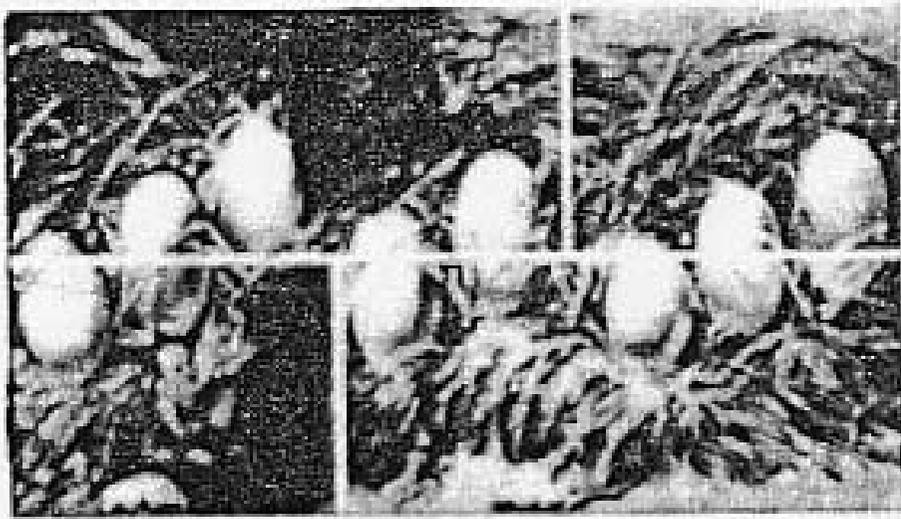
<http://www.aimsedu.org/Puzzle/LostInSpace/space.html>

# LOST IN SPACE

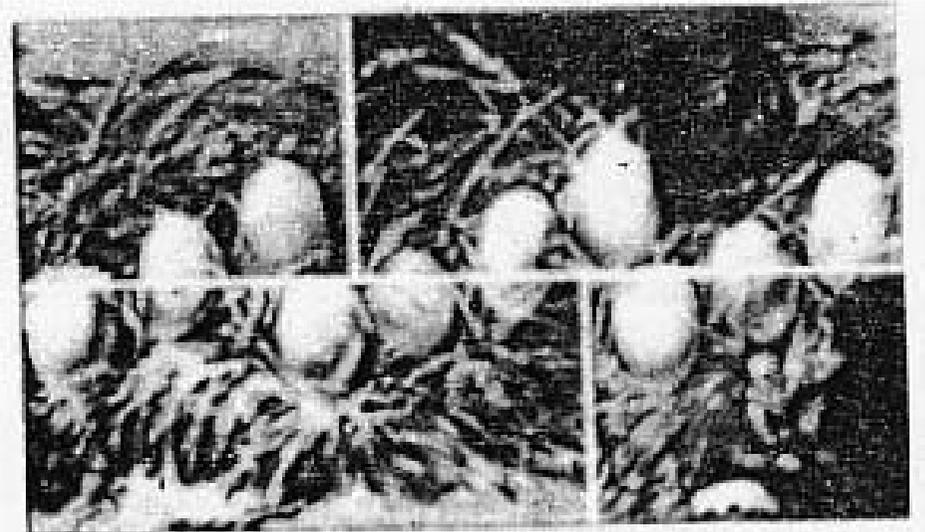


En posición A, **15** astronautas rodean el planeta ... cuando se rota el disco de modo que la flecha apunte a B, quedan sólo **14** astronautas ...

La paradoja del ***huevo desapareciendo***: los cuatro trozos que pueden redistribuirse para obtener **seis, siete, ocho, diez, once** o **doce** huevos.

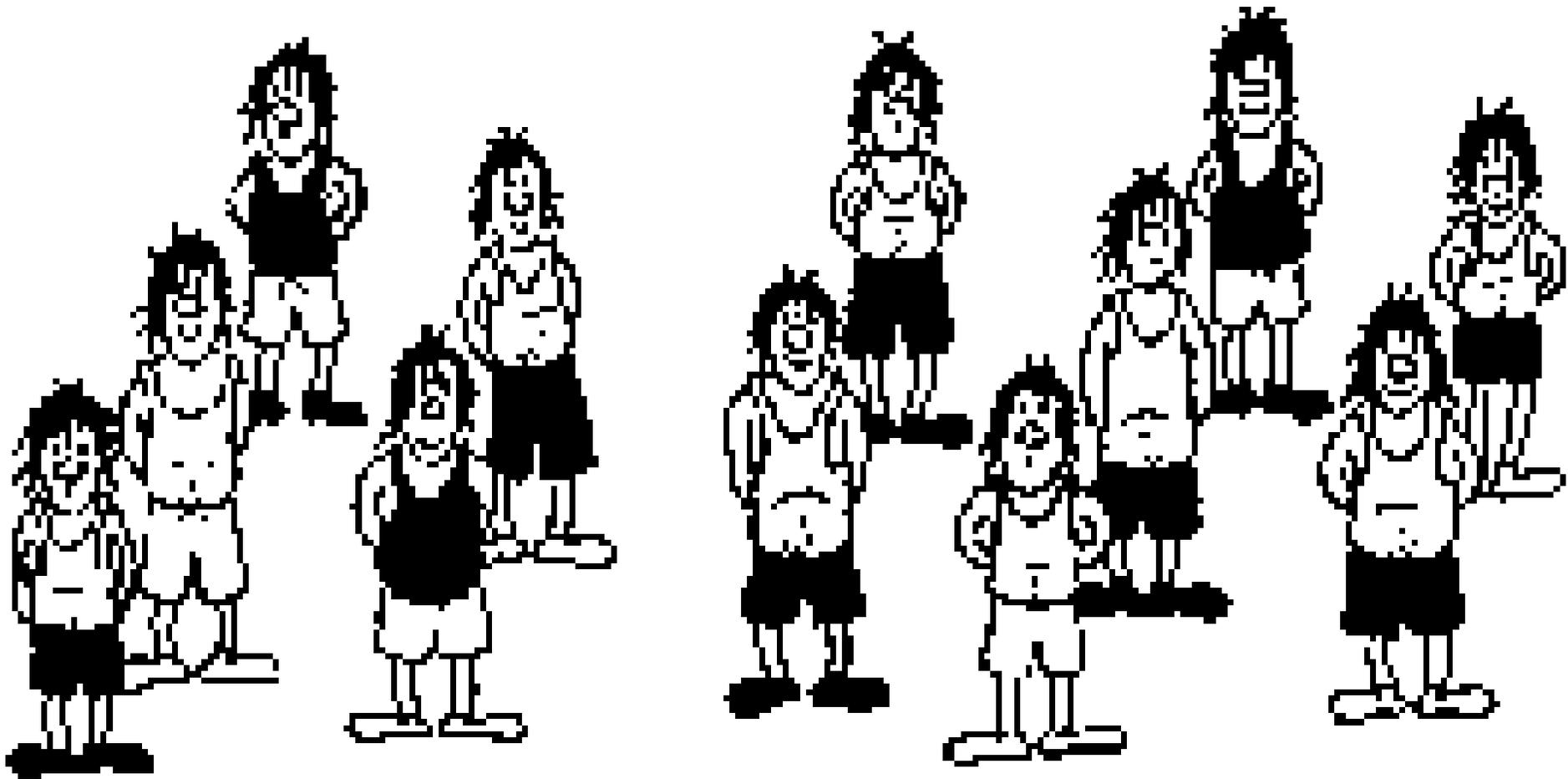


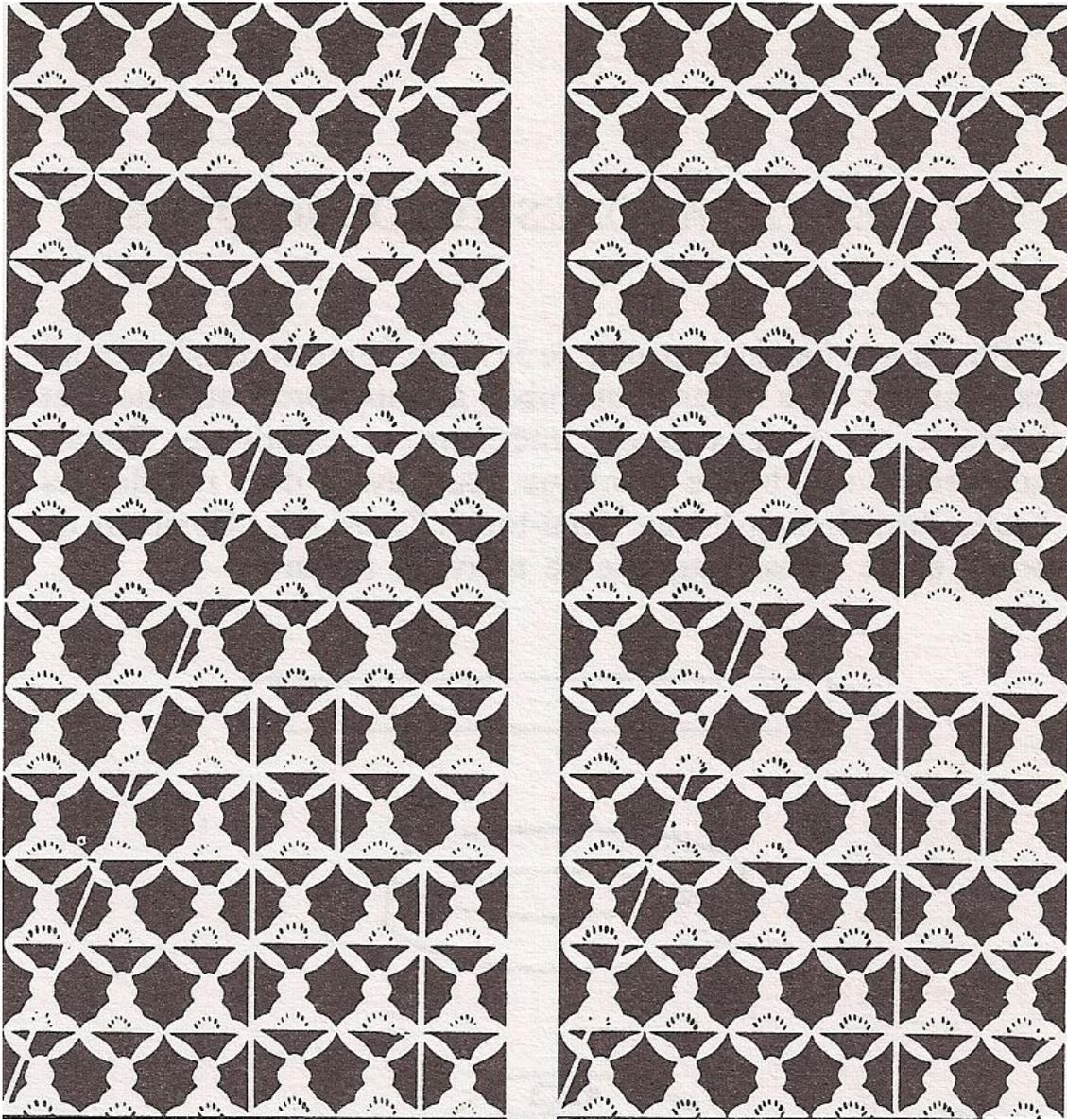
**8** huevos



**10** huevos

¿Son **12** deportistas...? ¿O serán **13**?





## Paradoja de Curry

El primer rectángulo  
tiene  $6 \times 13 = 78$   
conejos.

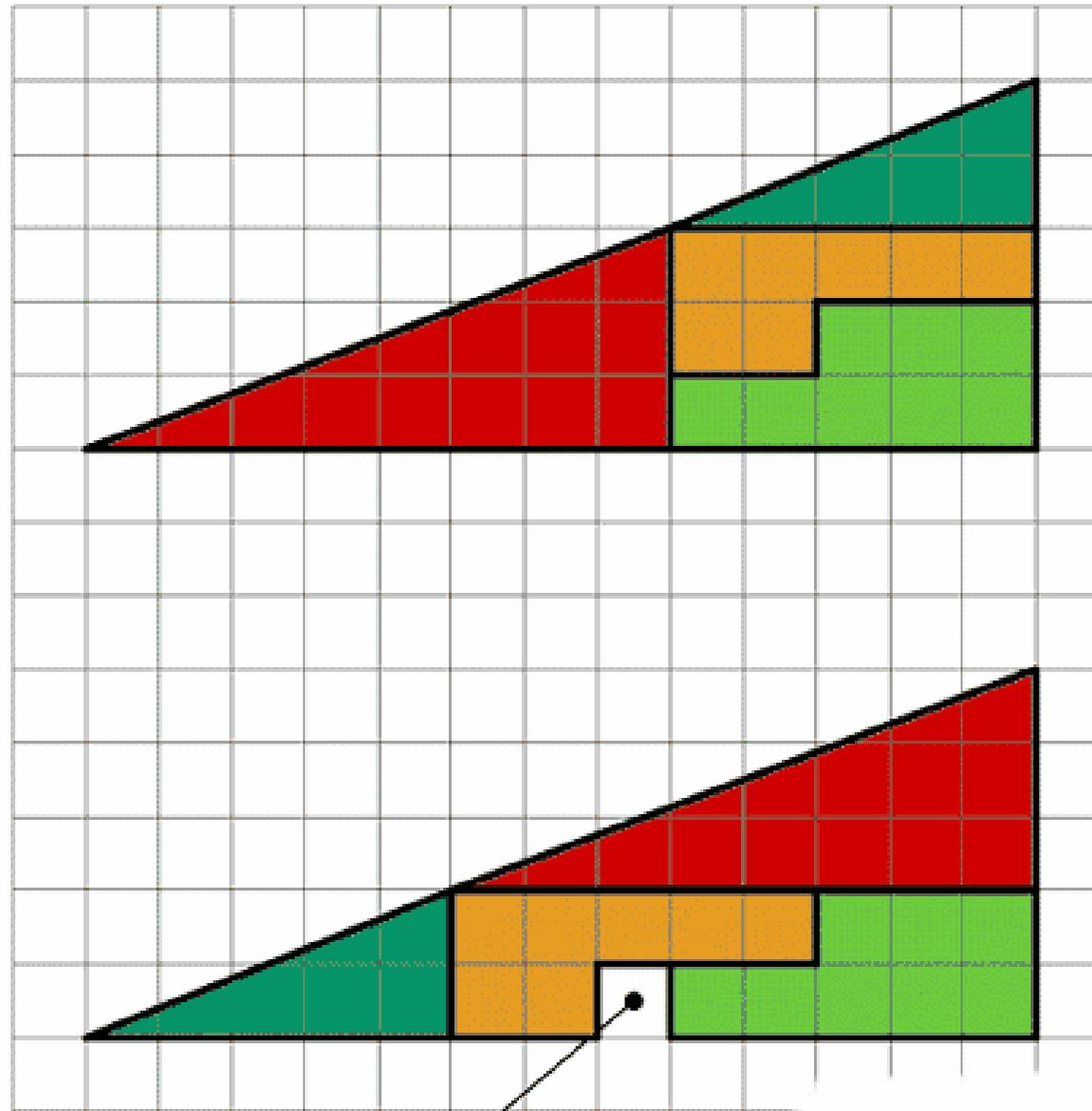
Tras cortar y  
recolocar  
quedan ¡77 conejos!

¿Dónde ha quedado  
el conejo que falta?



# Una paradoja de Hooper

La aparente  
pérdida de  
superficie es  
debida al  
reajuste de  
los trozos.

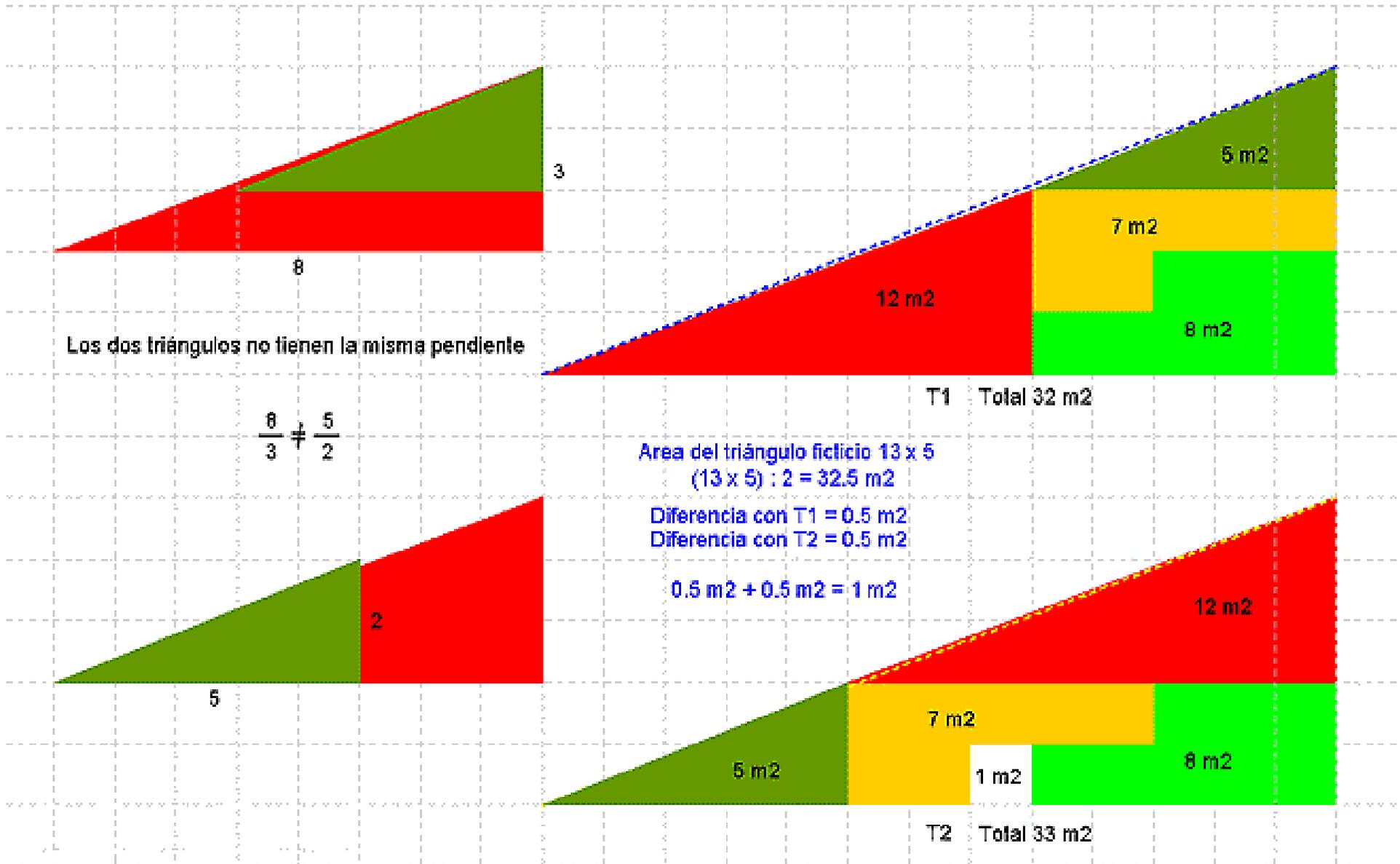


*Movemos  
las cuatro piezas*

*Las piezas son  
exactamente  
iguales que las  
empleadas arriba*

*¿De dónde sale este "agujero"?*

EL TRUCO ESTA EN EL BORDE NEGRO QUE OCULTA QUE LOS DOS TRIANGULOS NO SON PROPORCIONALES  
 LOS DOS TRIANGULOS NO TIENEN LA MISMA PENDIENTE



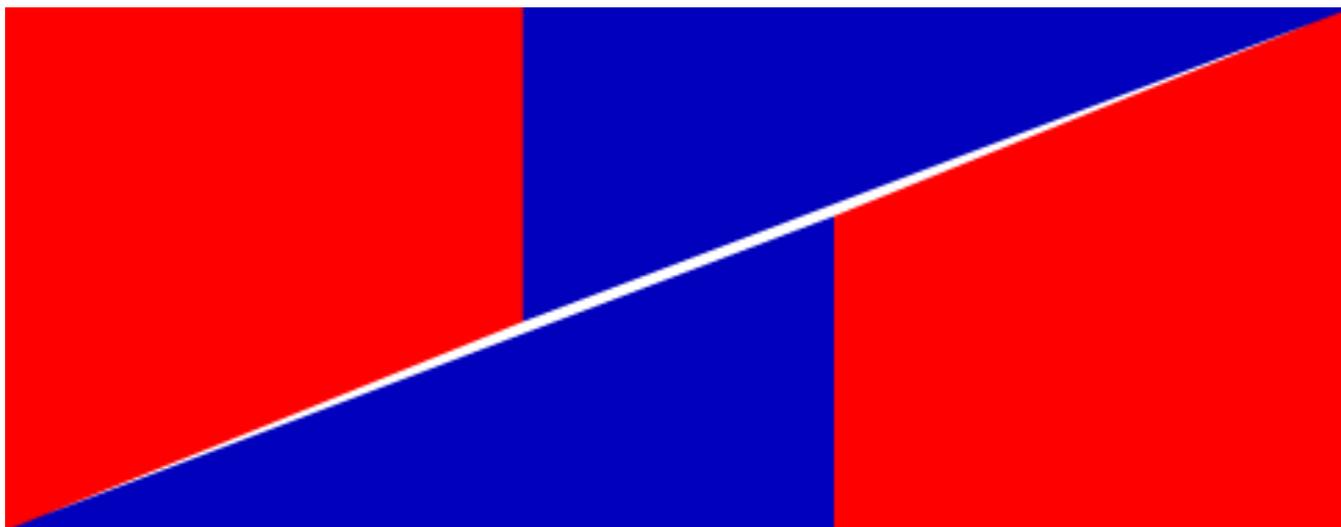
# Demostración: $64=65$

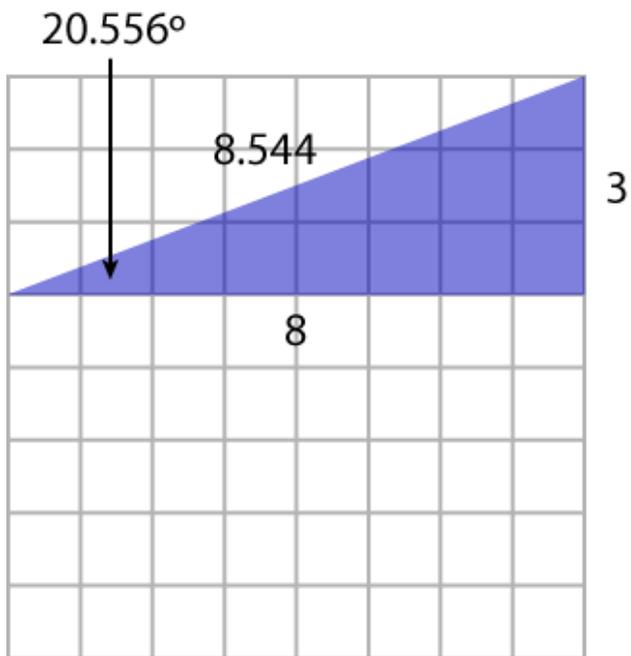
$$64 = 65 ?$$



Los segmentos azules generan dos triángulos y los rojos dos trapezoides, se reajustan...

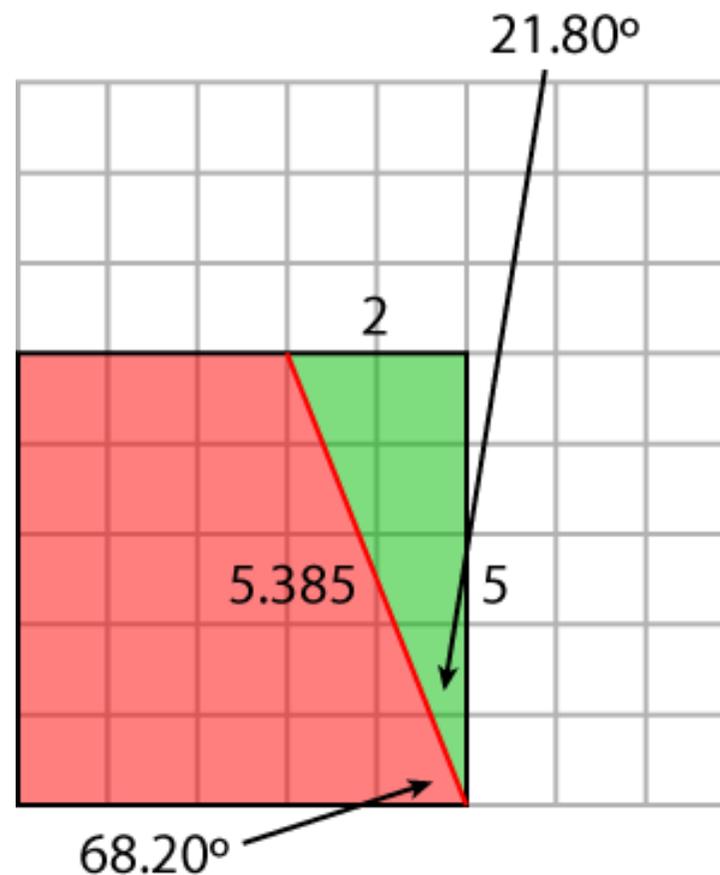
¿Ves la parte blanca? Es un paralelogramo con área 1.

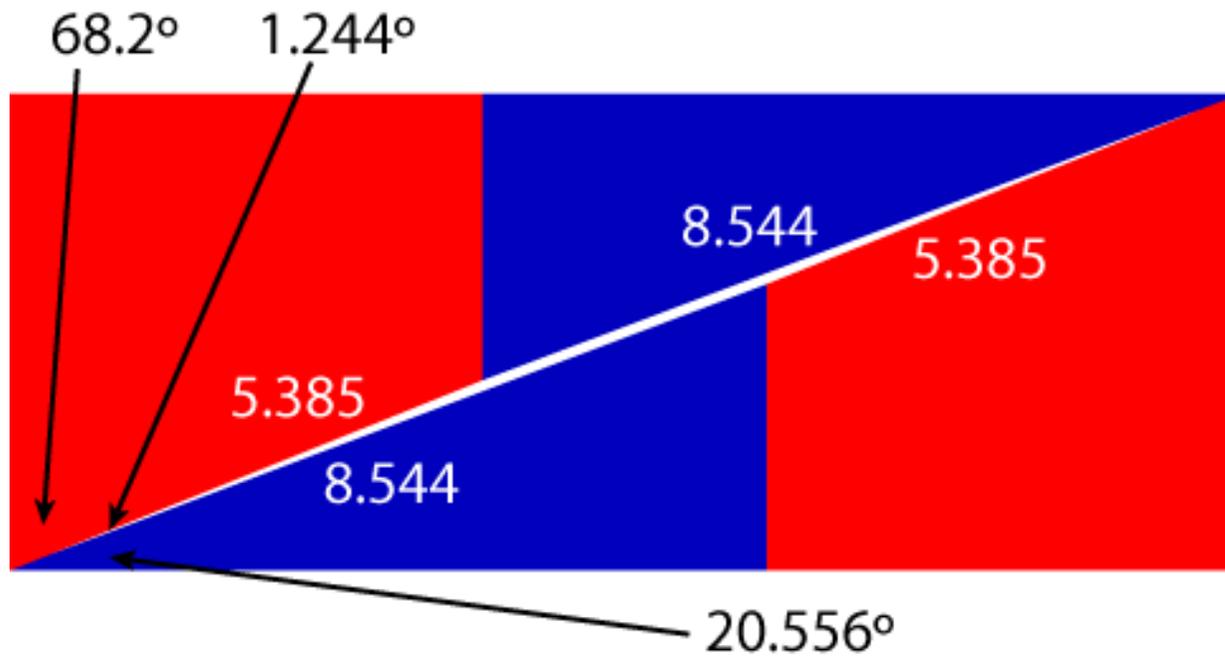




$3^2 + 8^2 = h^2$ , así la hipotenusa es la raíz cuadrada de 73 y el ángulo menor  $20.556^\circ$

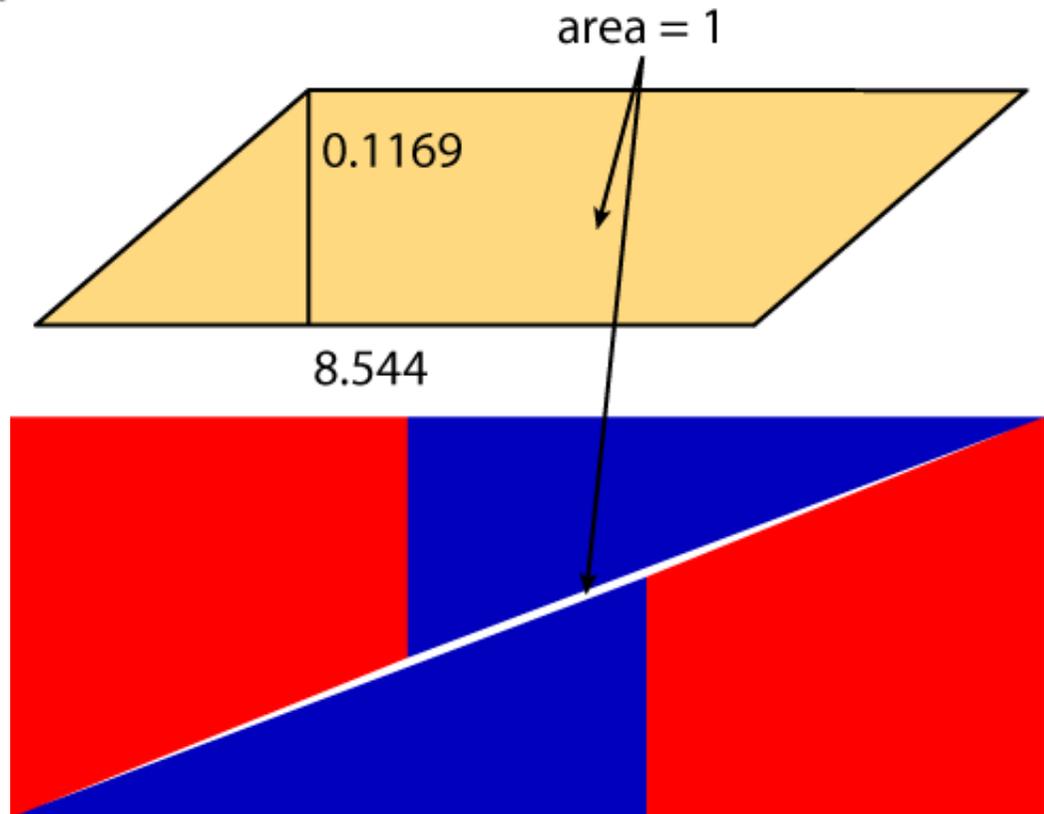
$2^2 + 5^2 = h^2$ , así la hipotenusa es la raíz cuadrada de 29 y el ángulo menor es de  $21.80^\circ$ .  
 El triángulo verde es el que se inserta en el cuadrado  $5 \times 5$  para pegarse al trapecoide rojo, cuyo ángulo menor debería ser entonces de  $90^\circ - 21.80^\circ = 68.20^\circ$ .

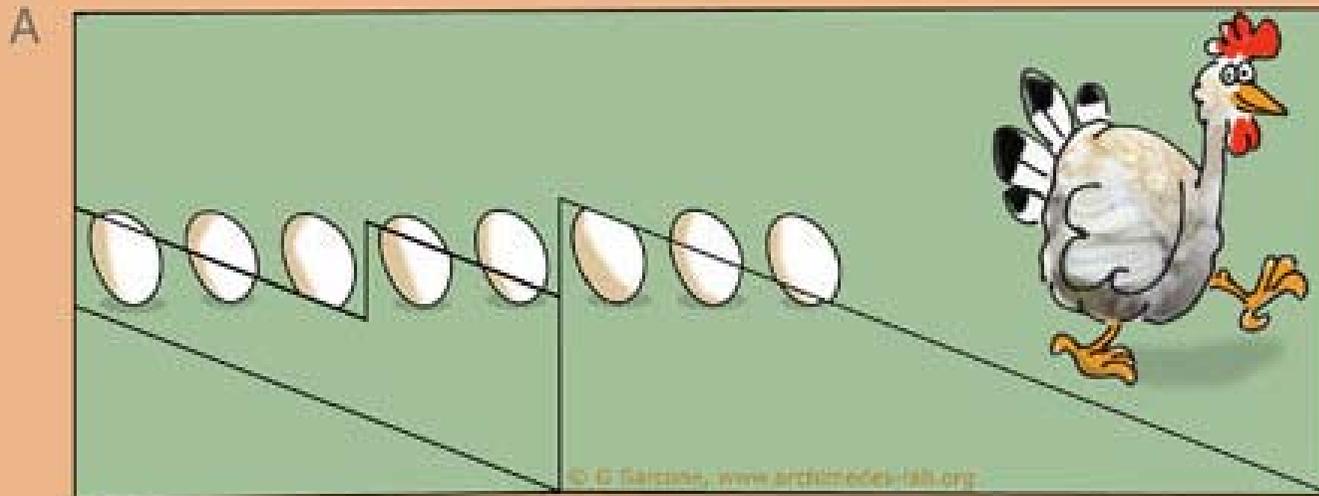




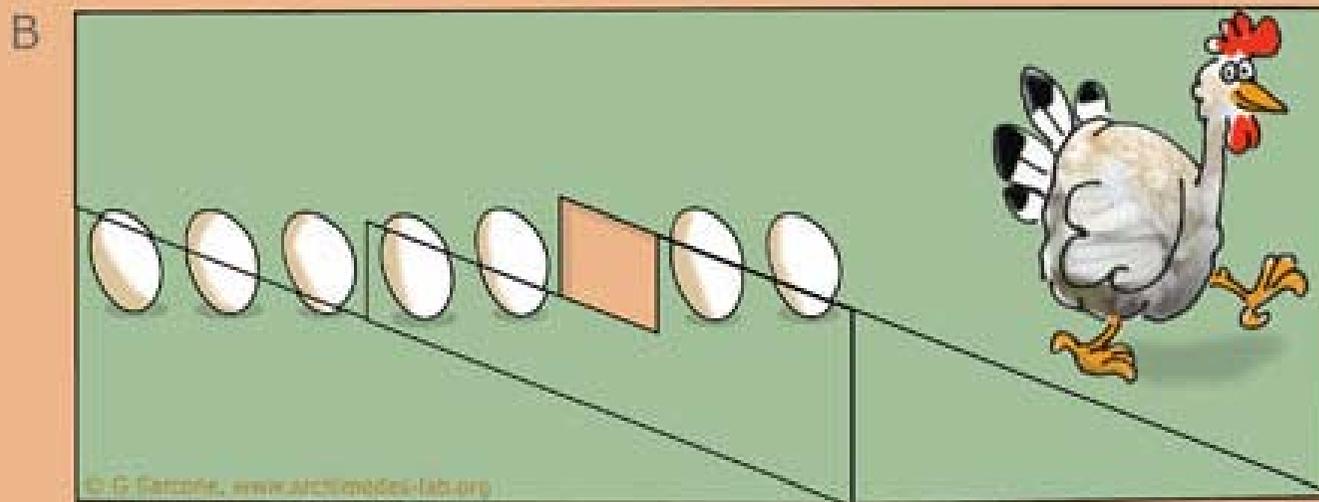
El ángulo agudo del paralelogramo blanco es  
 $90^\circ - 68.2^\circ - 20.556^\circ = 1.244^\circ$ .

Así, el área del paralelogramo blanco es:  
 $8.544 \times \text{sen}(1.244) \times 5.385 = 0.9988\dots$





*By permuting the triangular pieces an egg disappears. How does it happen?*



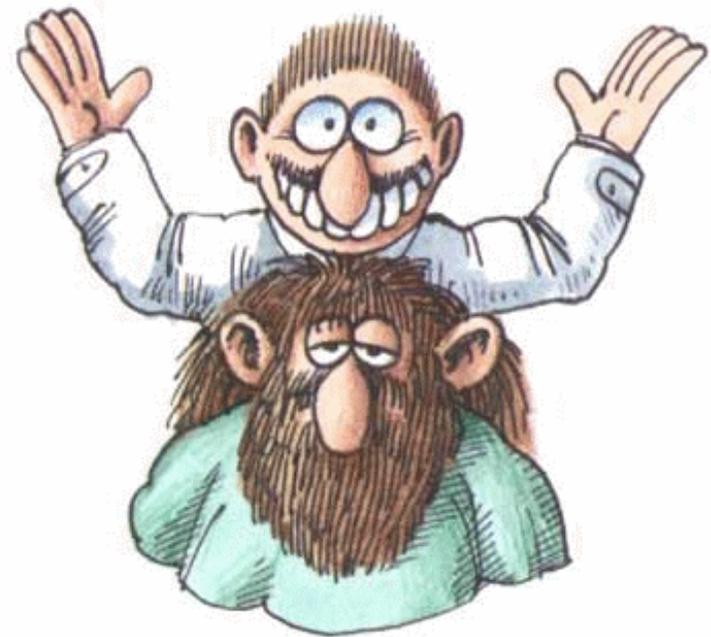
© G. Sarcone, www.archimedes-lab.org

[http://www.archimedes-lab.org/Gallery/new\\_optical\\_illusions/index.html](http://www.archimedes-lab.org/Gallery/new_optical_illusions/index.html)

# Paradoja del barbero

En Barbilandia, hay un único barbero, **Jon**, que afeita a los que no se afeitan a sí mismos.

*¿Quién afeita al barbero de Barbilandia?*



Si **Jon** no se afeita a sí mismo, será una de las personas de Barbilandia que no se afeitan a sí mismas... con lo cual **Jon** debería de afeitarse, siendo por lo tanto una de las personas que se afeitan a sí mismas... no debiendo por tanto afeitarse.

**Solución:** Russel define su famosa *teoría de tipos*, donde se eliminan los conjuntos auto-contradictorios, así que **Jon**, el barbero de Barbilandia...

**¡... no existe!**

# Formas geométricas...

¿En que aspecto de la vida aparecen representadas más formas geométricas? ¿En arquitectura? ¿Arte?



# Formas geométricas...

¿En que aspecto de la vida aparecen representadas más formas geométricas? ¿En arquitectura? ¿Arte?

Parece que no... existen unos **350** tipos diferentes de **pasta**... y aparecen cada día más...

Las siguientes son sólo unas muestras (ordenadas alfabéticamente) disponibles en los supermercados italianos...



Alfabeto

Abissini  
Acini di pepe  
Agnoli  
Anellini  
Anelloni  
Anolini



Agnolotti



Anelli lisci



Anelli rigati



Armелlette



Avemarie



Ballerine



Barbina



Boccolotti (pasta lunga)



Bucatini (pasta lunga)

Bavette  
Bombonini  
Brichetti



Cappelletti



Cavatappi



Capelli  
d'angelo



Chifferi



Conchiglie





Eliche con spinaci



Eliche tricolori



Elicoidali tricolore



Fagottini



Farfalle



Farfalline



Fusilli



Fidelini



Filini



Fettuccine (pasta lunga)



Fagioloni



Farfalle rotonde



Festonati



Fettucce

Farfalloni  
Fischietti  
Fili d'angelo  
Fiori di sambuco  
Gentili rigati



Gnocchetti sardi



Gnocchi di patate



Gomiti



Garganelli



Gnocchi





Maccaroni (pasta lunga)



Mafalde

Mista

Malfatti  
Maltagliati  
Mostaccioli



Nidi fettucce



Nidi Pappardelle



Nidi Capellini



Occhi di pernice



Ondine



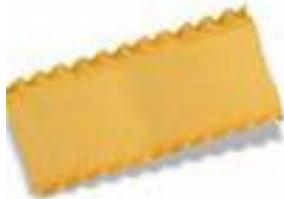
Orecchiette



Orzo



Orecchiette  
tricolori



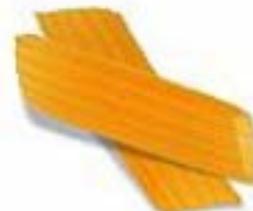
Lasagne



Linguine



Maccaroni



Manicotti

Nocciole  
grosse  
Occhialini  
Occhioni



Panzerotto



Penne lisce



Pennette



Pennette rigate



Pennine lisce



Paglia e fieno



Pennoni rigati



Pepe bucato



Penne zita



Pappardelle



Penne agli spinaci



Perciati

Papardelle  
Passatelli  
Pater noster  
Peperini  
Perciatelli  
Picagge verdi  
Pipe rigate  
Pisellini  
Pitaloni  
Puntette



Quadrucchi



Piombi



Perline



Penne a candela



Ravioli



Ravioloni



Rigatoni



Rocchetti



Regina (pasta lunga)

Raganelle  
Risetto  
Rosmarino  
Rotelloni



Racchette



Ruote



Radiatori



Risone



Rotini



Sigarette



Spaghetti alla chitarra



Stelline col buco



Strigoli



Strozzapreti



semi di melone



Spaghetti (pasta lunga)



Spaghettoni (pasta lunga)



Stellette



Spirali

Sedanini  
 Scucuzun  
 Semi di cicoria  
 Semi di grano  
 Semi di peperoni  
 Sorpresine  
 Stelle

Stivaletti  
 Tagliardi  
 Tajarin  
 Tempesta  
 Trebuchi  
 Trenette  
 Viandina  
 Vincisgrassi



Tagliatelle



Tagliolini



Tortellino



Tortiglione



Tagliatelle spianate



Tortiglioni



Trottole



Truciolini



Taglierini al nero di seppia



Trofie



Tubetti



Tagliolini a nido



Tufoli



Tubettini



Tagliatelle zigrinate



Tofe tricolori



Tripoline



Tempestina



Vermicelli (pasta lunga)



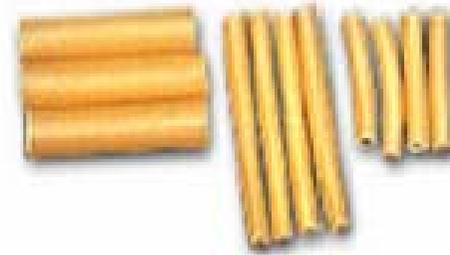
Ziti (pasta lunga)



Zitoni (pasta lunga)



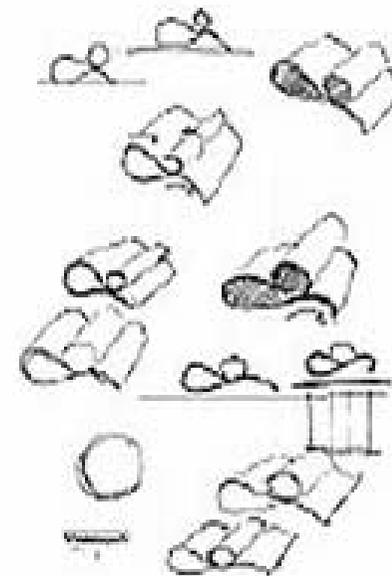
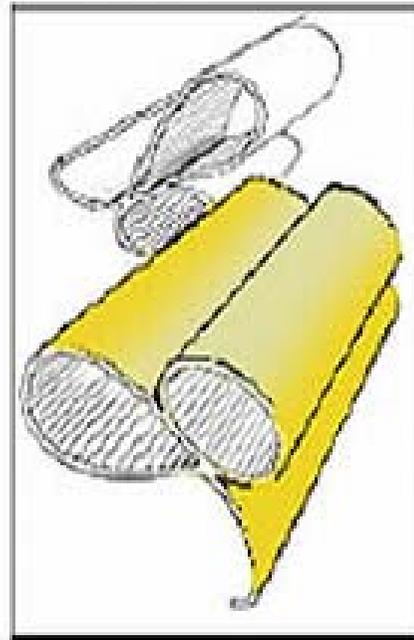
Zitellini



Ziti tagliati

...and to end,  
New pasta:  
Marille,  
designed by  
Giorgio Giugiaro

To get more information  
about pasta visit also:



# La paradoja del condenado

En la Edad Media, un rey de reconocida sinceridad, pronuncia su sentencia:

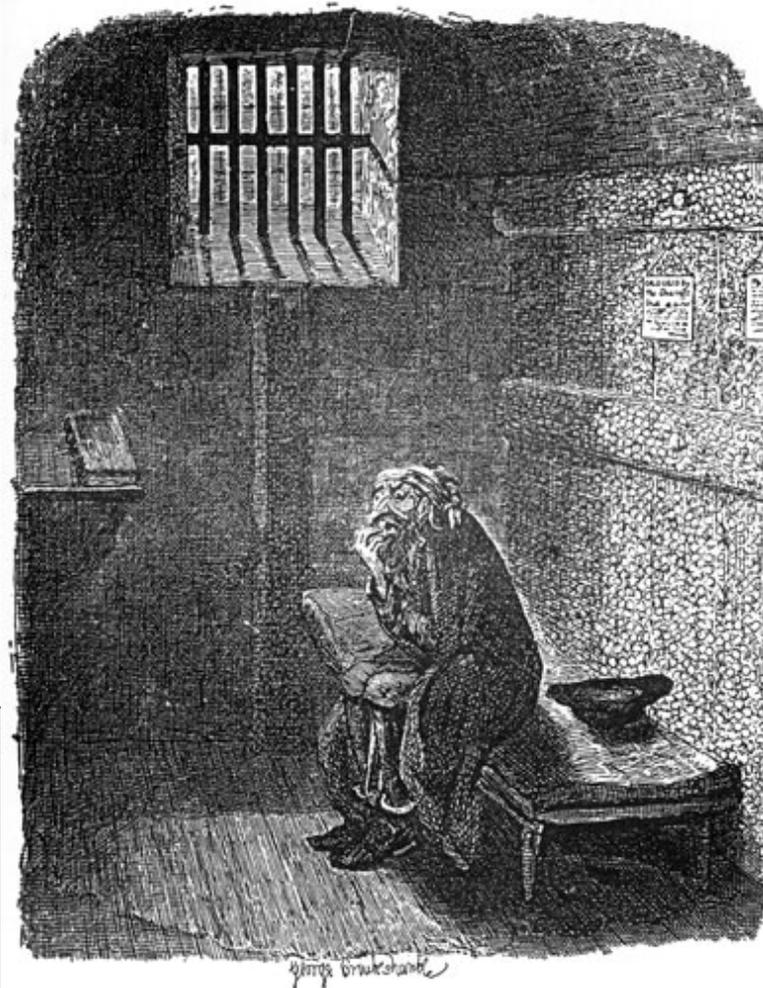


*Una mañana de este mes serás ejecutado, pero no lo sabrás hasta esa misma mañana, de modo que cada noche te acostarás con la duda, que presiento terrible, de si esa será tu última sobre la Tierra...*

En la soledad de su celda, el reo argumenta:

*Si el mes tiene 30 días, es evidente que no podré ser ajusticiado el día 30, ya que el 29 por la noche sabría que a la mañana siguiente habría de morir. Así que el último día posible para cumplir la sentencia es el 29. Pero entonces, el 28 por la noche tendré la certeza de que por la mañana seré ejecutado...*

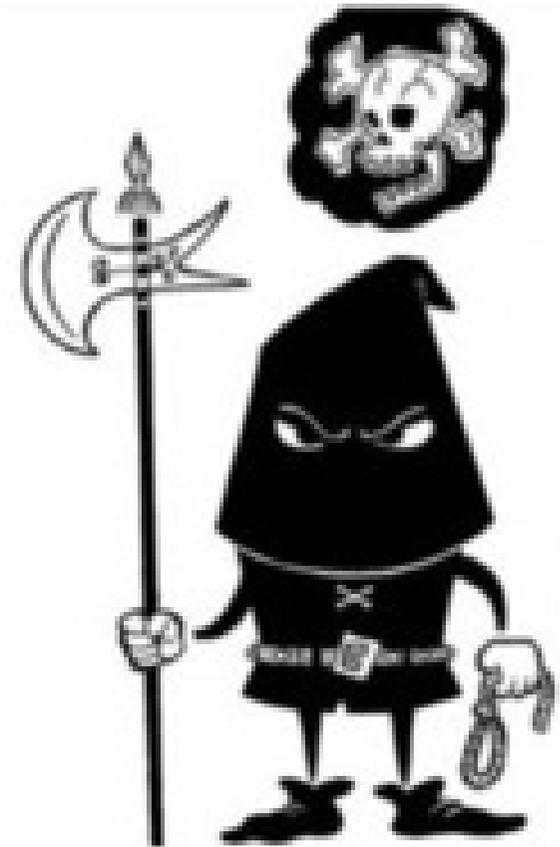
Continuando de este modo, el prisionero concluye triunfalmente que la condena es de **ejecución imposible**, y comienza a dormir aliviado, aguardando que transcurra el mes para pedir su libertad...



Sin embargo, sorpresa, un día cualquiera, por ejemplo el fatídico día **13 (era martes)**, el verdugo, con el hacha afilada en la mano, despierta al reo... que instantes más tarde es decapitado.

La sentencia se cumple literalmente.

*¿Dónde ha fallado el razonamiento del condenado?*



Una solución puede pasar por la noción fundamental de que no es lo mismo el día 30, más el día 29, más el día 28, etc., que **el mes**.

Un conjunto es diferente y contiene cualidades distintas de la mera adición de sus partes.

El análisis individual, día por día, por parte del prisionero es irreprochable... Pero el defecto de su argumento aparece cuando atribuye al conjunto **(este mes)** las mismas y exclusivas cualidades que poseían sus partes **(cada día)**, no advirtiendo que el conjunto **mes** ha incorporado algunas características: entre otras la de contener...

**... días sorpresa.**

Hacia el siglo III, el filósofo chino Hui Tzu afirmaba:

*Un caballo bayo y una vaca parda son tres: el caballo, la vaca, y el conjunto de caballo y vaca.*

El razonamiento no es trivial, y es la esencia de la paradoja del condenado.

1



+



= 3!

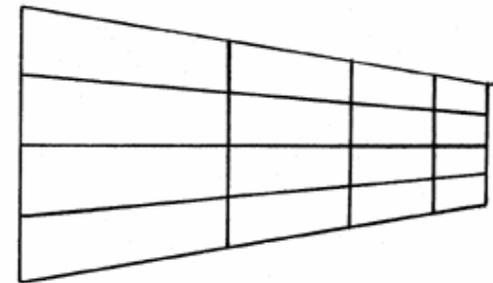
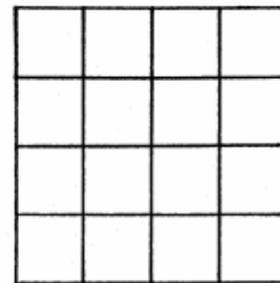
# Anamorfosis

Una **anamorfosis** es una deformación reversible de una imagen a través de procedimientos matemáticos u ópticos.

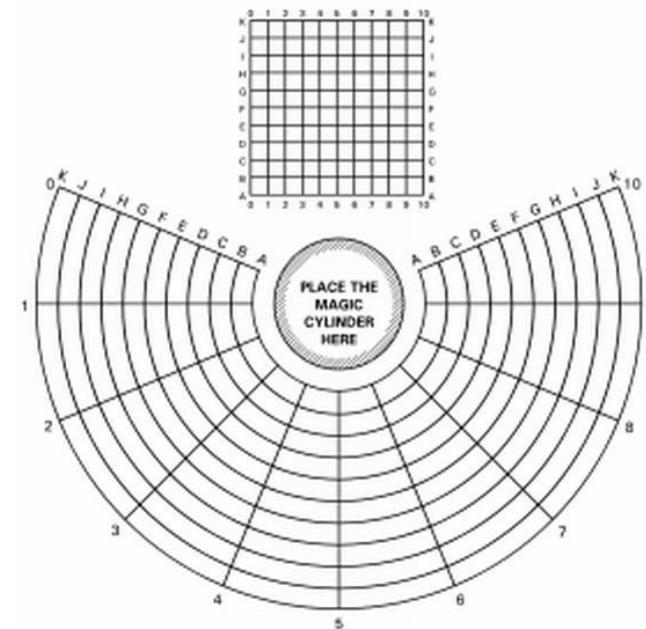
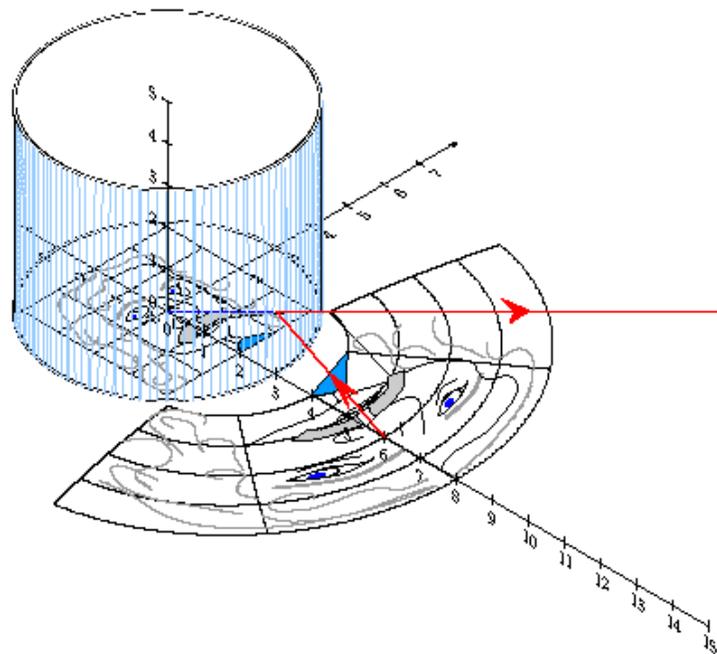


En este grabado de Dürero (velo de Alberti), el artista usa un retículo para guardar las proporciones de la modelo.

¿Y si no se coloca el enrejado de forma perpendicular?

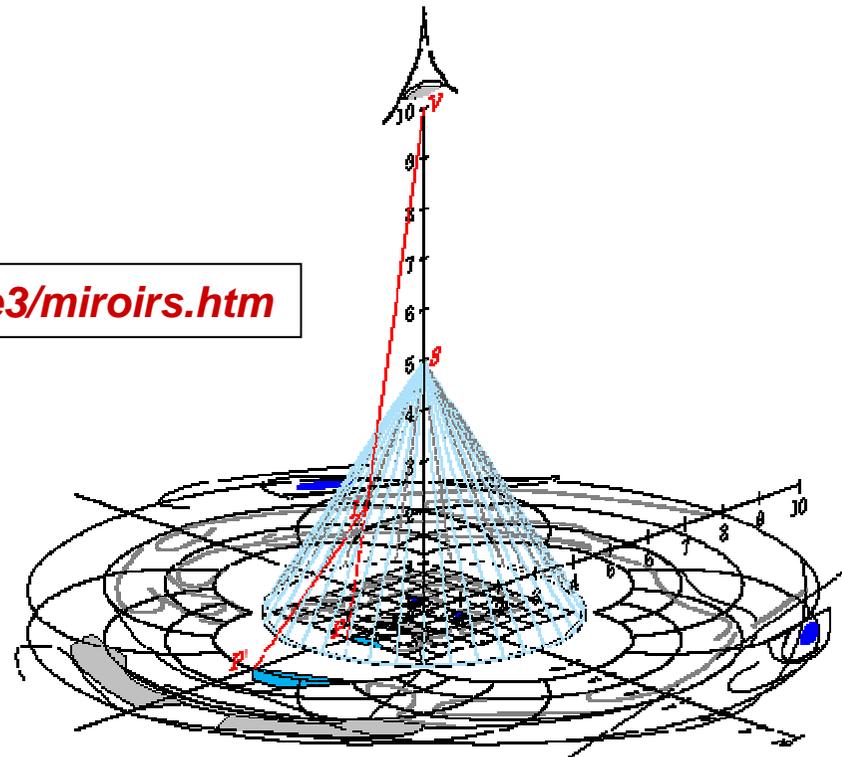


# Anamorfofosis cilíndrica



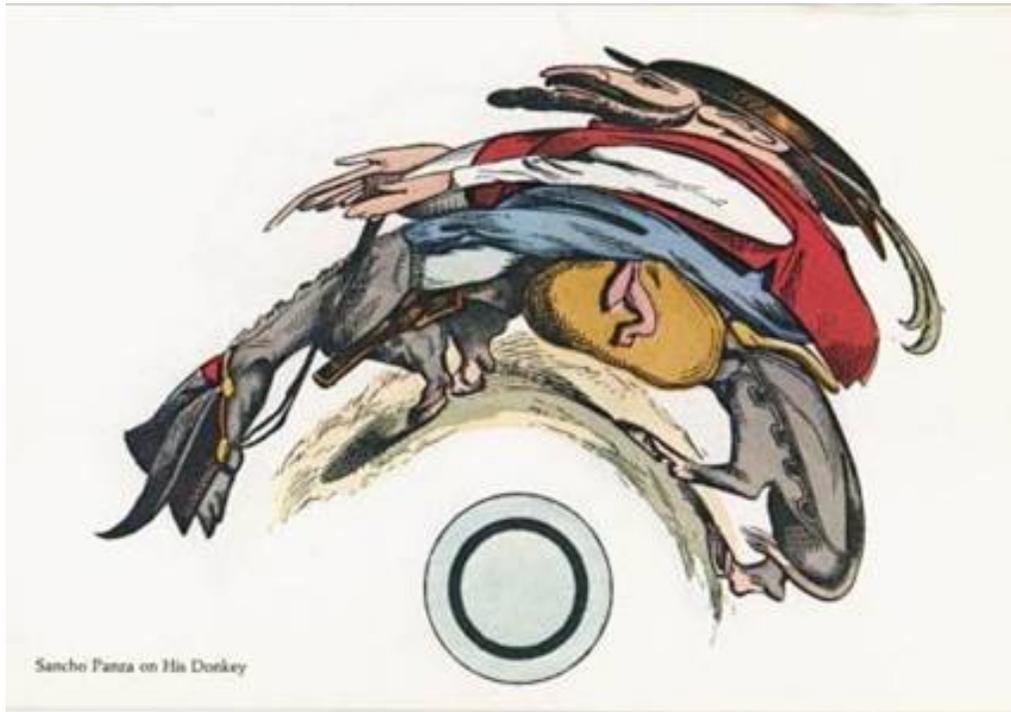
<http://members.aol.com/ManuelLuque3/miroirs.htm>

# Anamorfofosis cónica



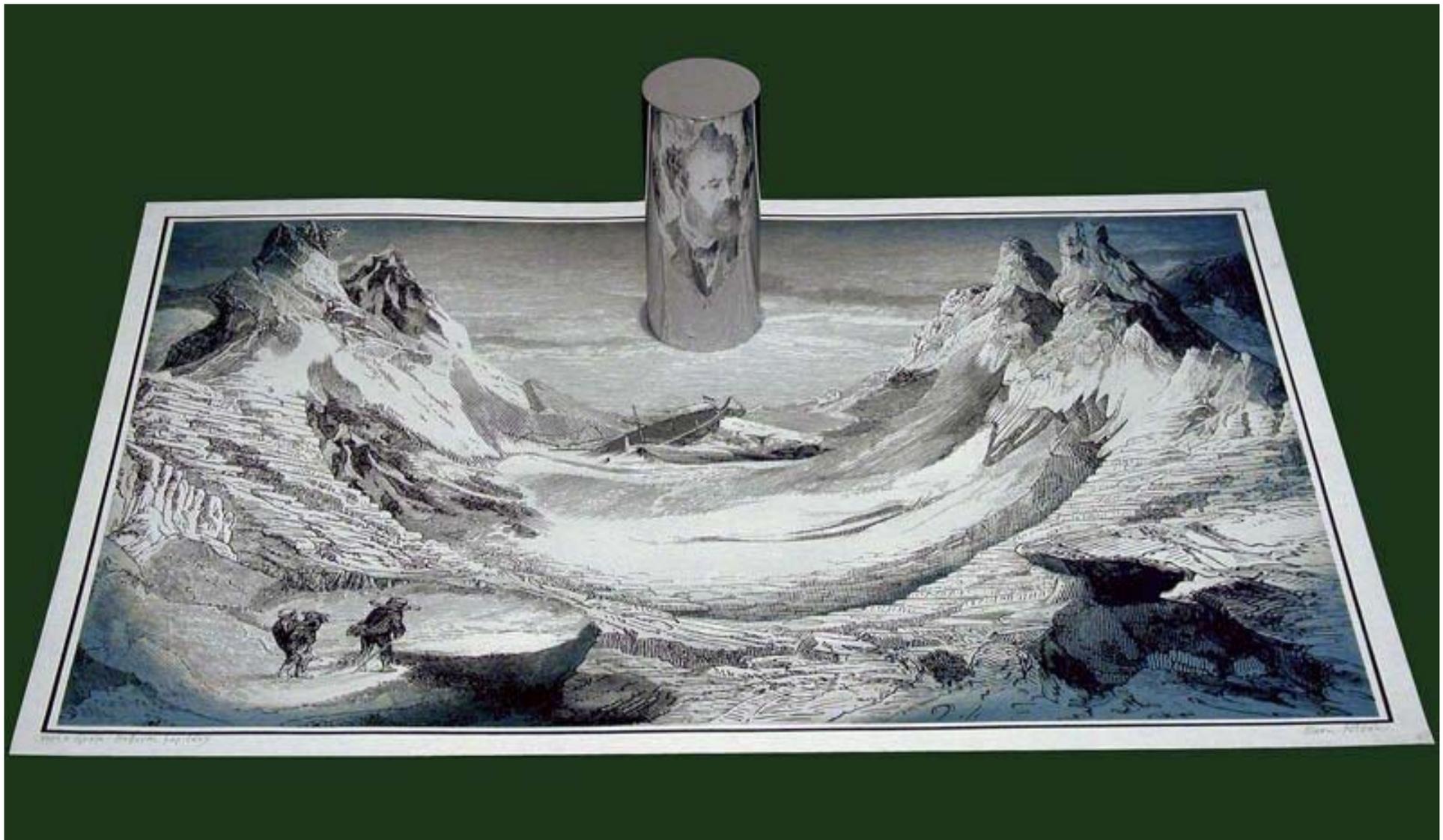
# Anamorfosis cilíndrica

***Napoleón***



***Sancho Panza  
y su burro***





**István Orosz (1951- )**

***La isla misteriosa y el retrato de Julio Verne***

<http://www.geocities.com/SoHo/Museum/8716/>

**Video**



**Anna**

**István Orosz**

**Pie**





***El murciélago***



# Anamorfosis



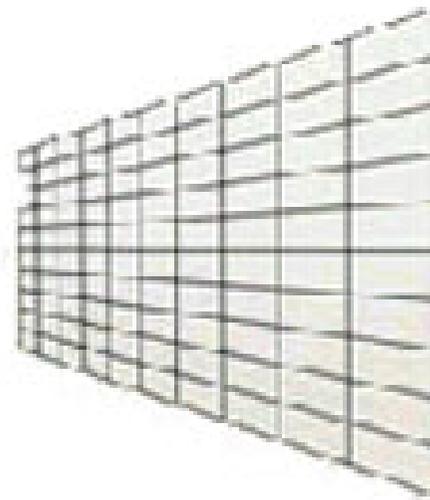
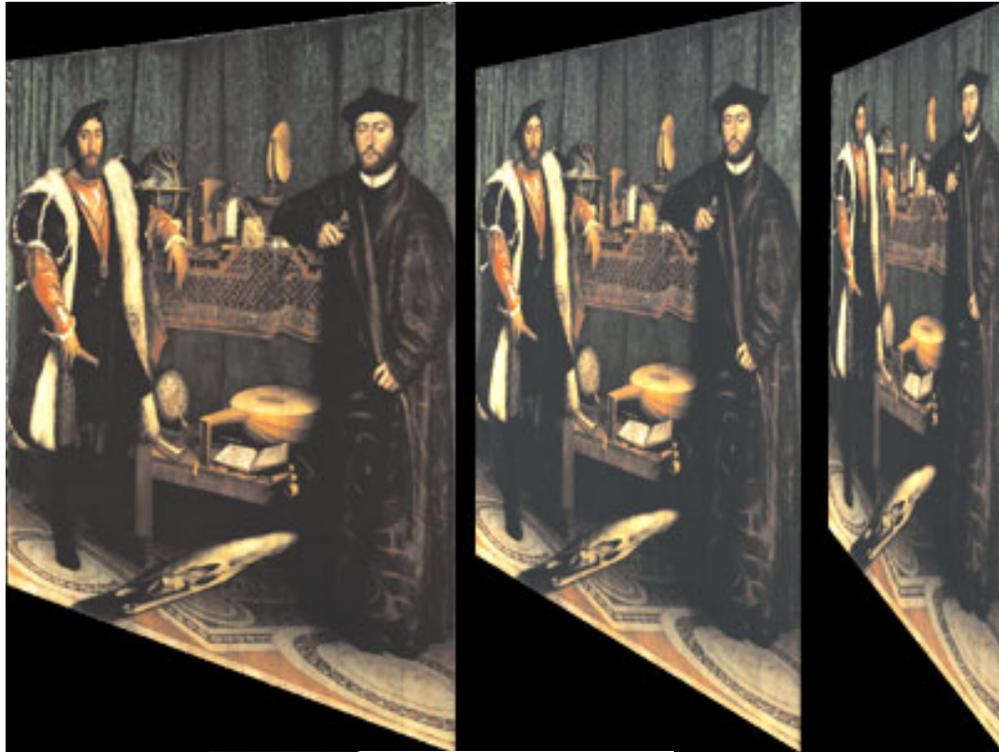
***Los Embajadores***  
**(1533)**

por

**Holbein el joven**  
**(1497-1543)**

<http://www.math.nus.edu.sg/~mathelmr/teaching/holbein.html>

**Y, al salir de la sala, al mirar el cuadro desde otro punto de vista, aparece...**



**Video**

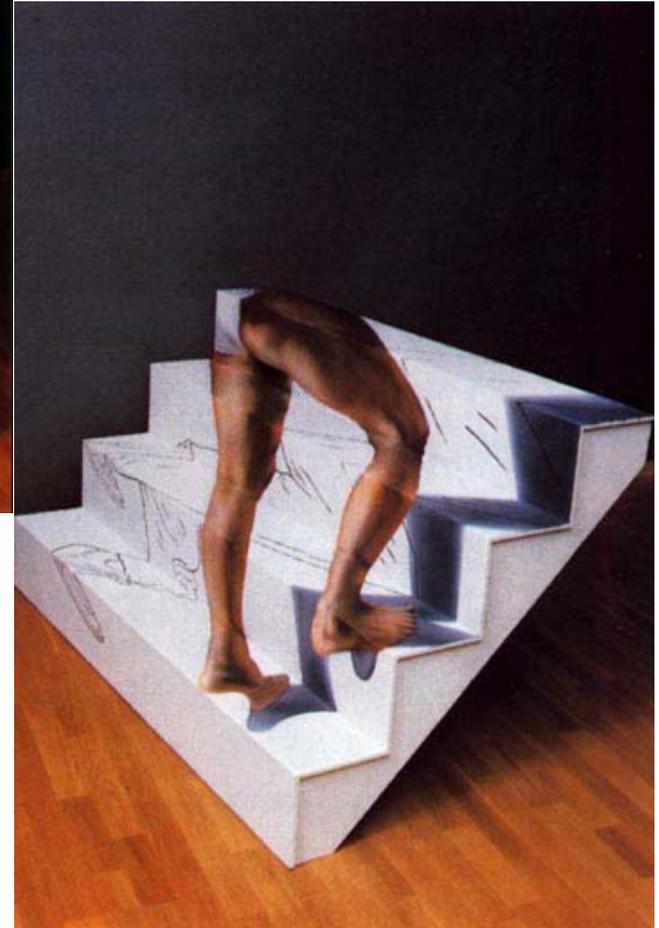




**Vista desde el suelo, la imagen se ve totalmente deformada.  
Desde el segundo piso se observa la imagen real.**

"Robotmur" es un robot capaz de reproducir anamorfosis sobre edificios, etc.

<http://jourdain.ifrance.com>



**István Orosz**

**Escalera de dimensión tres, vista desde diferentes ángulos. Los dos primeros revelan una figura que camina sobre las escaleras, un tanto distorsionada. Sólo la figura final resuelve la anamorfosis.**



Les Chevaliers de France  
solobotmar@alterm.org  
ALTERN.ORG/ROBOTMUE



Les Chevaliers de France  
solobotmar@alterm.org  
ALTERN.ORG/ROBOTMUE



Les Chevaliers de France  
solobotmar@alterm.org  
ALTERN.ORG/ROBOTMUE



Les Chevaliers de France  
solobotmar@alterm.org  
ALTERN.ORG/ROBOTMUE



Les Chevaliers de France  
solobotmar@alterm.org  
ALTERN.ORG/ROBOTMUE



Les Chevaliers de France  
solobotmar@alterm.org  
ALTERN.ORG/ROBOTMUE



Les Chevaliers de France  
solobotmar@alterm.org  
ALTERN.ORG/ROBOTMUE



Les Chevaliers de France  
solobotmar@alterm.org  
ALTERN.ORG/ROBOTMUE



Les Chevaliers de France  
solobotmar@alterm.org  
ALTERN.ORG/ROBOTMUE



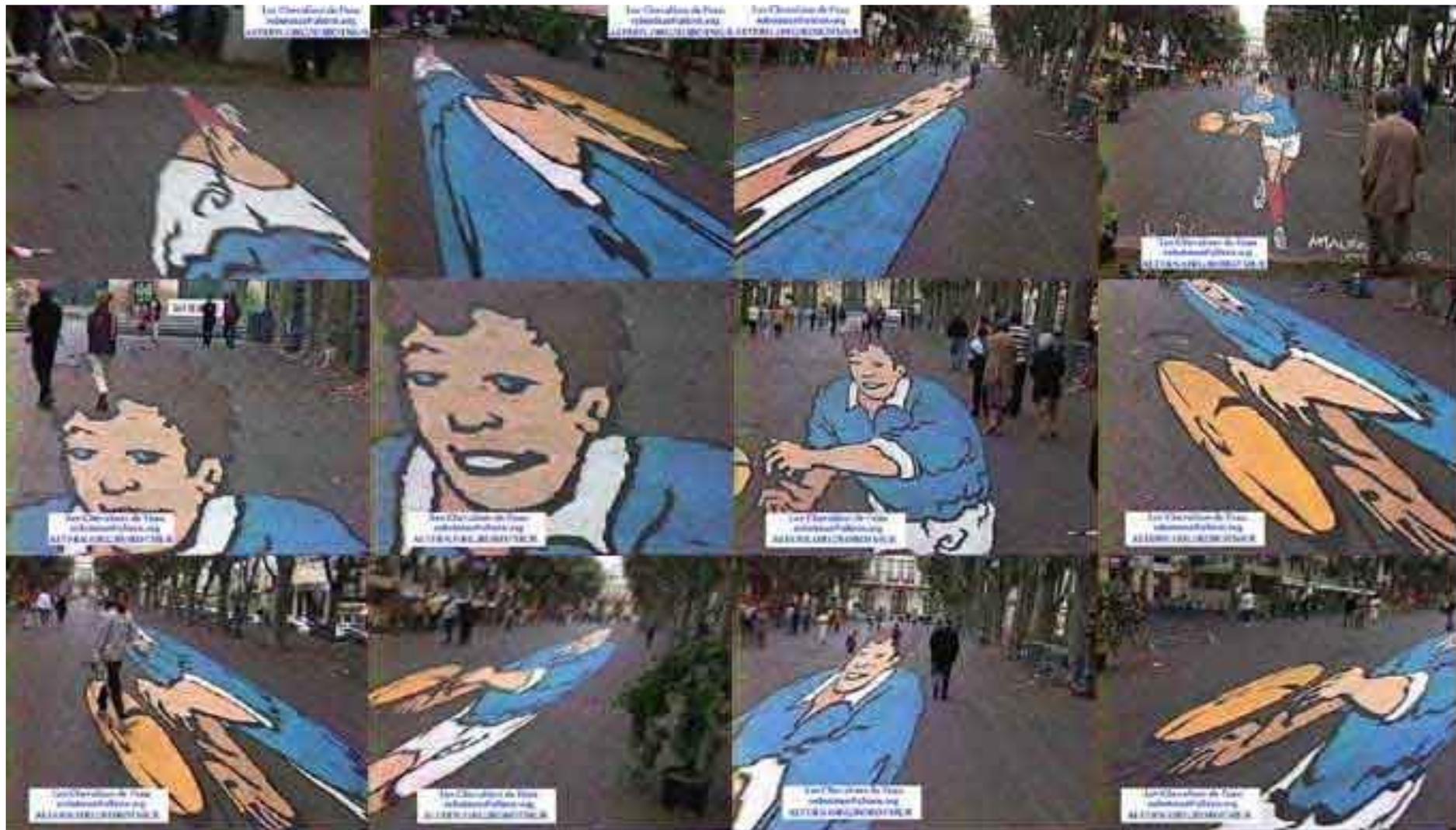
Les Chevaliers de France  
solobotmar@alterm.org  
ALTERN.ORG/ROBOTMUE



Les Chevaliers de France  
solobotmar@alterm.org  
ALTERN.ORG/ROBOTMUE



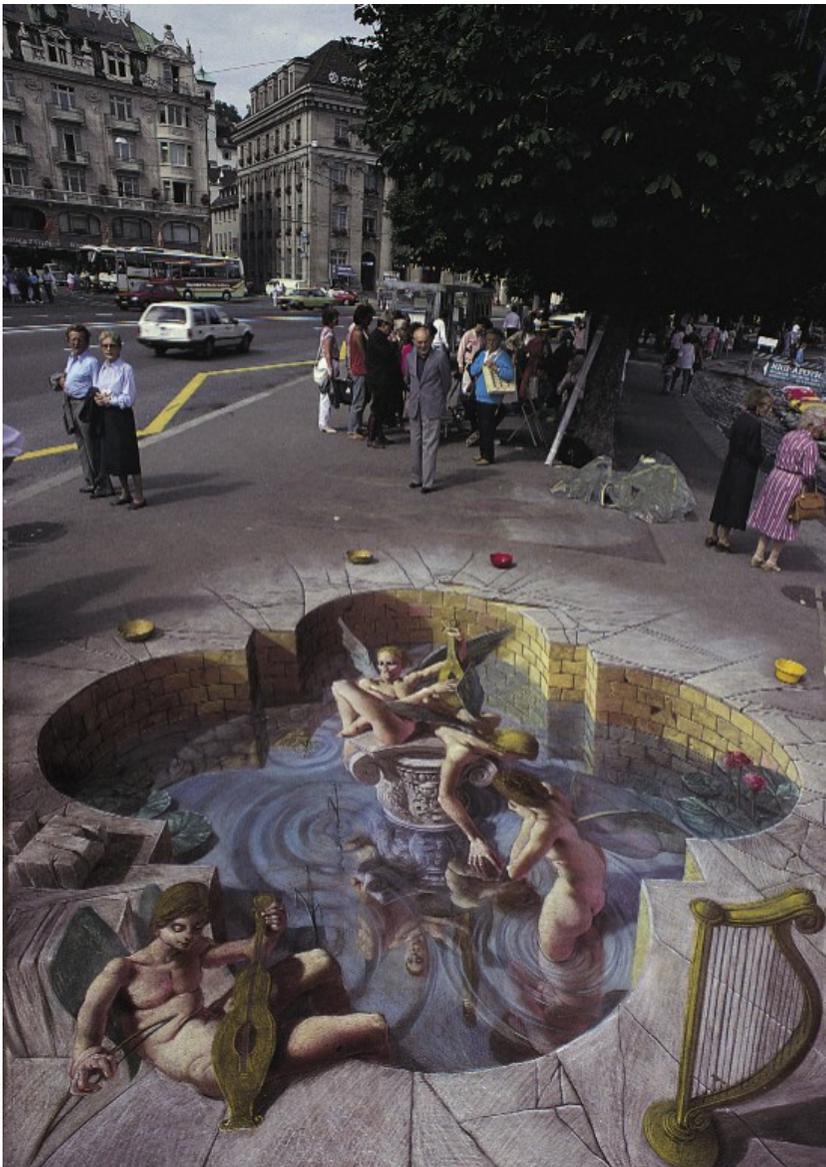
Les Chevaliers de France  
solobotmar@alterm.org  
ALTERN.ORG/ROBOTMUE



**Les Chevaliers de l'eau** (<http://jourdain.ifrance.com/sommaire.htm>)

Jugador de Rugby de 134,20 metros de largo. Beziere, 30 septiembre de 1999 (apertura de la copa del mundo de Rugby): es la mayor anamorfosis del mundo.

# Kurt Wenner



***Dies Irae***, Italia

<http://www.kurtwenner.com/>

***Musas***, Suiza



## ***Make Poverty History***

Dibujo encargado para la campaña de presión al G8

**Vista de frente**

**Edinburgh City Centre**

**Visto de lado: 13 metros**

**Julian Beever**

<http://users.skynet.be/J.Beever/pave.htm>



Eduardo Relero



Grandes chorizos



Con la ocasión del  
'Museumsnacht' (2004) en  
Hamburgo, el Museo de Artes  
y Oficios se presentó a sí  
mismo con el eslógan ***Todos  
los caminos conducen al Arte.***



**Anamorfosis en un ángulo de la pared y el suelo: 1,5 metros**



**Le  
Wallandais**  
*Habitant  
des murs*

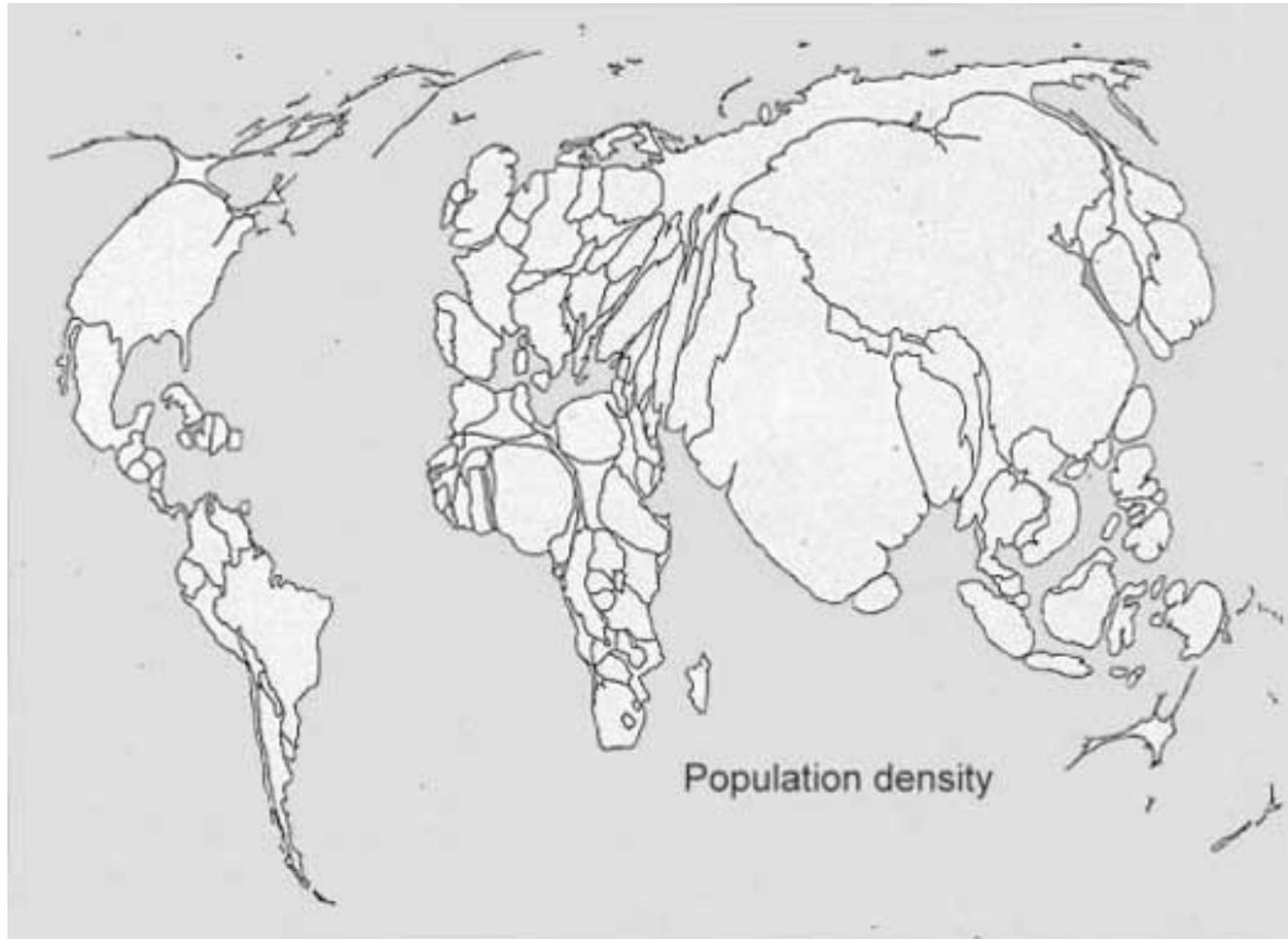


# Anamorfosis y señalización



**Las anamorfosis se usan a menudo en señales de tráfico, para que las señales sean correctamente interpretadas por los conductores.**

# Anamorfosis y cartografía estadística



Las anamorfosis se utilizan en cartografía estadística para mostrar la importancia de un fenómeno dado. El mapa ya no representa la realidad geográfica, sino la realidad del fenómeno.

La deformación se realiza usando transformaciones matemáticas.

# Paradojas tipo Sorites

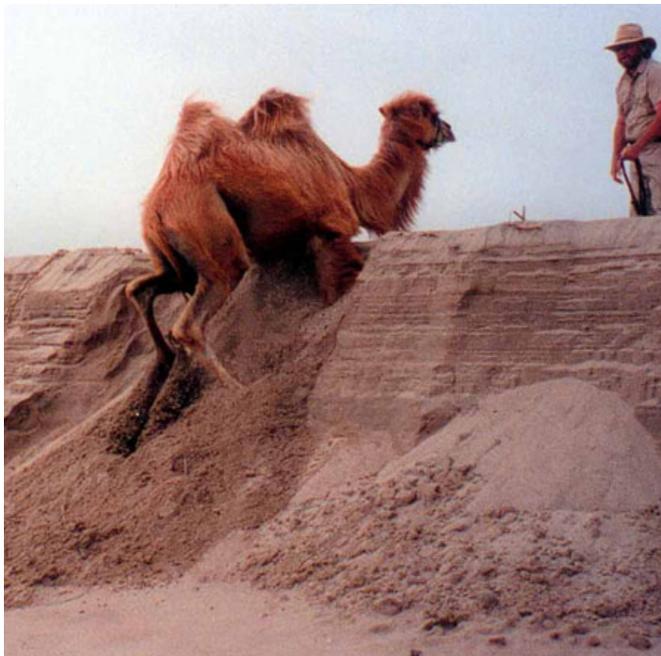
**“Sorites”** es la palabra griega para “montón” o “pila”. “Sorites” es el nombre dado a una clase argumentos paradójicos, que se derivan de los límites indeterminados de aplicación de los predicados envueltos. Se trata de una serie de puzzles atribuidos al lógico Eubulides de Mileto, que incluyen:

1. **el *hombre calvo***: ¿describirías a un hombre con un pelo en la cabeza como calvo?





2. Un **grano de arena** **no es un montón**, si 1 grano de arena no es un montón, tampoco 2 granos de arena lo son... Si 9.999 granos de arena no son un montón, tampoco los son 10.000 granos. ¿Cuántos granos tiene un montón?



Algunas respuestas a esta paradoja son:

- el acercamiento a un *lenguaje ideal*, cuyo atributo clave es su precisión: la vaguedad del lenguaje natural es un defecto a eliminar (Frege y Russell);
- lógicas multivaluadas (no clásicas), como la *lógica difusa* de Goguen y Zadeh (1969) que sustituye a la usual (dos-valuada), que reconocen para un objeto “los grados” de verdad;
- aceptar la paradoja: ninguna cantidad de granos de arena hace un montón... o en otra versión...

**¡ la calvicie no existe !**

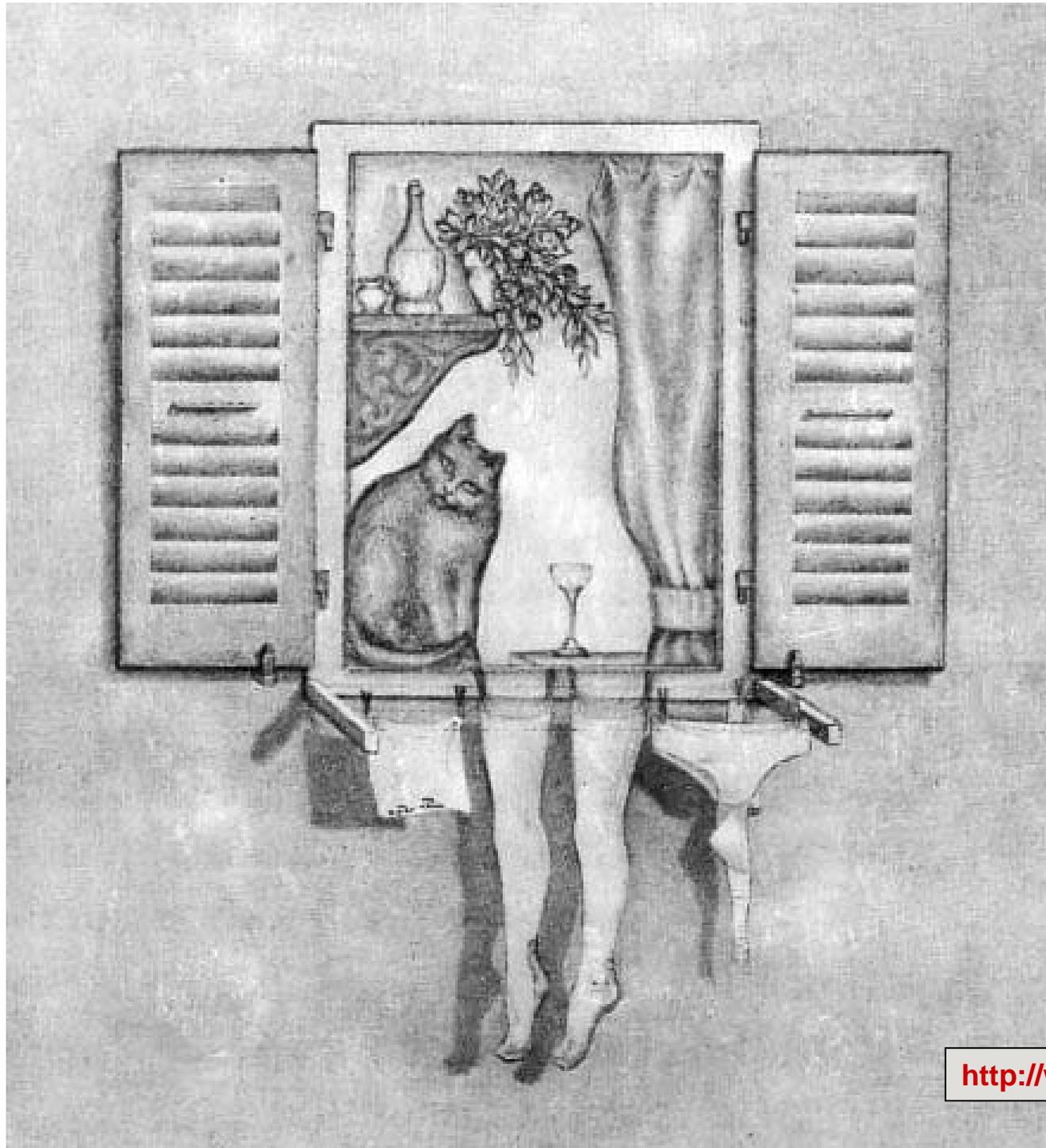
# Figuras ambiguas



**Roger N. Shepard  
(1929- )**

***Sara Nader***





# Sandro del Prete (1937-)

*Todo lo que  
vemos  
puede ser  
visto de  
otra manera*



<http://www.del-prete.ch/index.html>



***El charco***

<http://www.mcescher.com>

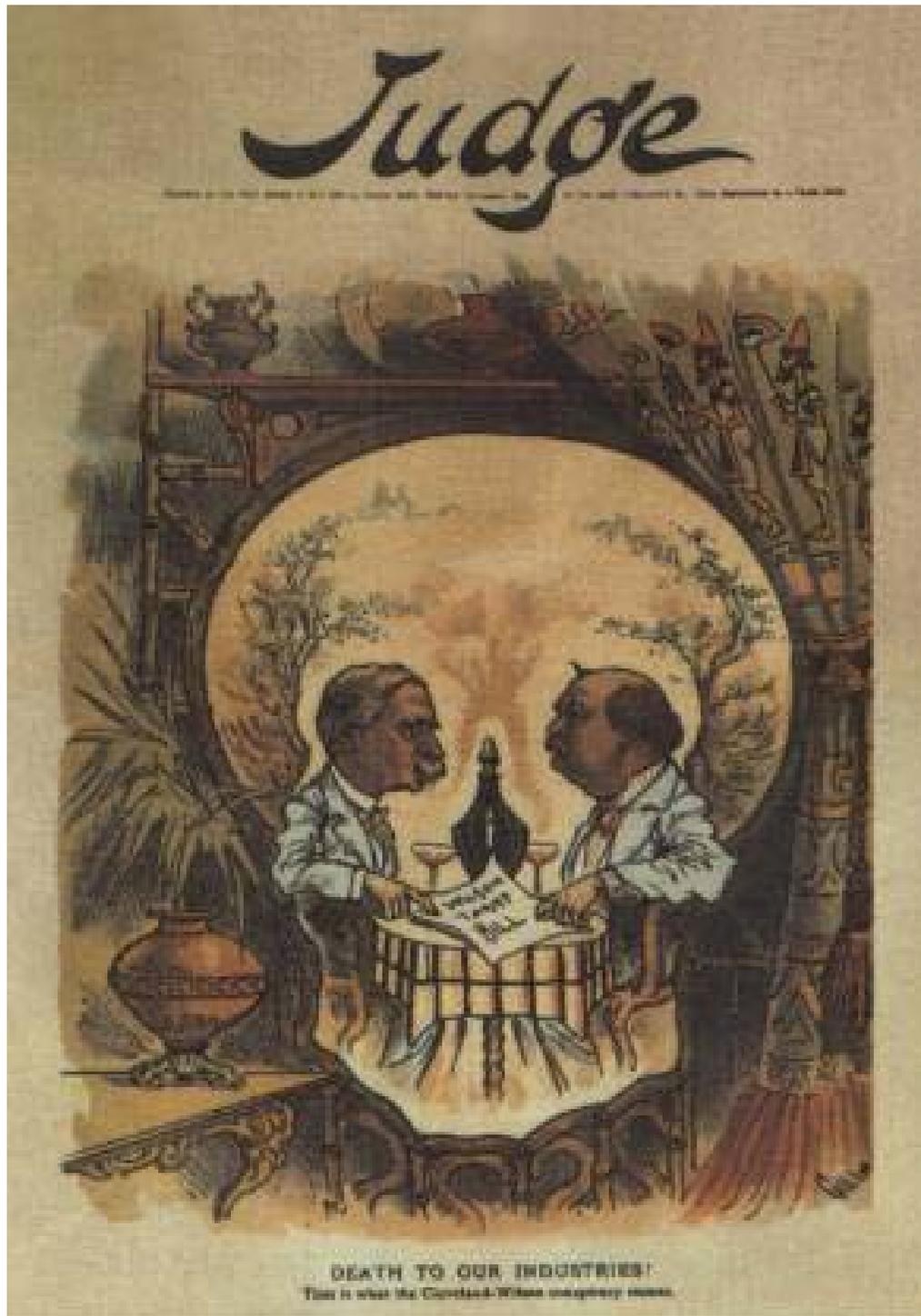
**M. Cornelius Escher (1898-1972)**

***Tres mundos***





**Caja de cerillas: 12 elefantes y sólo 6 cabezas  
(aparte del elefante central)**



**Gillam: Cubierta del Magazine  
JUDGE 26, 1894  
Cartel reivindicativo contra los  
aranceles**

**En el papel del cartel:  
*Wilson Tariff Bill***

**Base del cartel:  
*Death to our industries.  
That is what Cleveland-Wilson  
conspiracy means***



Portada de junio de  
1952 de la revista  
*Famous Fantastic  
Mysteries*

Lawrence Sterne  
Stevens



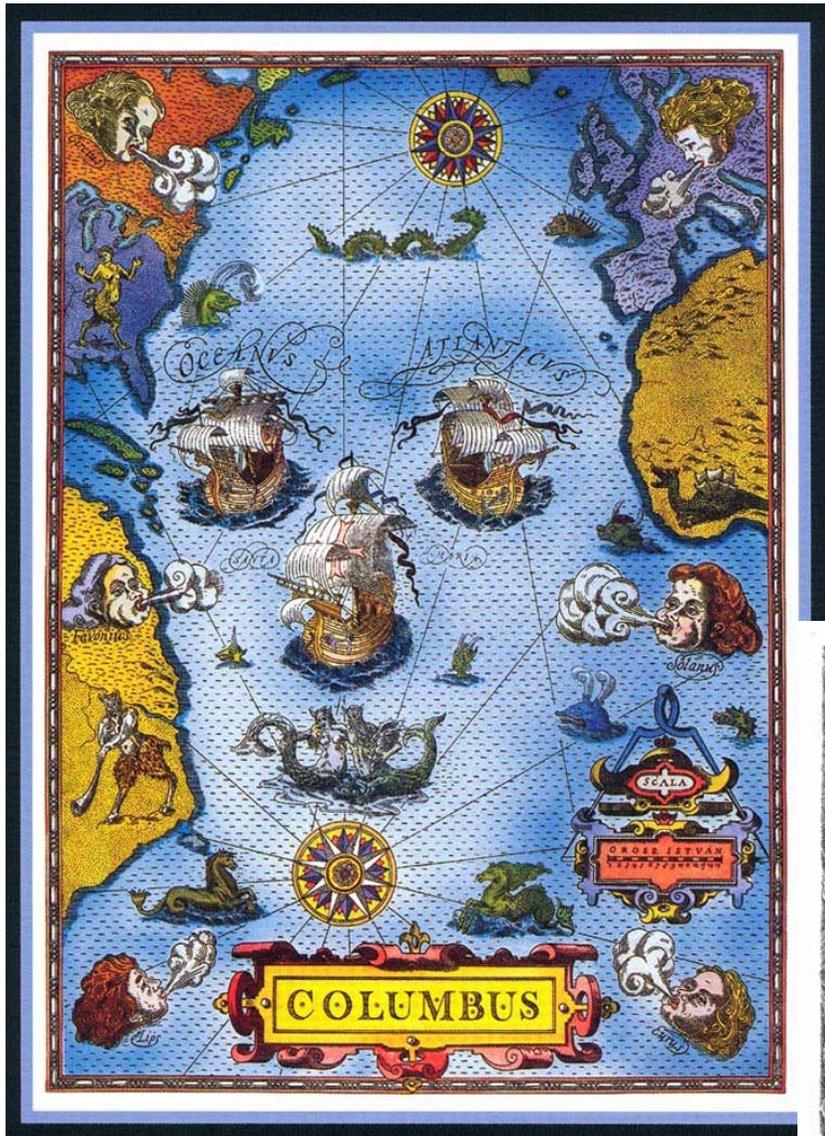
## **Peter Brookes**

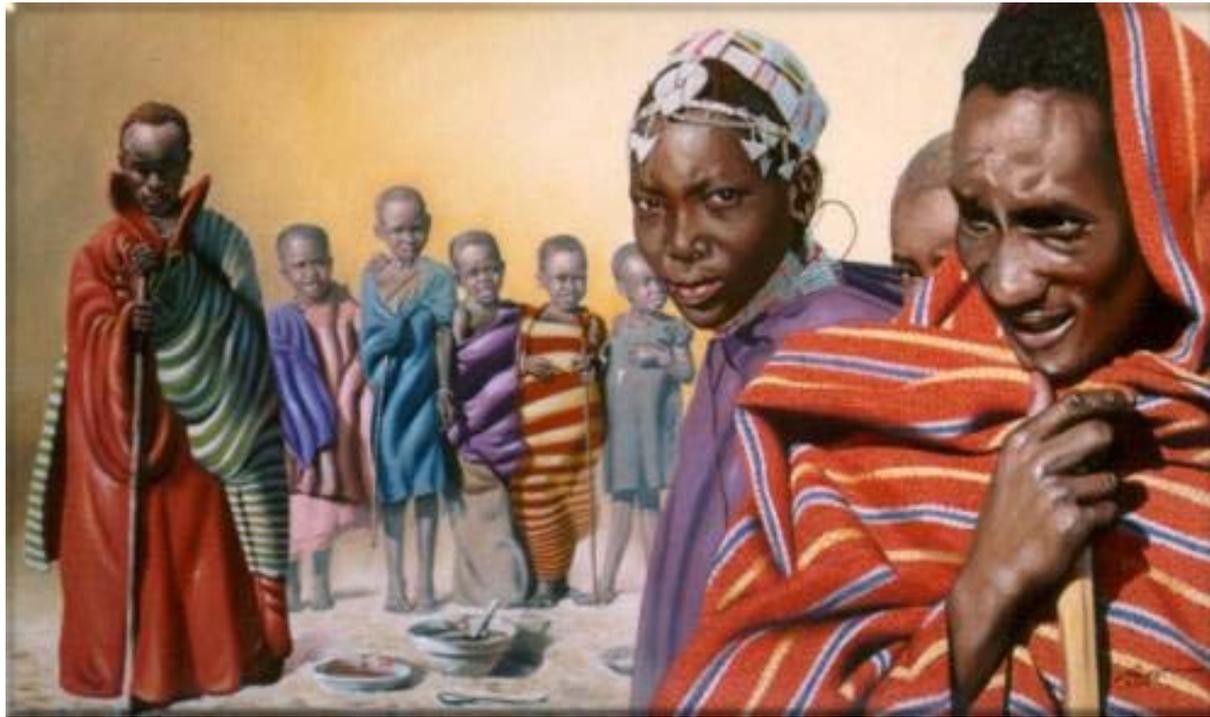
**De cerca se  
ve el ratón y  
de lejos, el  
gato**

Columbus

Itsván Orosz

Durero en el bosque





Rusty Rust

*10 amigos*



*León escondido*



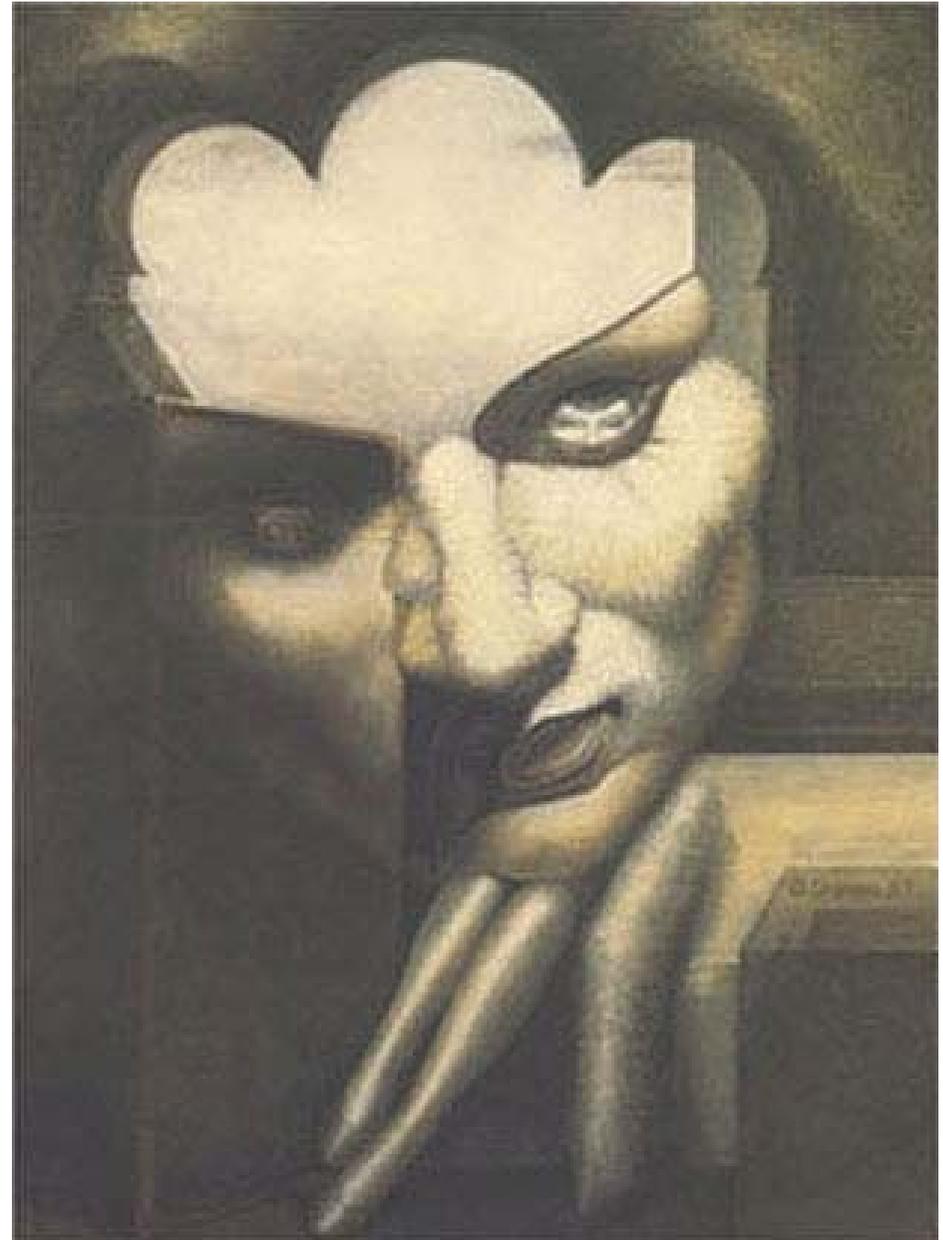
**Octavio Ocampo (1943-)**

***La evolución del hombre***

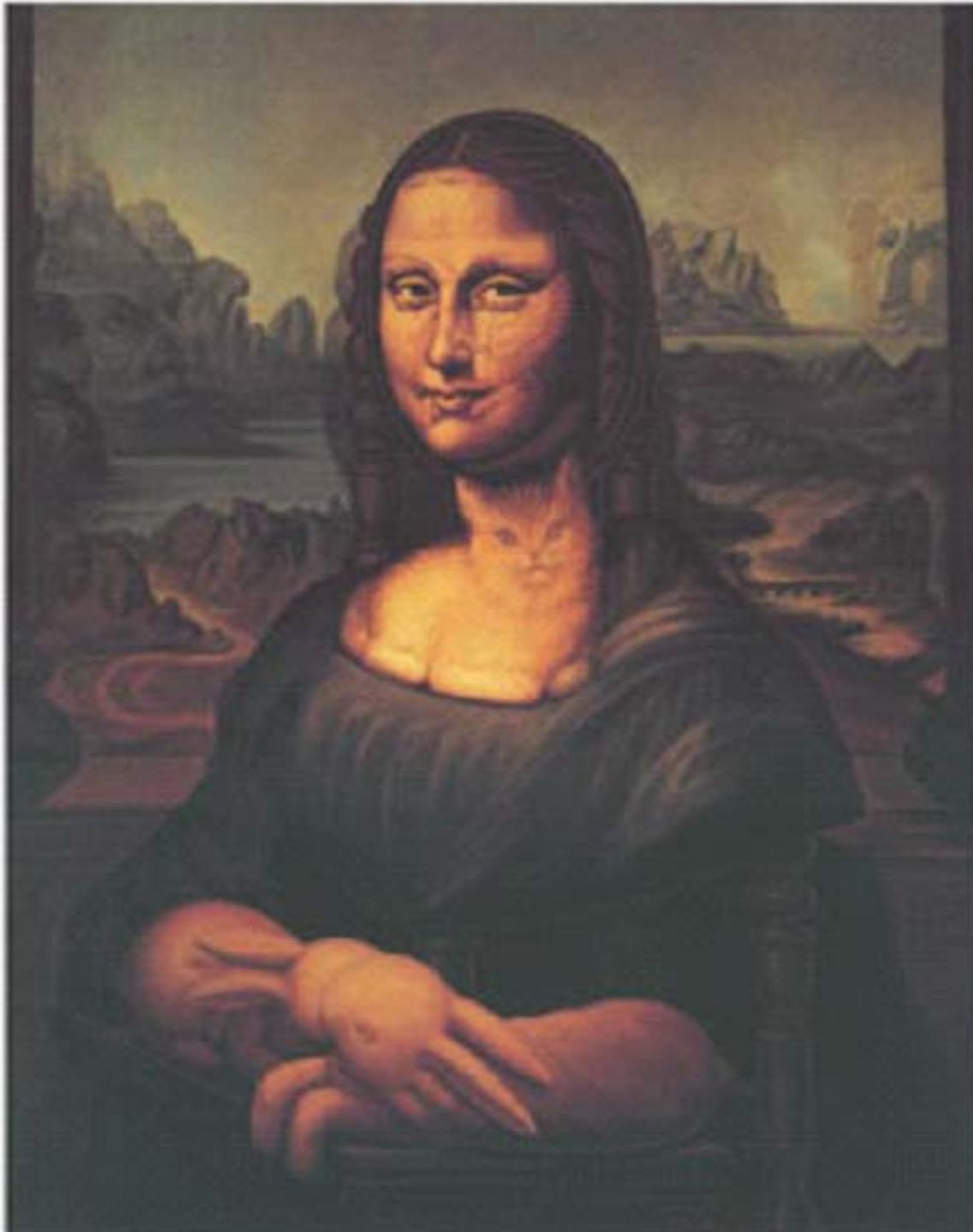


Octavio Ocampo (1943-)

*Marlena*



*Las visiones del Quijote*



**Octavio Ocampo (1943-)**

***Se trata de una silla ocupada por tres conejos (uno negro abajo a la izquierda y dos blancos abajo en el centro), un gato está sentado sobre un cojín en el centro y mira al observador.***

***La silla tiene un respaldo que a primera vista parece la cara de la Mona Lisa, pero si se inspecciona con más cuidado aparecen dos mujeres, un hombre, un ángel,...***

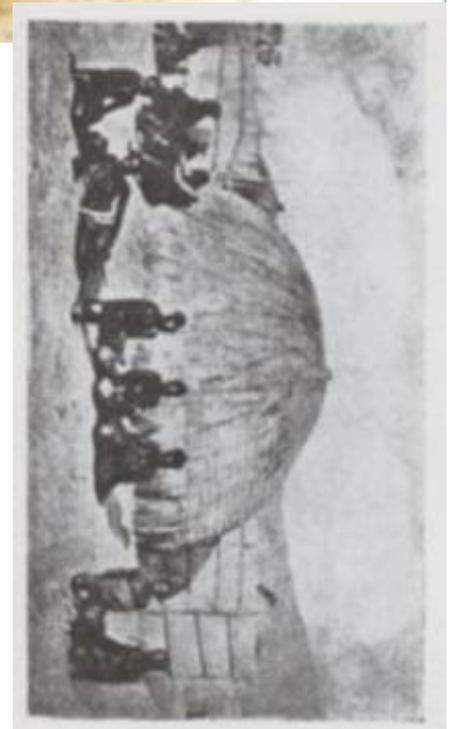
***Mona Lisa***

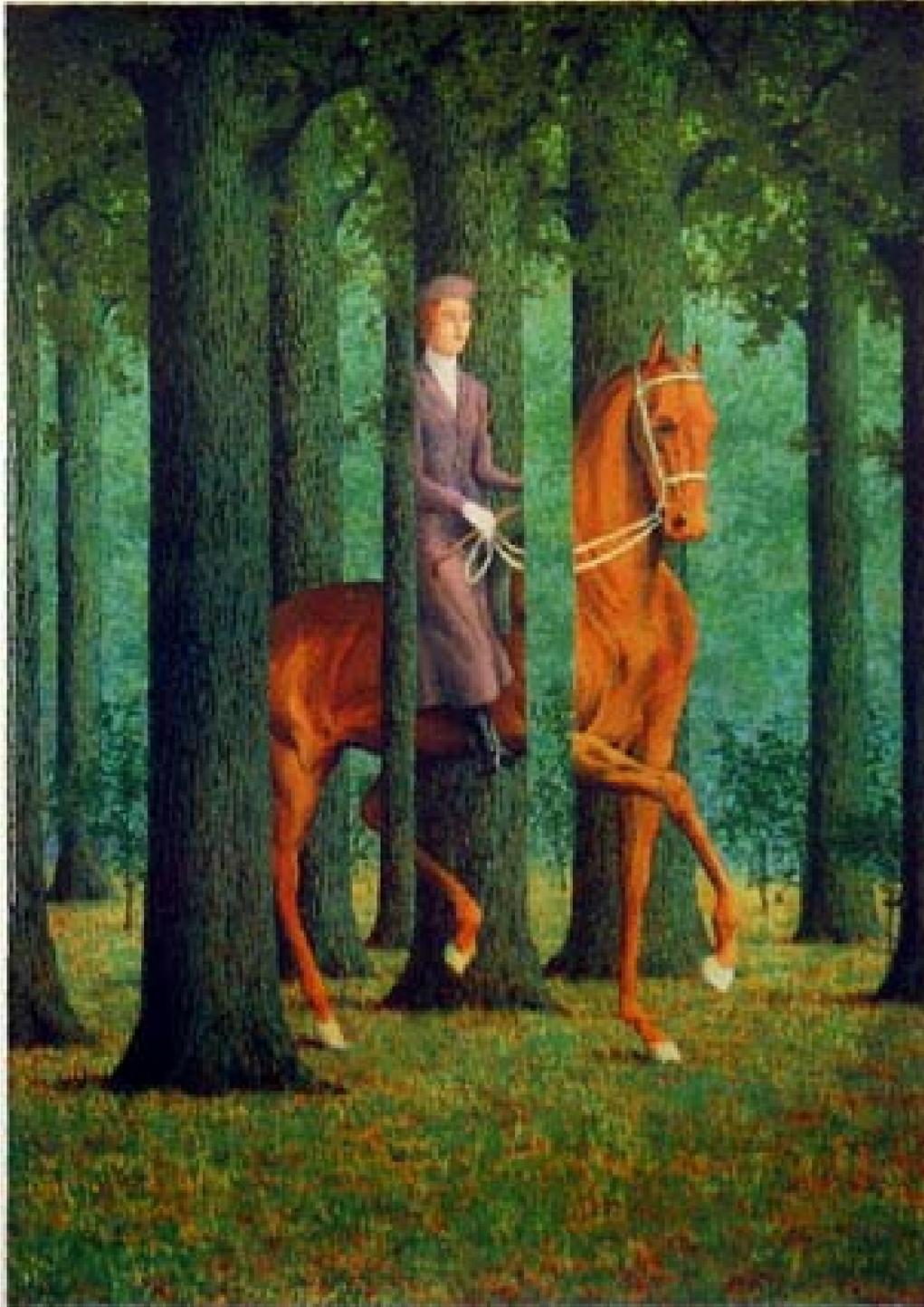


Salvador Dalí (1904-1989)



***Rostro  
paranoico: la  
tarjeta postal  
transformada  
en Picasso***





***Carte blanche***

***La noche que cae***

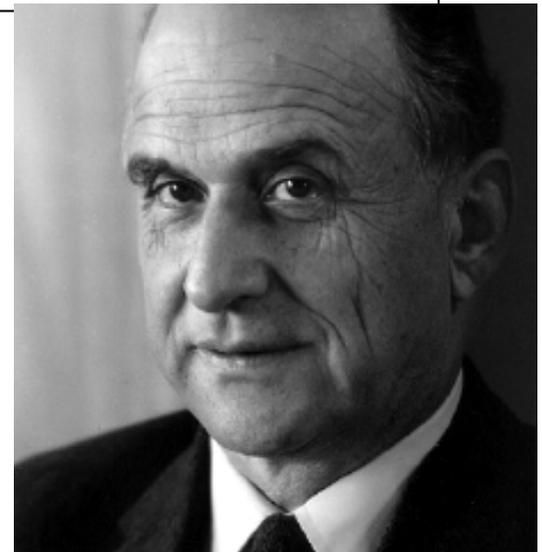
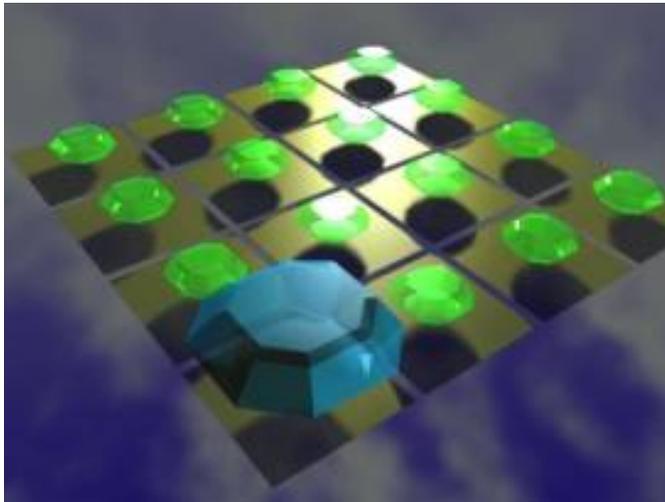
**René Magritte (1898-1967)**



# La paradoja de Goodman

Se define un objeto como *verul*, si observado antes del tiempo  $t$  es *verde*, y *azul* después de  $t$ .

Si  $t = 1$  de enero de 2012, Nelson Goodman (1906-1998) afirma que decir que las esmeraldas son *verdes* o *verules* es igual de consistente... en ambas afirmaciones hay tiempo por medio y ambas se confirman empíricamente...





# Scott Kim: *Input-Output*



# **Scott Kim: *Melody-Rhythm***



# La paradoja del cuervo

Carl Hempel (1905-1997), inventor de esta paradoja, afirma que la existencia de una **vaca de color violeta** incrementa la probabilidad de que los cuervos sean negros.

*¿Por qué?*



Para responder,  
establezcamos la ley:  
***Todos los cuervos son  
negros,*** de una manera  
diferente, pero lógicamente  
equivalente ***Todos los  
objetos no-negros no son  
cuervos.***



***Hempel dice: He encontrado un objeto no-negro - una vaca violeta. Esto confirma (débilmente) la ley “Todos los objetos no-negros no son cuervos”. Y así, también confirma la ley equivalente “Todos los cuervos son negros”.***

Es fácil encontrar miles de objetos no-negros que no son cuervos, confirmando así de manera más fuerte la ley. El problema es que observando objetos no-negros se confirma la ley

***“Todos los cuervos son negros”***

pero sólo a un nivel “infinitesimal”.

La clase de objetos que no son cuervos, es tan enormemente grande comparada con las que son cuervos que el grado con el cual un no-cuervo que es no negro confirma la hipótesis es despreciable...

Los detractores de Hempel opinan que la existencia de una **vaca de color violeta** confirma del mismo modo el **enunciado**

***“Todos los cuervos son blancos”...***



# ¿Ilusión?

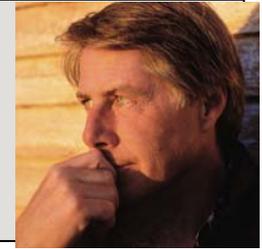


**El jardín de los sueños, diseñado por M. Hall y H. Yarrow**

***EVA***

***2006, Chelsea Flower Show, Londres.***

# Ilusión fotográfica



*¿Hacia que lado mira el caballo?*

**Jerry Downs**



Esta foto fue tomada a los camellos en el desierto. Es justamente, considerada una de las mejores del año 2005 y fue publicada por National Geographic. **Los camellos son las líneas blancas, la forma negra que vemos es la sombra... absolutamente espectacular.**



Fotoğraf: George Steinmetz

Dev Develer

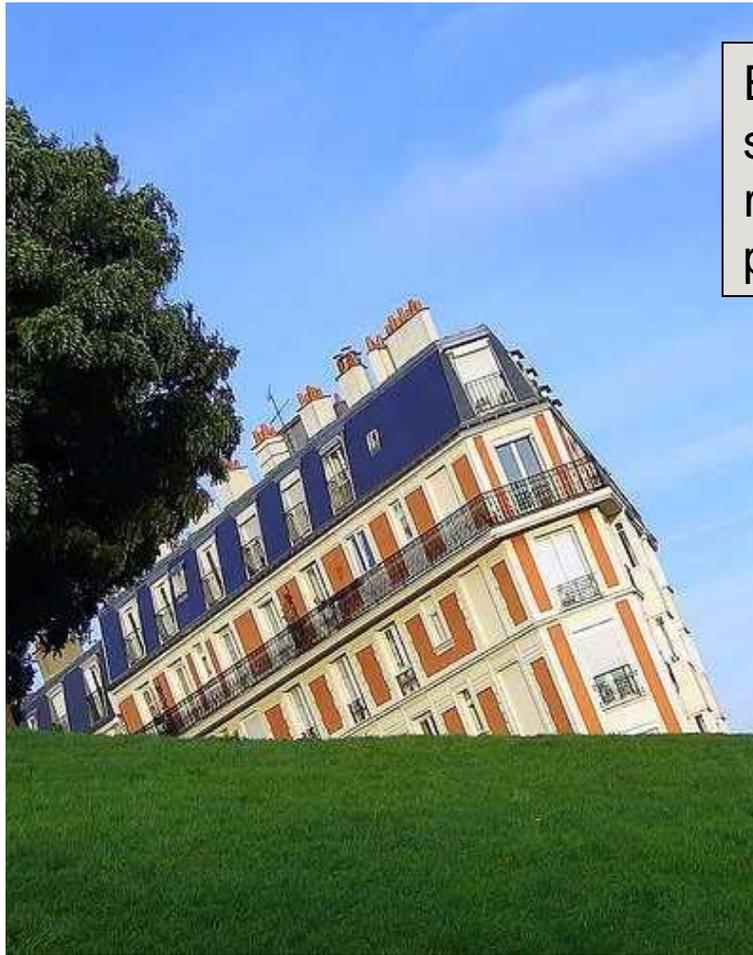
© 2005 National Geographic Society. Her hakkı saklıdır.

National Geographic Türkiye, Şubat 2005



Este castillo francés parece hundirse en el césped: sólo es una foto, que no ha sido manipulada ni retocada. La segunda imagen es del mismo edificio, pero tomada desde otro punto de vista.

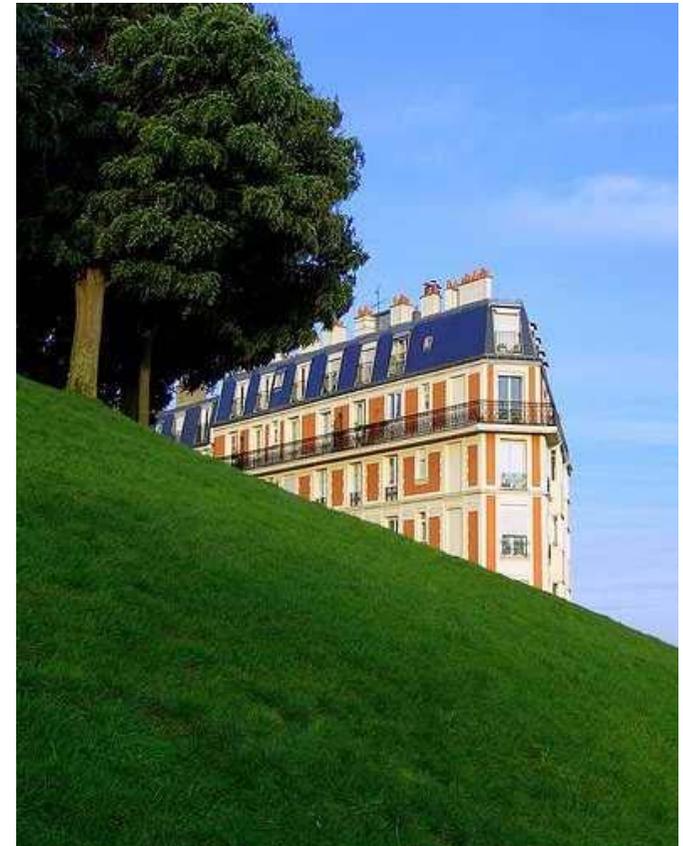
En la primera imagen se ha inclinado la cámara, y se ha tenido cuidado de incluir parte del árbol, pero no el tronco. Nuestra mente interpreta que la hierba marca la línea del horizonte...



Este castillo francés parece hundirse en el césped: sólo es una foto, que no ha sido manipulada ni retocada. La segunda imagen es del mismo edificio, pero tomada desde otro punto de vista.

En la primera imagen se ha inclinado la cámara, y se ha tenido cuidado de incluir parte del árbol, pero no el tronco. Nuestra mente interpreta que la hierba marca la línea del horizonte...

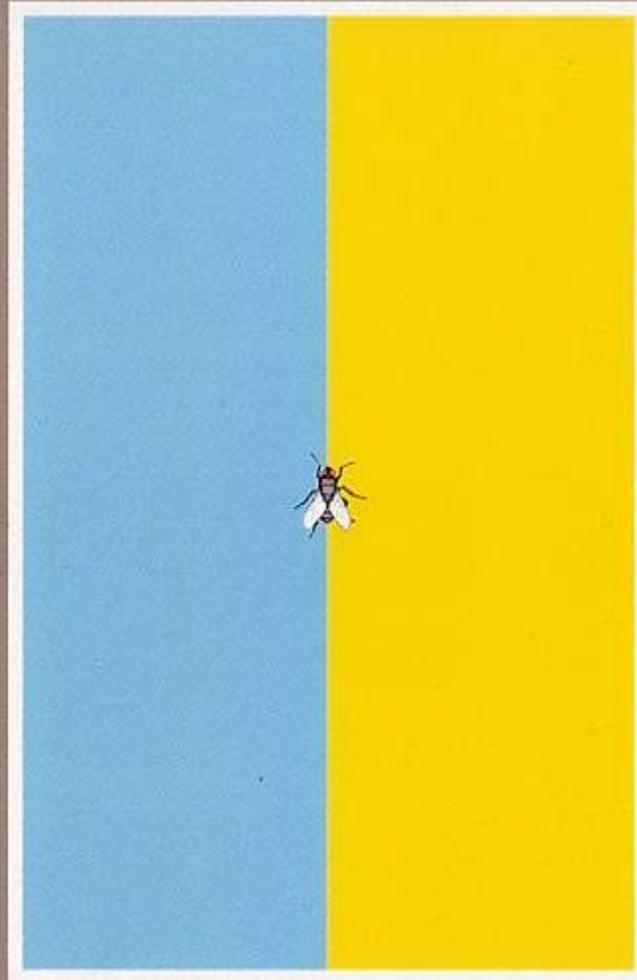
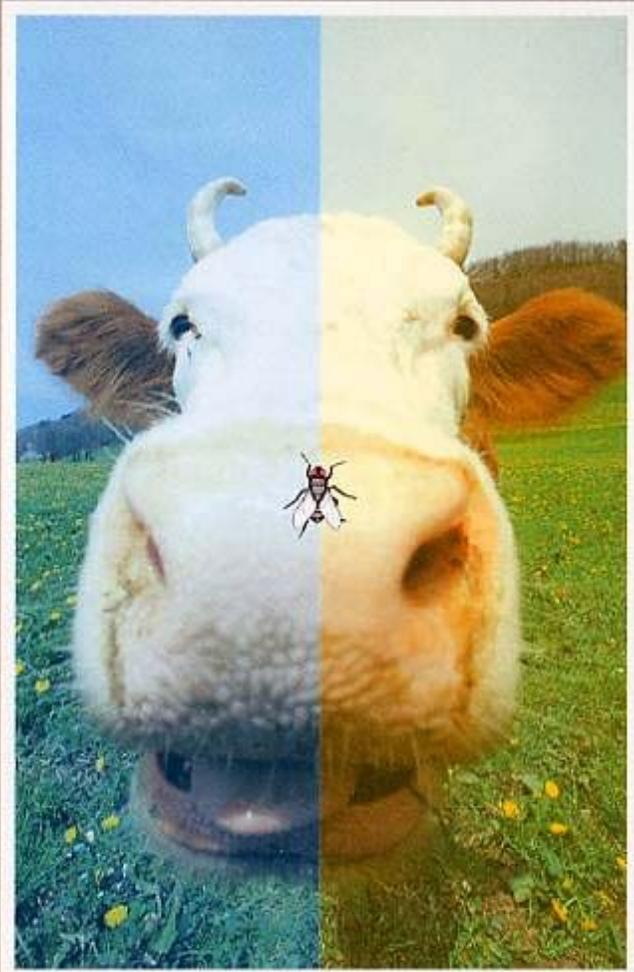
... en la imagen le indica lo contrario. La segunda figura muestra que hay una inclinación en el césped, y que el edificio no está hundiéndose. La vista del tronco ratifica la realidad de la imagen.



# Ilusión óptica



[http://www.archimedes-lab.org/Gallery/new\\_optical\\_illusions/index.html](http://www.archimedes-lab.org/Gallery/new_optical_illusions/index.html)

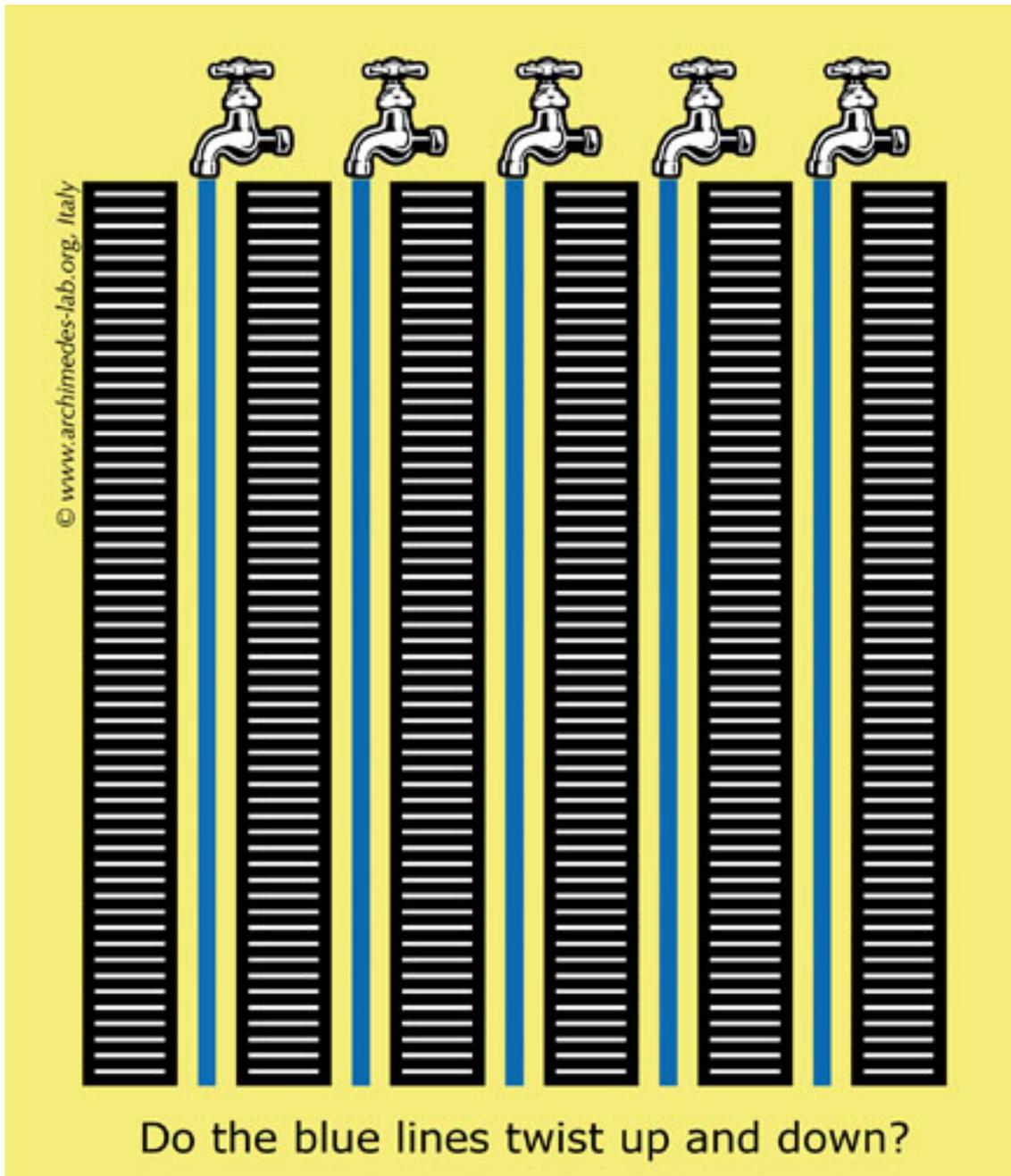


©1998, Gianni A. Sarcone, www.archimedes-lab.org

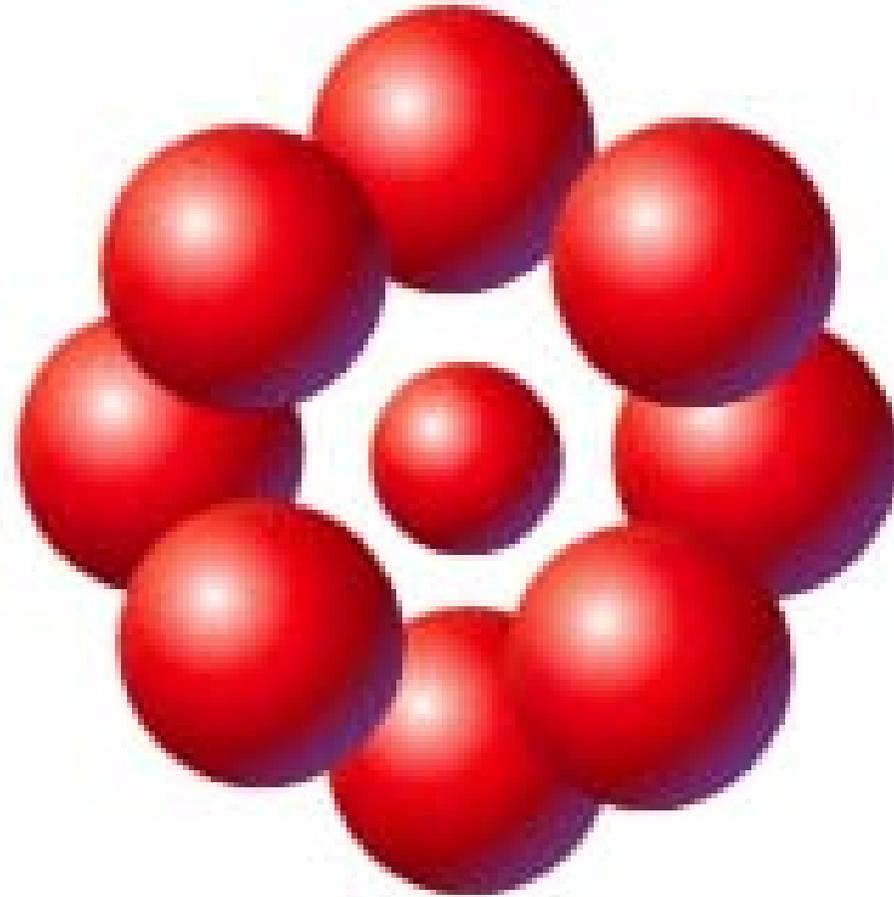
El color en esta foto de una vaca no está bien equilibrado; el lado izquierdo es menos amarillo que el derecho...

Para restaurar el color, mira la mosca del segundo diagrama durante 30 segundos y después mira a la vaca de nuevo...

[http://www.archimedes-lab.org/Gallery/new\\_optical\\_illusions/index.html](http://www.archimedes-lab.org/Gallery/new_optical_illusions/index.html)

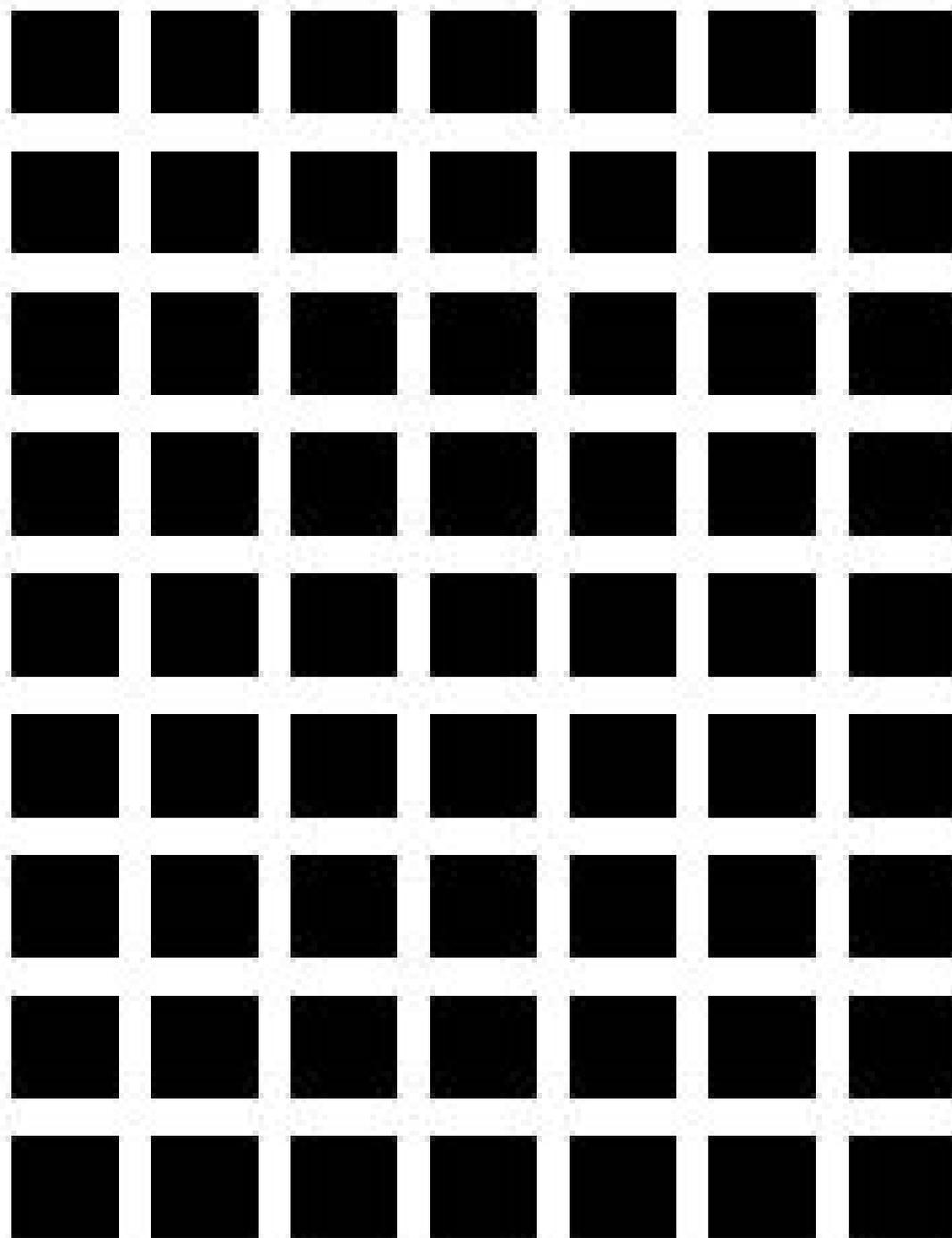


**Moción aparente:  
parece que el agua  
fluye... es una ilusión  
óptica debida a la  
“inhibición lateral”.**

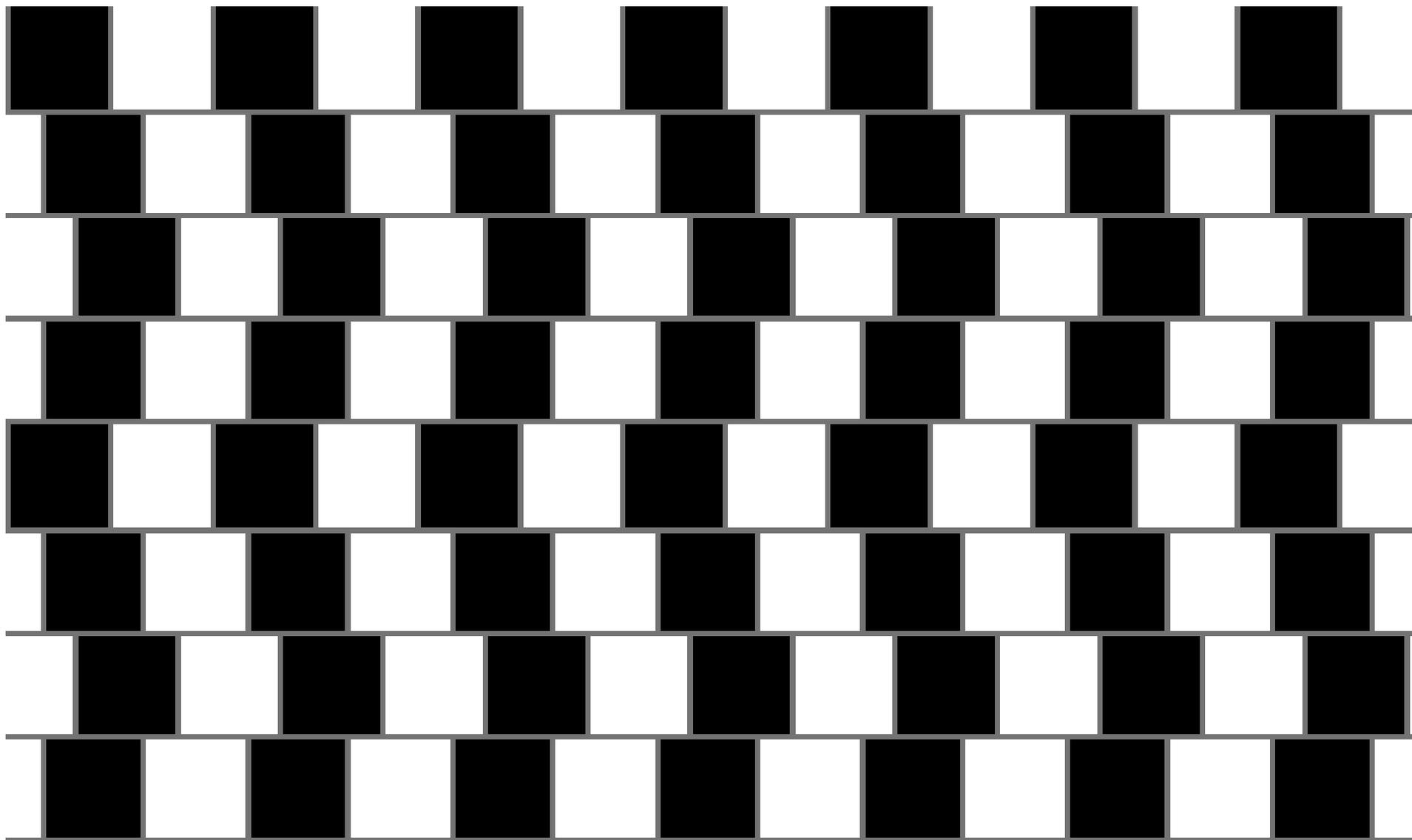


## **Titchener y Delboeuf**

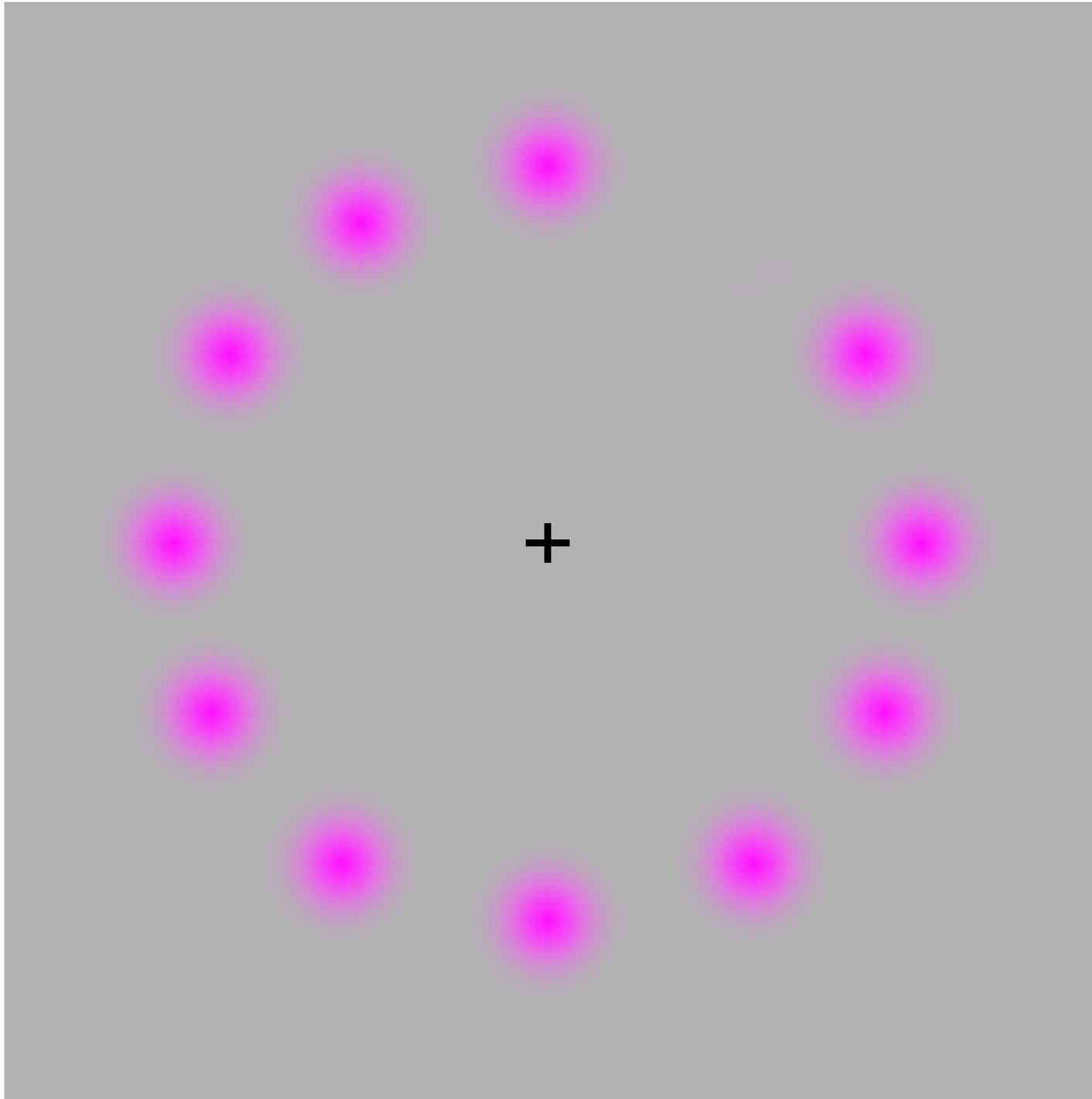
**¿Cuál de los dos círculos centrales es de mayor tamaño?**



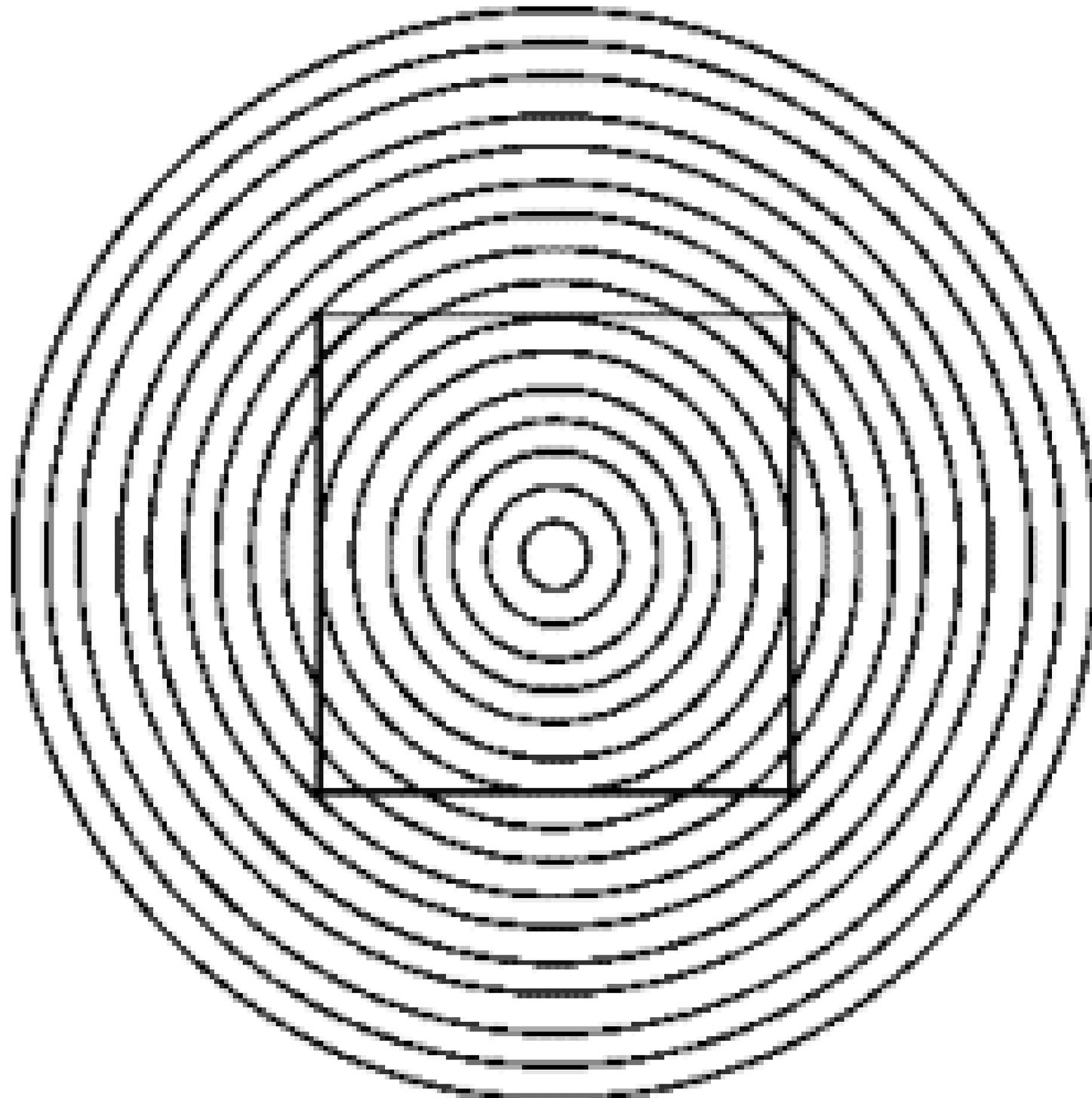
**Ilusión del enrejado  
por contraste de  
colores**



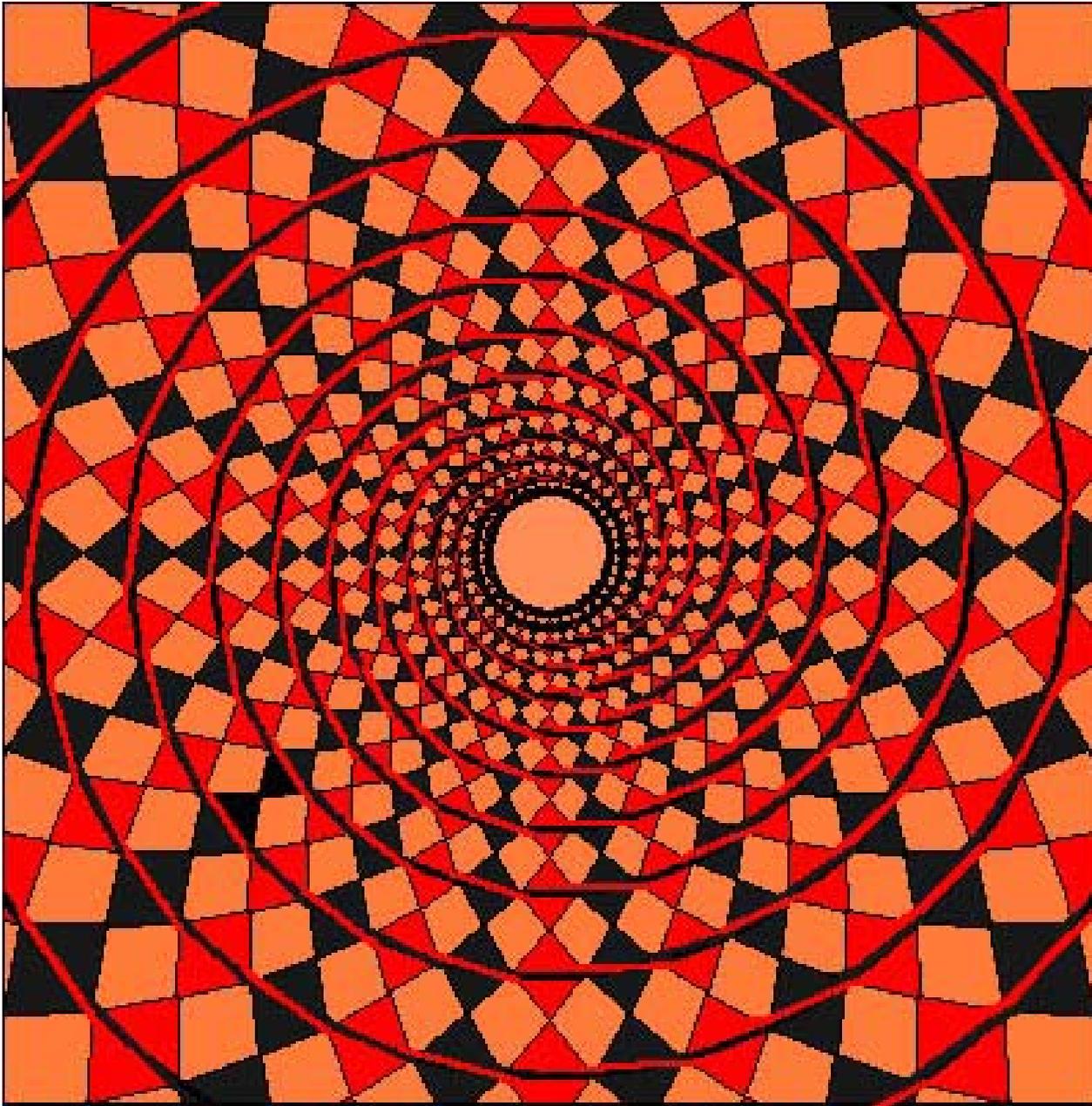
¿Son paralelas las líneas?



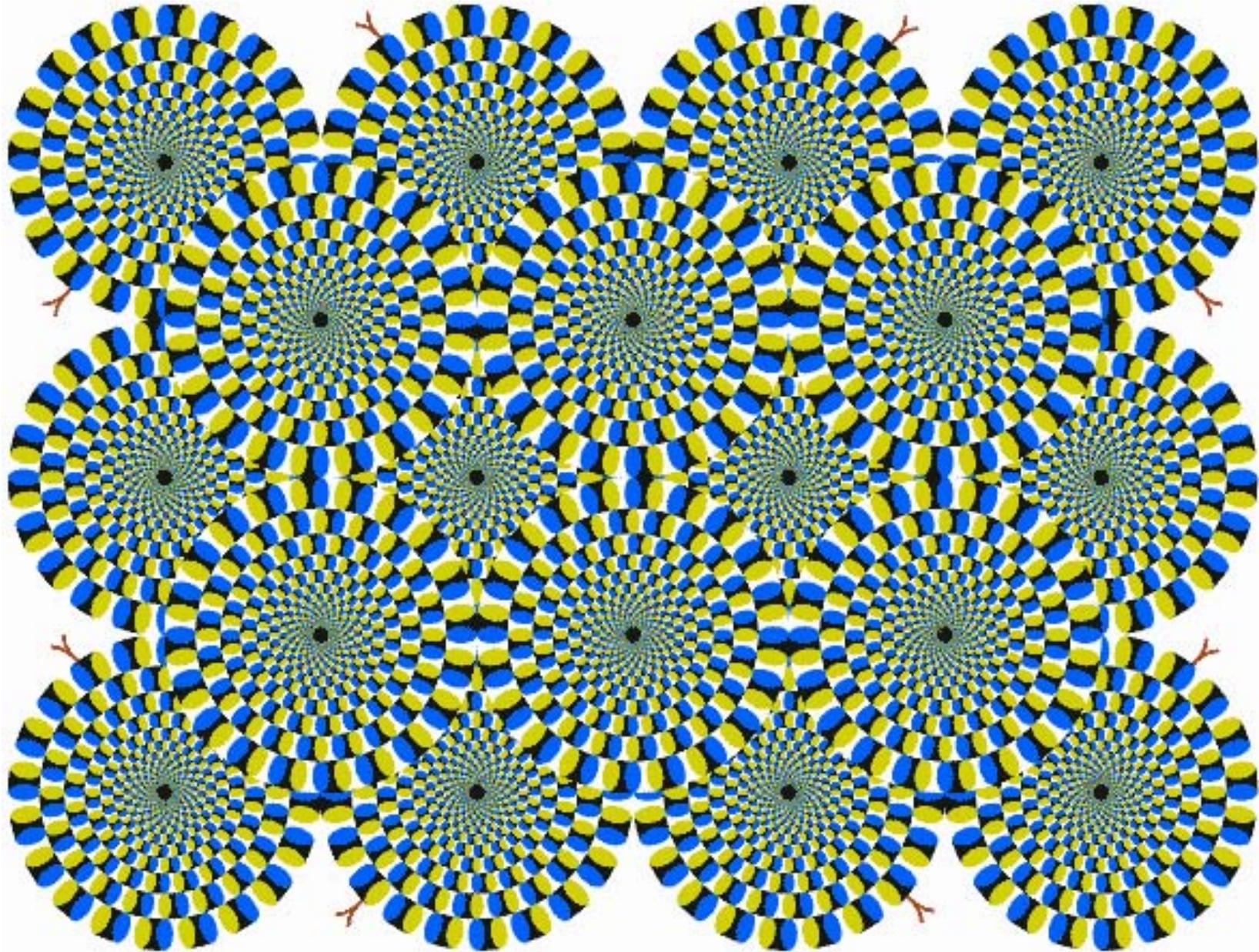
**Si tus ojos siguen el movimiento del punto rotativo rosado, sólo verás un color: rosa. Si tu mirada se detiene en la cruz negra del centro, el punto rotativo se vuelve verde. Ahora, concéntrate en la cruz central. Después de un breve periodo de tiempo, todos los puntos rosas desaparecerán y sólo verás un único punto verde girando... En realidad no hay ningún punto verde, y los puntos rosas no desaparecen.**



**¿Qué es  
la figura  
central?**



**Ilusión de las  
cuerdas de  
Frazier**



*Serpientes rotando*

<http://www.ritsumeai.ac.jp/~akitaoka/index-e.html>

Akiyoshi Kitaoka

# Ilusión óptica en 3D





**Si te mueves alrededor de este dragón de papel, parece que te sigue a lo largo de la habitación.**

**¿Qué sucede? Cuando te mueves alrededor de un objeto sólido, tu cerebro sabe como se comporta. Pero este dragón nos da “falsas pistas”... interpretamos que la nariz del dragón apunta hacia nosotros, cuando de hecho su cara es cóncava...**

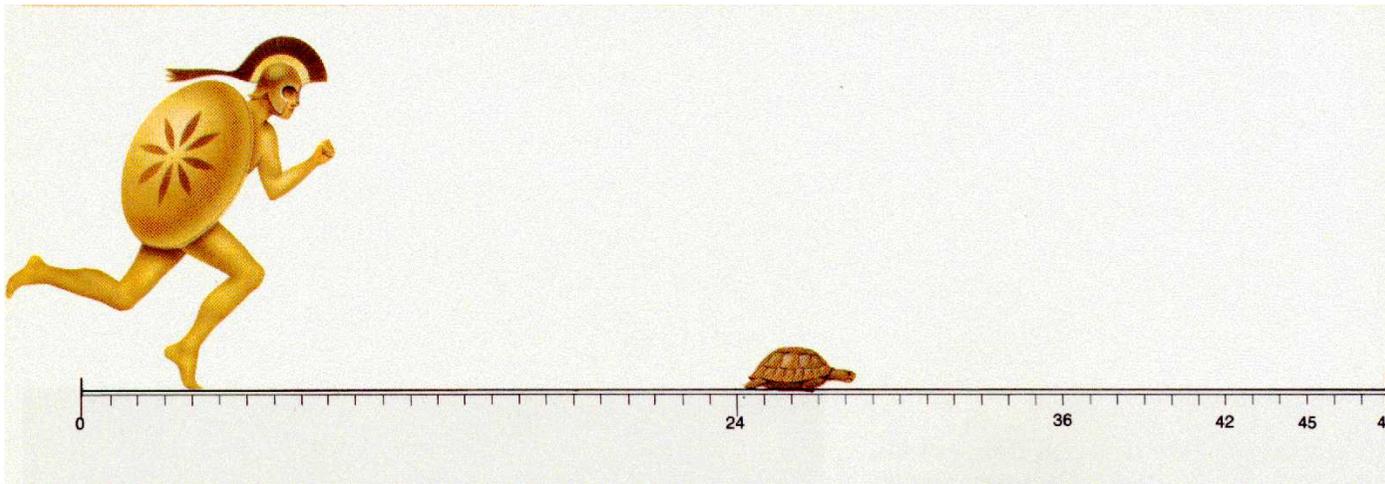
**[http://www.grand-illusions.com/opticalillusions/dragon\\_illusion/](http://www.grand-illusions.com/opticalillusions/dragon_illusion/)**



© [www.grand-illusions.com](http://www.grand-illusions.com)

# Aquiles y la tortuga (Zenón)

Se arregla una carrera entre Aquiles y la tortuga. Como Aquiles es mucho más veloz que la tortuga, el héroe permite una cierta ventaja al “lentísimo” animal.



**Paradoja**: Aquiles no puede **nunca** alcanzar a la tortuga, independientemente de lo rápido que corra y de lo larga que sea la carrera: cada vez que el perseguidor alcanza un lugar donde ha estado la perseguida, la tortuga se adelanta un poco...

Algo debe ser falso en el argumento... la falacia que surge es la noción equivocada de que cualquier sucesión infinita de intervalos de tiempo debe sumar toda la eternidad...



**Solución (física):** Si el espacio y el tiempo son indefinidamente divisibles, el movimiento sería imposible.

**Solución (matemática):** convergencia de la serie  
 $1/2 + 1/4 + 1/8 + \dots + 1/2^n + \dots = 1$

# Figuras imposibles



**Guido Moretti (1947-)**

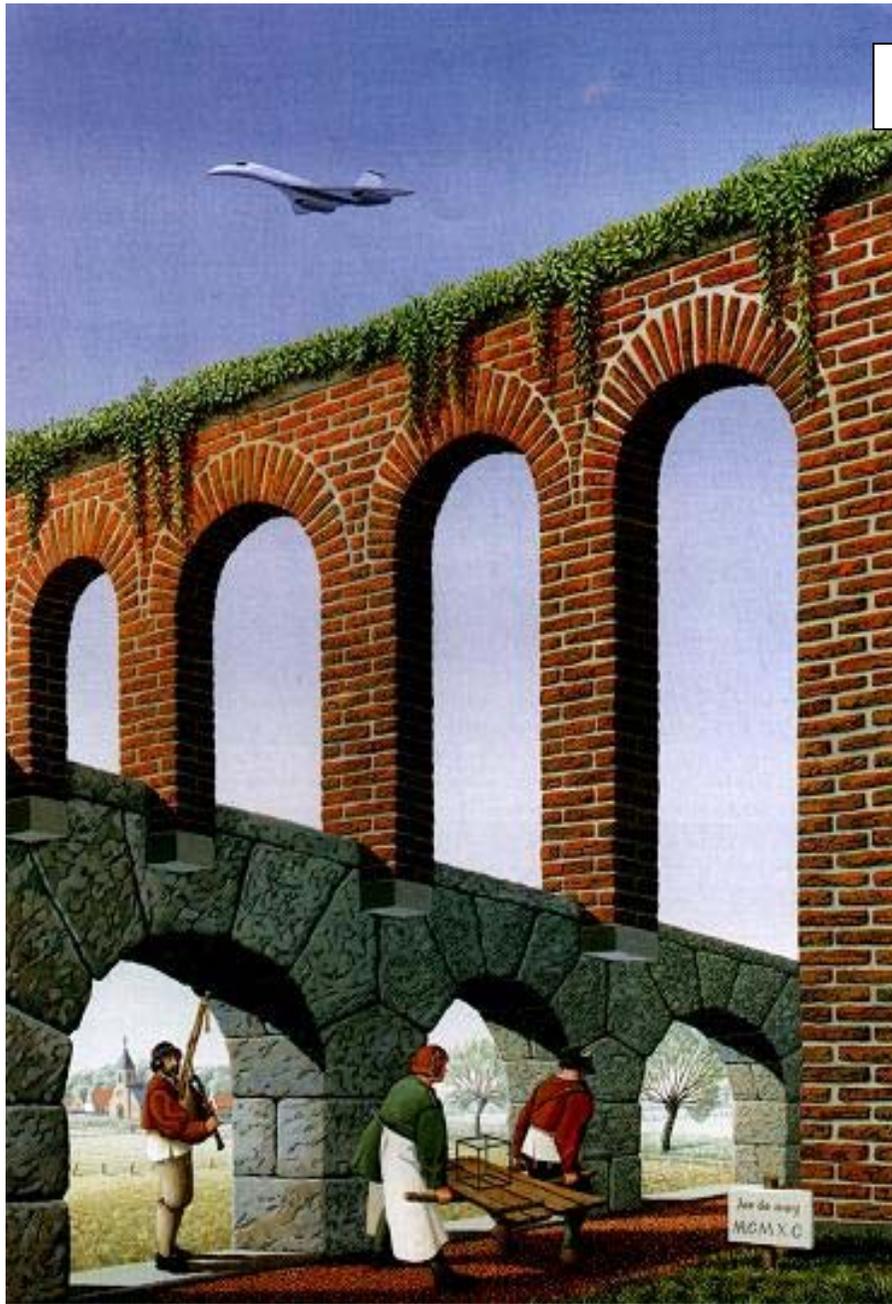
[http://www.guidomoretti.it/S\\_terzavia.htm](http://www.guidomoretti.it/S_terzavia.htm)



**Anillo y Paralelepipedos imposibles**

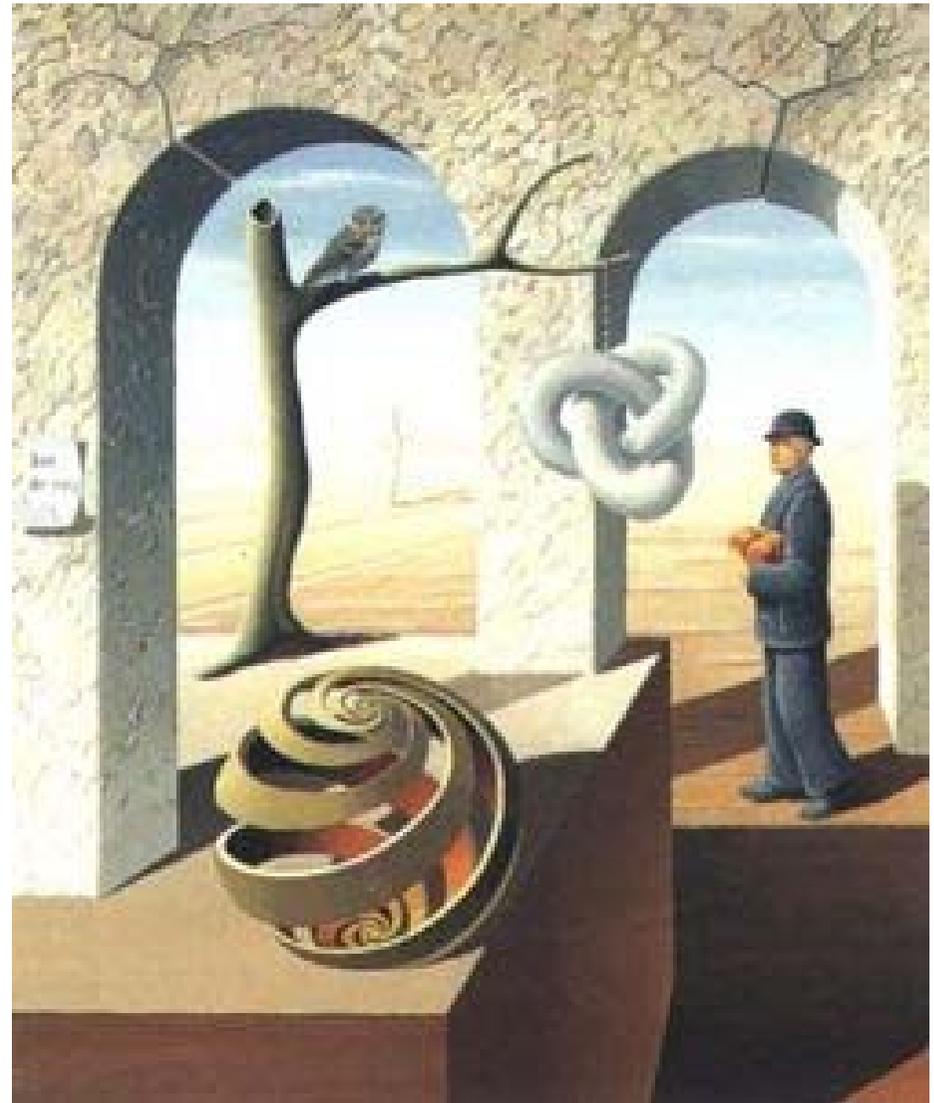
**Video + video Haemakers**

***Aquaviaduct***



**Jos de Mey (1928-)**

***Un personaje de Magritte con  
objetos de Escher, 1996***



# La paradoja de Fermi

Si un pequeño porcentaje de los billones de estrellas en la galaxia fueran el hogar de civilizaciones con tecnología, capaces de colonizar a distancias interestelares, la galaxia completa estaría *invadida* en unos pocos millones de años. La ausencia de tales civilizaciones extraterrestres visitando la tierra es *la paradoja de Fermi*.



¿Dónde están?

Existen dos corrientes principales en la visión de la vida:

- los ***copérmicos***: la tierra es un planeta cualquiera alrededor de una estrella cualquiera de la galaxia, la vida es un fenómeno corriente y lleva algún día a la aparición de civilizaciones tecnológicas;
- los ***geocéntricos***: el lugar del Hombre es la conquista de una galaxia “vacía” de civilizaciones. ***¡Los geocéntricos se han equivocado tanto a lo largo de la historia!***

Existe una fórmula debida al astrónomo ***F. Drake*** que permite estimar el número de civilizaciones inteligentes tecnológicamente avanzadas susceptibles de estar presentes en nuestra galaxia, basada en conocimientos que van de la astrofísica a la biología: es el producto

$$N = E \times P \times F \times V \times I \times C \times L$$

- ***E***, número de estrellas en nuestra galaxia (400.000.000.000),
- ***P***, número medio de planetas alrededor de las estrellas (5 a 20),
- ***F***, porcentaje de planetas favorables a la vida (20 a 50%),
- ***V***, probabilidad de aparición de la vida (20 a 50%),
- ***I***, probabilidad de emergencia de seres inteligentes (20 a 50%),
- ***C***, probabilidad de aparición de una civilización tecnológica con capacidad de comunicación (20 a 50%),
- ***L***, duración de la vida de una civilización avanzada (100 a 10.000.000 años).



El factor preponderante en la ecuación de Drake es el tiempo, es decir la fórmula tiene una gran dependencia del factor  $L$ .

- Si las civilizaciones tecnológicas viven un breve instante de tiempo  se autodestruirán ¡el número de civilizaciones en el universo es **cercano a ... 1!**
- Al contrario, si la duración de la vida de estas civilizaciones se cuenta en millones de años, entonces ¡el universo debería estar **invadido** por mensajes de radio!

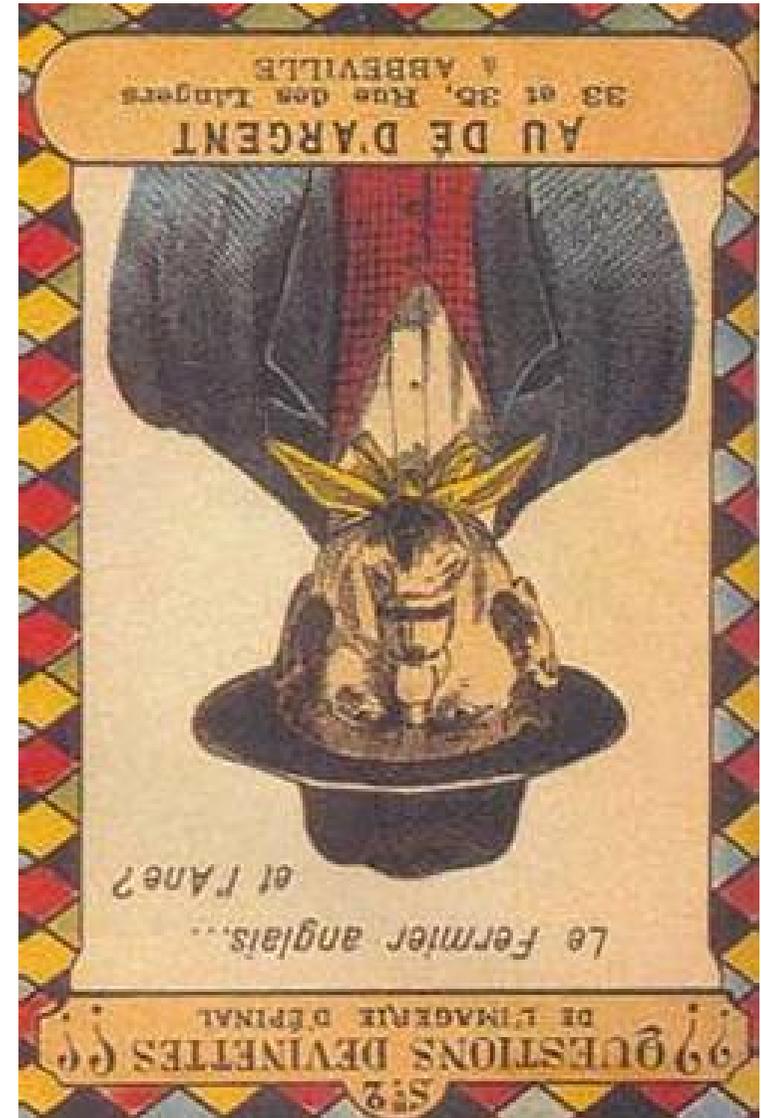
Para  $L=10.000$  años (¿modelo terrestre?) existirían por esta fórmula unas 10.000 civilizaciones, y si estuvieran repartidas de manera aleatoria por las estrellas de la galaxia, la más cercana a nosotros estaría a 1.000 años-luz. Nuestras emisiones de radio datan de 50 años, así que estaríamos a muchos años de ser encontrados (y estudiados).

***¿Estamos solos? No... estamos muy lejos.***

# Figuras reversibles



¿El  
granjero  
inglés y  
el asno?





**Sergio Buratto**  
**¿sapo o caballo?**





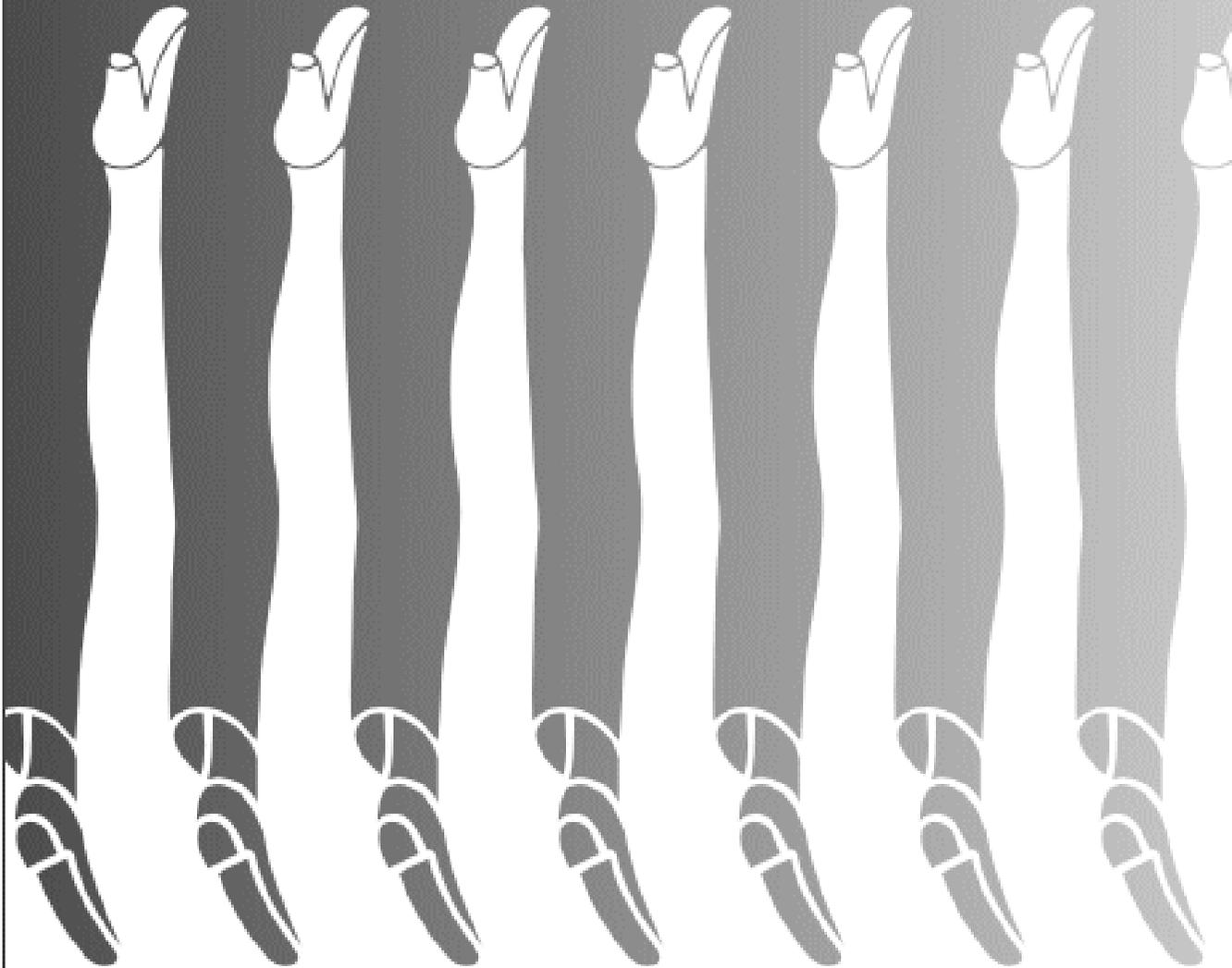
***Encore***, escultura en madera



**Shigeo Fukuda (1932-)**

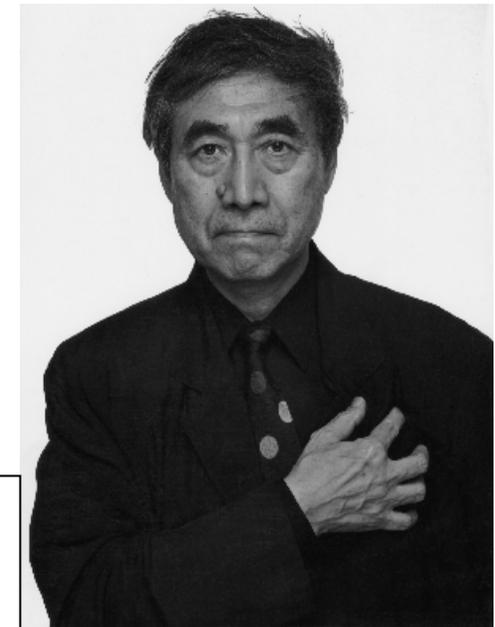
**Video + Fukuda clamps**

www.ilusaodeotica.com



***Piernas de  
dos géneros  
diferentes  
(1975)***

**Shigeo  
Fukuda**



[http://psylux.psych.tu-dresden.de/i1/kaw/diverses%20Material/www.illusionworks.com/html/art\\_of\\_shigeo\\_fukuda.html](http://psylux.psych.tu-dresden.de/i1/kaw/diverses%20Material/www.illusionworks.com/html/art_of_shigeo_fukuda.html)

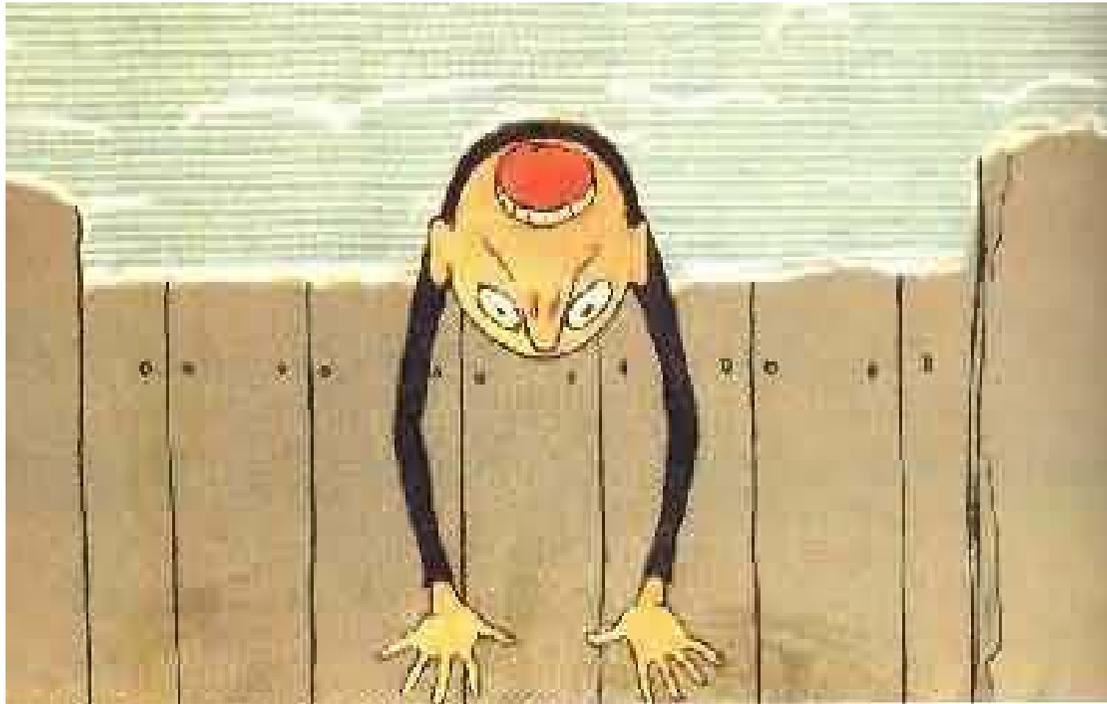


Un hombre sobre un caballo ataca a un pobre elfo... que sabe defenderse.

**Peter Newell**  
**(1862-1924)**  
*Caballero y elfo*

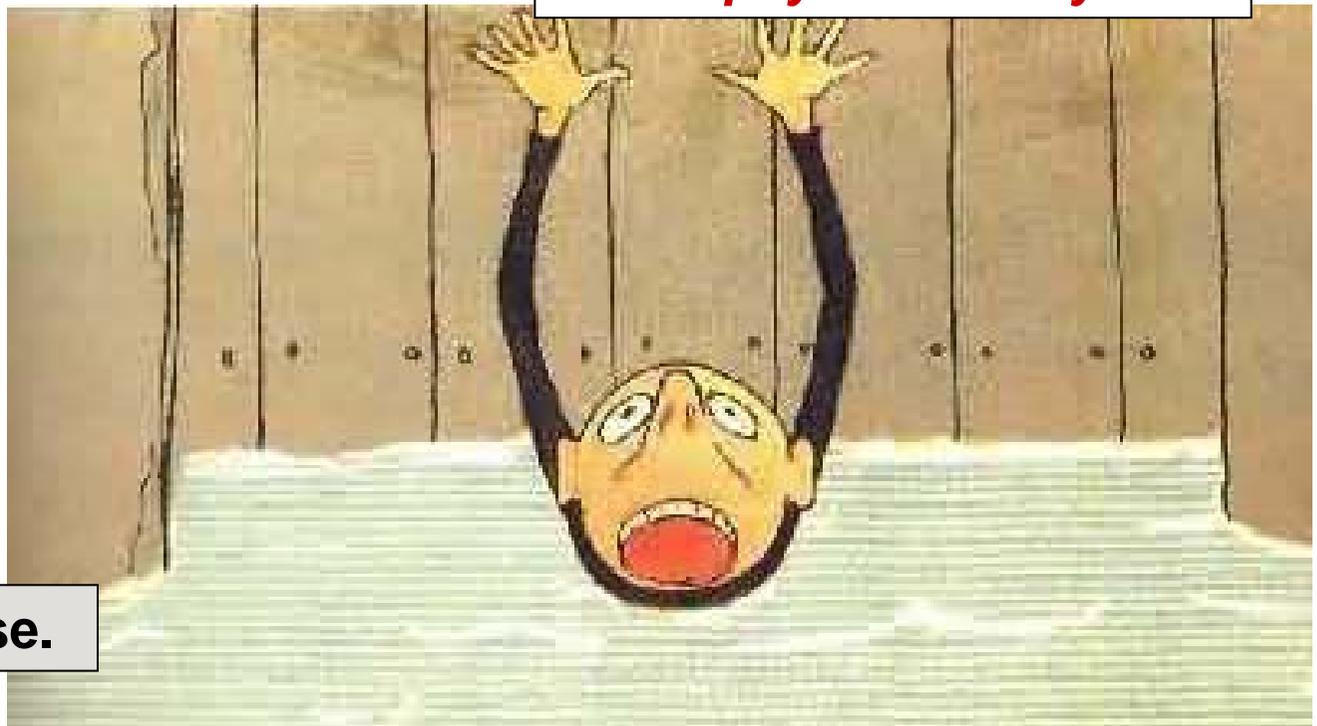


<http://wwar.com/masters/n/newell-peter.html>

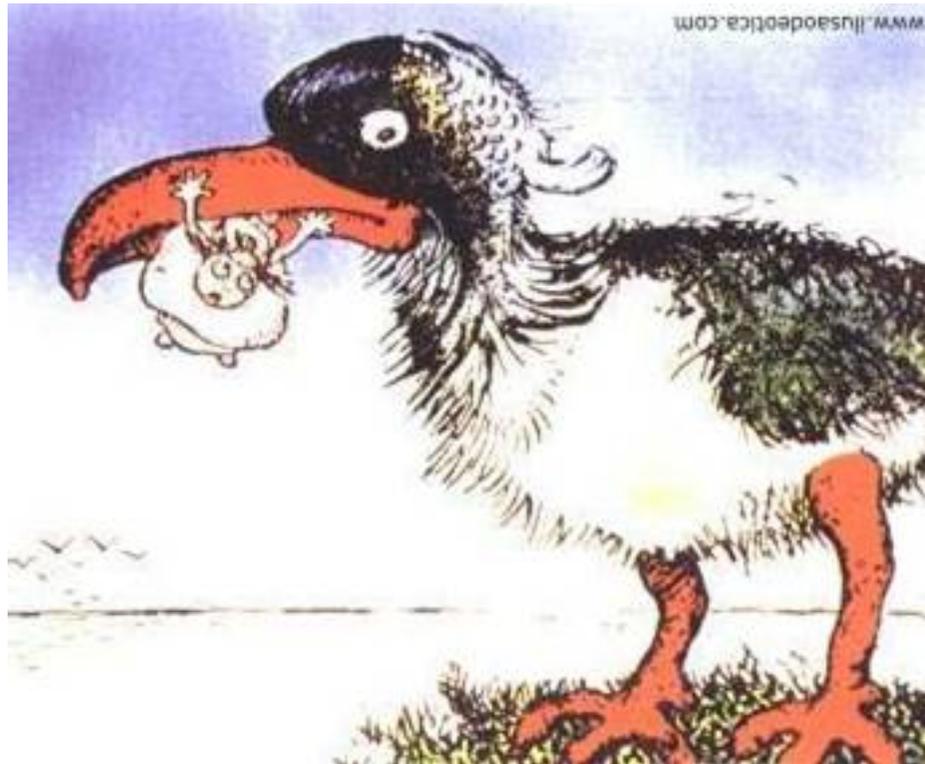


Hombre saliendo  
del agua...

Peter Newell:  
*“Topsys and turvys”*



... o ahogándose.



**Gustave Verbeek (1867-1937)**  
*“A fish story”*

El mayor de los pájaros la coge por su vestido...

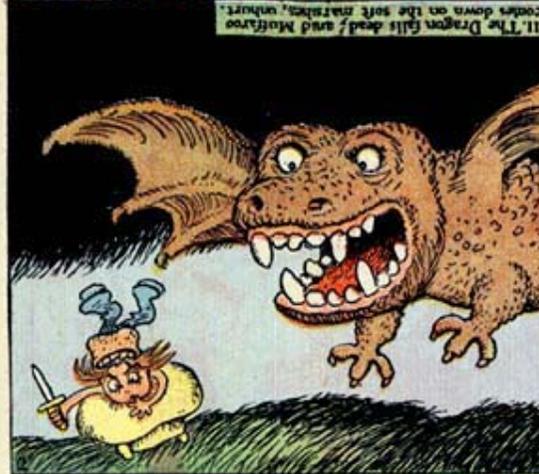


... Justo cuando llega cerca de la isla, otro pez le ataca, golpeándole furiosamente con su cola...

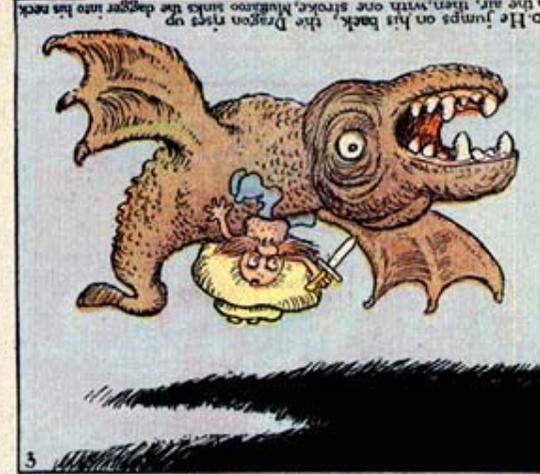
# THE UPSIDE-DOWNS OF LITTLE LADY LOVEKINS AND OLD MAN MUFFAROO THE THRILLING ADVENTURE OF THE DRAGON



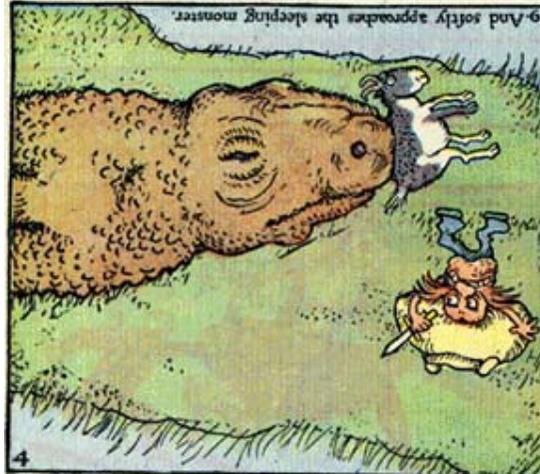
Lovekins and Muffaroo are startled by a loud roar and a sound of whirring wings.



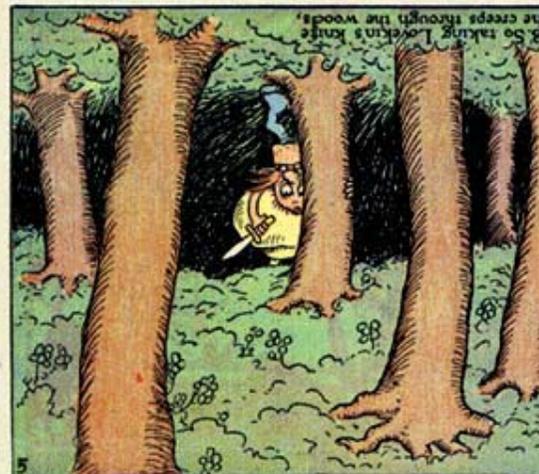
It is a terrible Dragon that comes swooping down on them. Muffaroo escapes, but little Lady Lovekins gets caught.



She tries to stab the monster, but his scales are very hard, as he just flies along without feeling the knife at all. For two days and two nights they travel thus, until at last the Dragon begins to feel hungry!



So he kills some goats that are grazing in a field, and eats them, watching Lovekins all the while. But he eats too much and with one goat still in his mouth he falls asleep.



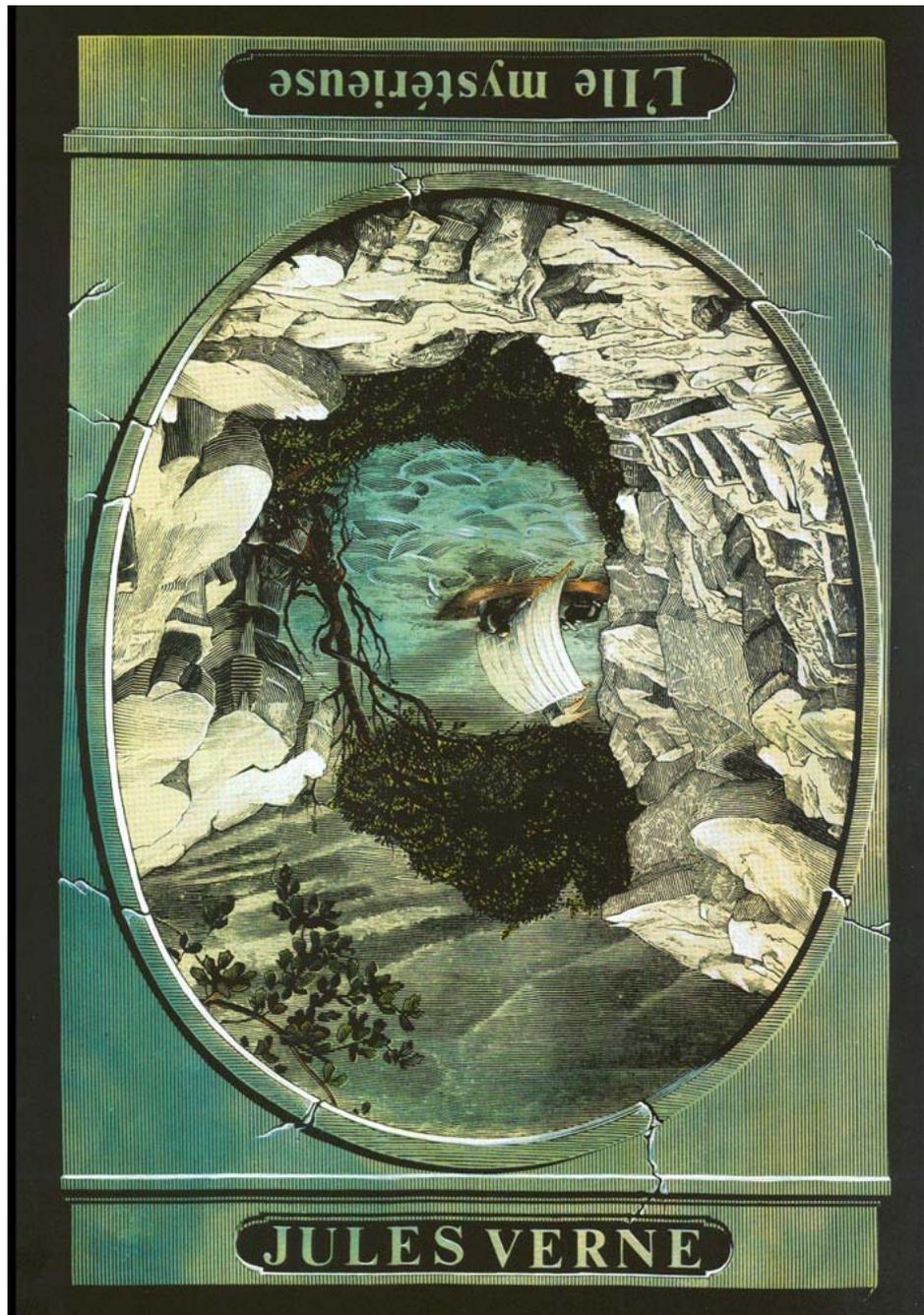
Then Lovekins steals quietly away and hides herself in some woods. Suddenly she hears something tramping over the leaves toward her.



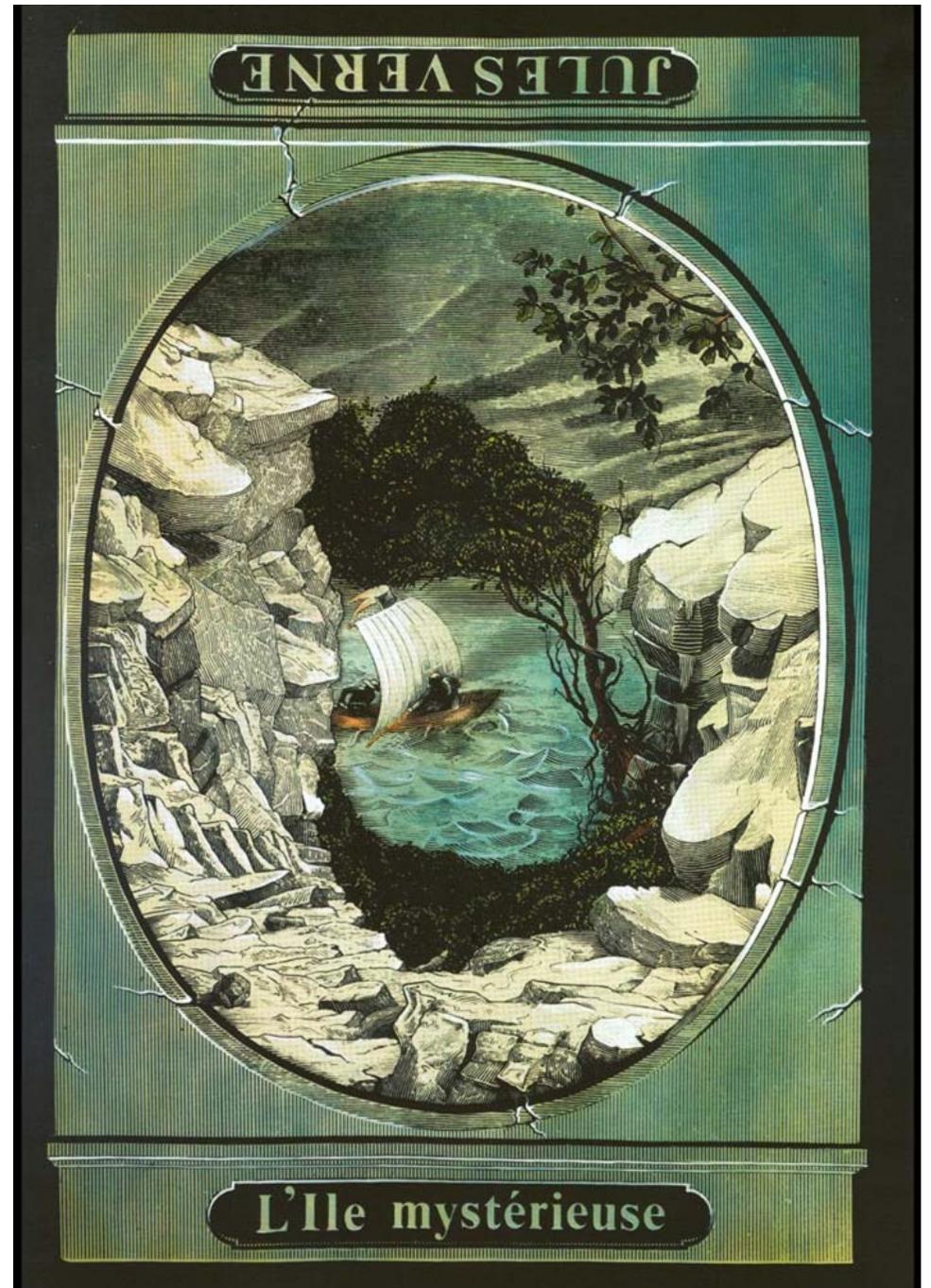
It turns out to be Old Man Muffaroo who has been following along the ground in the direction taken by the Dragon. Lovekins is greatly surprised to see him taken by the

Gustave Verbeck *Little lady Lovekins and Old man Muffaroo:* the Thrilling Adventure of the Dragon

<http://www.lambiek.net/verbeck.htm>



Itsván Orosz





**Rex  
Whistler  
(1905-1944)**  
*¿Sherlock Holmes o  
Robin Hood?*



<http://wwar.com/masters/w/whistler-rex.html>

**Rex Whistler**  
***¿Sherezade o el sultán?***



<http://wwar.com/masters/w/whistler-rex.html>

# La paradoja de Condorcet

Tres votantes  $V_1$ ,  $V_2$  y  $V_3$  eligen entre tres alternativas **A** (Alicia), **B** (Benito), **C** (Cecilia), como sigue:

$$V_1 = \{ \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \}, V_2 = \{ \mathbf{C}, \mathbf{A}, \mathbf{B} \}, V_3 = \{ \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{A} \}$$

**A** es preferida a **B** por dos a uno, **B** preferido a **C** por dos a uno y **C** a **A** por dos a uno también.

Una simple comprobación por pares no determina una alternativa preferida entre las tres. Se trata de una situación de *ausencia de ganador o paradoja de Condorcet*, al existir una *mayoría cíclica*.

El procedimiento de elección más usual es la regla de la **mayoría simple**, donde cada votante elige un candidato, y el que reciba más de la mitad de los votos es el ganador.

Esta regla es válida cuando sólo se tienen dos candidatos, ya que gana el que tiene más votos.

Cuando hay más de dos, puede ser que el candidato con mayor número de votos no tenga la mayoría absoluta de todos los votos emitidos.

La solución más frecuente es recurrir a la regla de la **pluralidad o mayoría relativa**, por la que se elige al candidato que queda situado en primer lugar por el mayor número de votantes.

Otra solución es aplicar el ***criterio de Condorcet*** o de comparación por parejas, por el que se elige el candidato que derrota a todos los demás en elecciones entre pares de candidatos, usando la regla de mayoría. Por este método se puede producir una relación no transitiva, la paradoja de Condorcet.



La molestia generada por la posibilidad de mayorías cíclicas está directamente relacionada con la probabilidad de una tal ocurrencia: se puede probar que la probabilidad de una mayoría cíclica se incrementa cuando el número de opciones aumenta, y decrece cuando el número de votantes aumenta.

# Paradojas en arquitectura



## *Nationale Nederlanden Building*

**Se conoce populamente  
como “Ginger & Fred”.**

**Es uno de los edificios más  
sorprendentes en Praga.  
Se construyó entre 1992 y  
1995, por los arquitectos V.  
Milunic y F. Gehry.**



***Crooked House*** (2004), es una insólita atracción turística situada en el centro de compras de Rezydent en Sopot, Polonia. Diseñada por la firma arquitectónica Szotynscy y Zaleski.



**135 Degree Angle:** tiene un tejado rosado y toda una distorsión visual que puede confundir a los viajeros. Restaurante Masaka, Japón.

## ***Saber sin estudiar***

***Admiróse un portugués  
de ver que en su tierna infancia  
todos los niños en Francia  
supiesen hablar francés.***

***«Arte diabólica es»,  
dijo, torciendo el mostacho,  
«que para hablar en gabacho  
un fidalgo en Portugal  
llega a viejo, y lo habla mal;  
y aquí lo parla un muchacho».***

**Nicolás Fernández de Moratín (1737-1780)**

**GRACIAS**

**Benjamín Pereira Gamba**

***¿Crees en brujas, Garai?  
Le dije a mi viejo criado.  
No señor, porque es pecado;  
Pero haberlas sí las hay.***