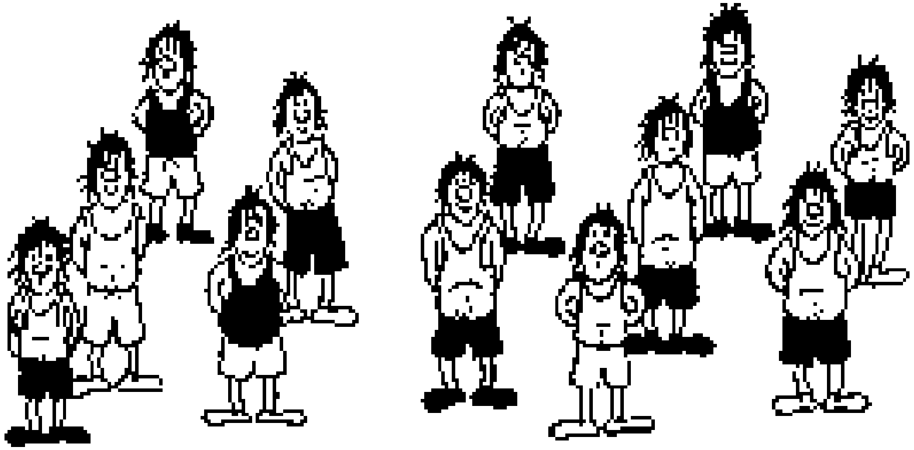
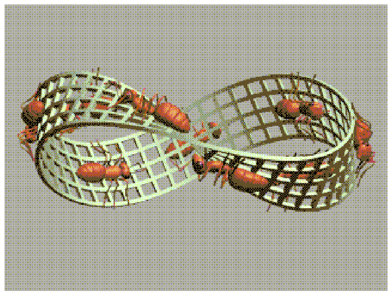
Matemáticas a través de la paradoja

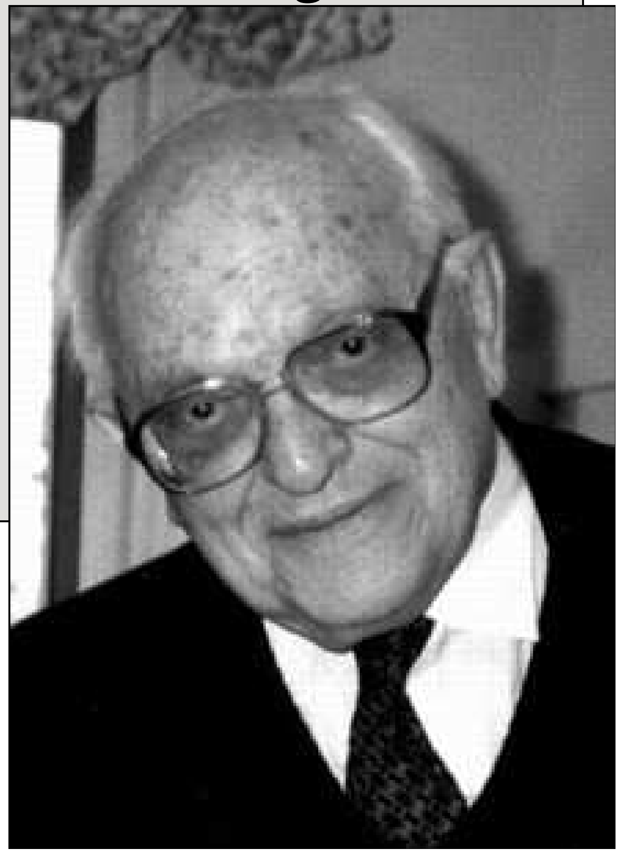
Marta Macho Stadler, UPV/EHU





Castro Urdiales, 20 de junio de 2012

Las paradojas han tenido un papel crucial en la historia intelectual, a menudo presentando los desarrollos revolucionarios de las ciencias, de las matemáticas y de la lógica. Cada vez que, en cualquier disciplina, aparece un problema que no puede resolverse en el interior del cuadro conceptual susceptible de aplicarse, experimentamos un choque, choque que puede constreñirnos a rechazar la antigua estructura inadecuada y a adoptar una nueva.
Es a este proceso de mutación intelectual al que se le debe el nacimiento de la mayor parte de las ideas matemáticas y científicas.



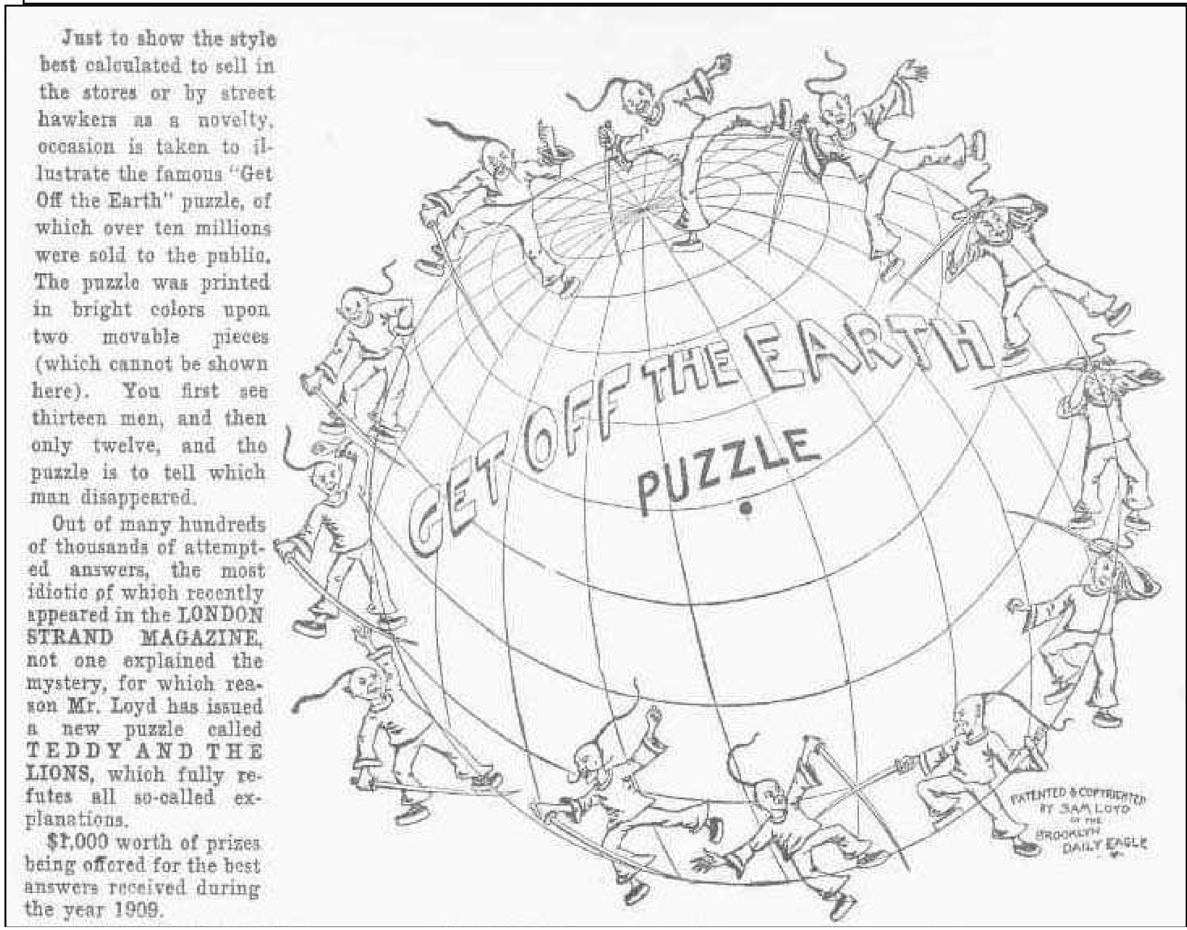
Escapar a la paradoja, **1967**
Anatol Rapoport (1911-2007)

Plan de la charla

1. Paradojas de la geometría: magia e ilusión (desapariciones y anamorfosis)
2. Paradojas lógicas: de barberos y otros asuntos
3. Paradojas del infinito: el hotel infinito de Hilbert
4. Paradojas de la vaguedad: el eterno problema del tamaño
5. Paradojas de la predicción: ¡Me libro seguro!
6. Paradojas de la confirmación: ¿son todos los cuervos negros?
7. Paradojas de la probabilidad: ¿me compensa jugar?
8. Paradojas topológicas: ¡qué desorientado vas!

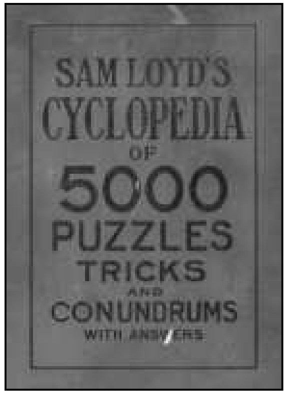
Desapariciones geométricas

Rompecabezas *Abandone la Tierra*, *1914*
Sam Loyd (1841-1911)


Just to show the style best calculated to sell in the stores or by street hawkers as a novelty, occasion is taken to illustrate the famous "Get Off the Earth" puzzle, of which over ten millions were sold to the public. The puzzle was printed in bright colors upon two movable pieces (which cannot be shown here). You first see thirteen men, and then only twelve, and the puzzle is to tell which man disappeared.

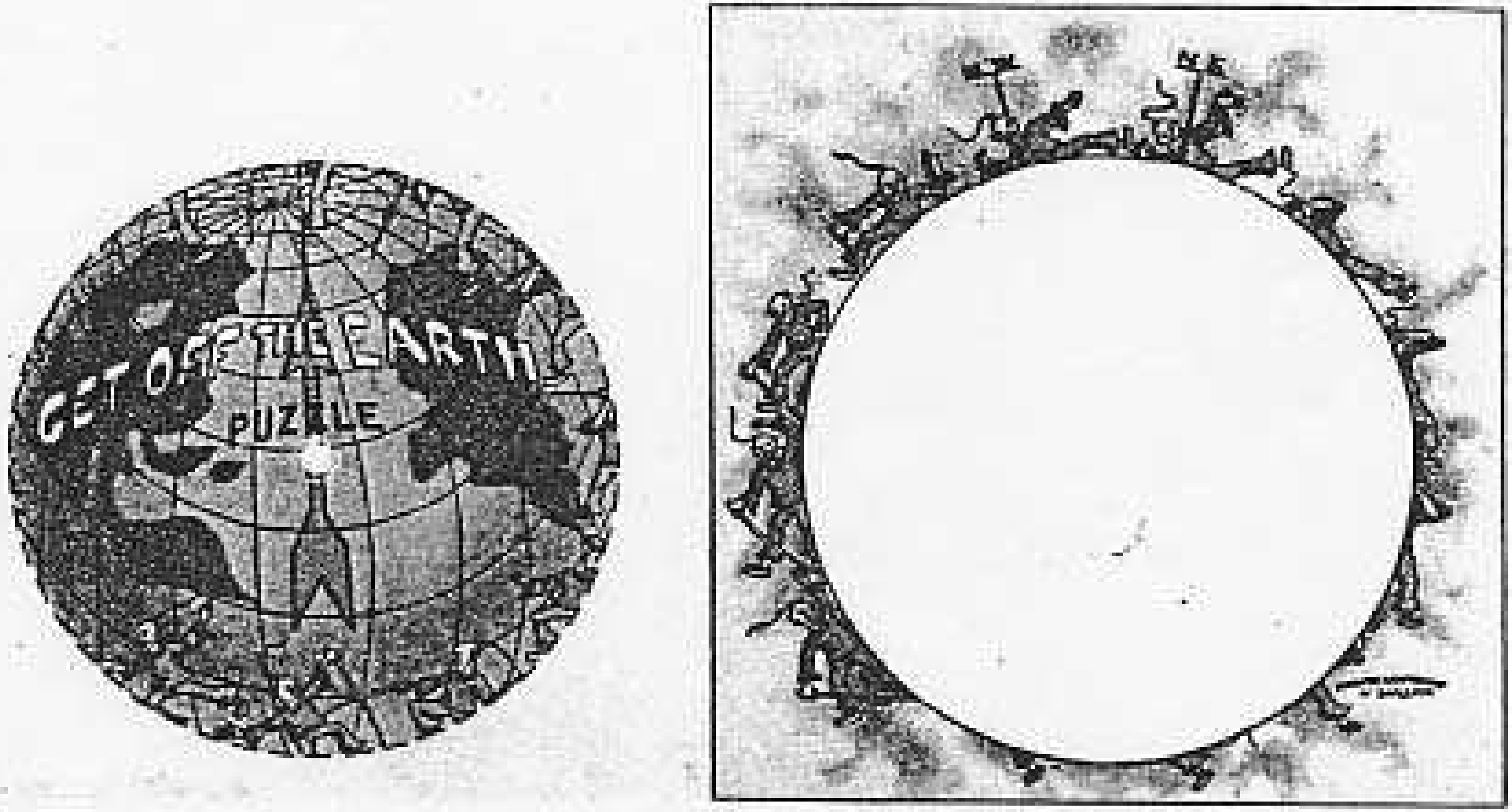
Out of many hundreds of thousands of attempted answers, the most idiotic of which recently appeared in the LONDON STRAND MAGAZINE, not one explained the mystery, for which reason Mr. Loyd has issued a new puzzle called TEDDY AND THE LIONS, which fully refutes all so-called explanations.

$1,000 worth of prizes being offered for the best answers received during the year 1909.

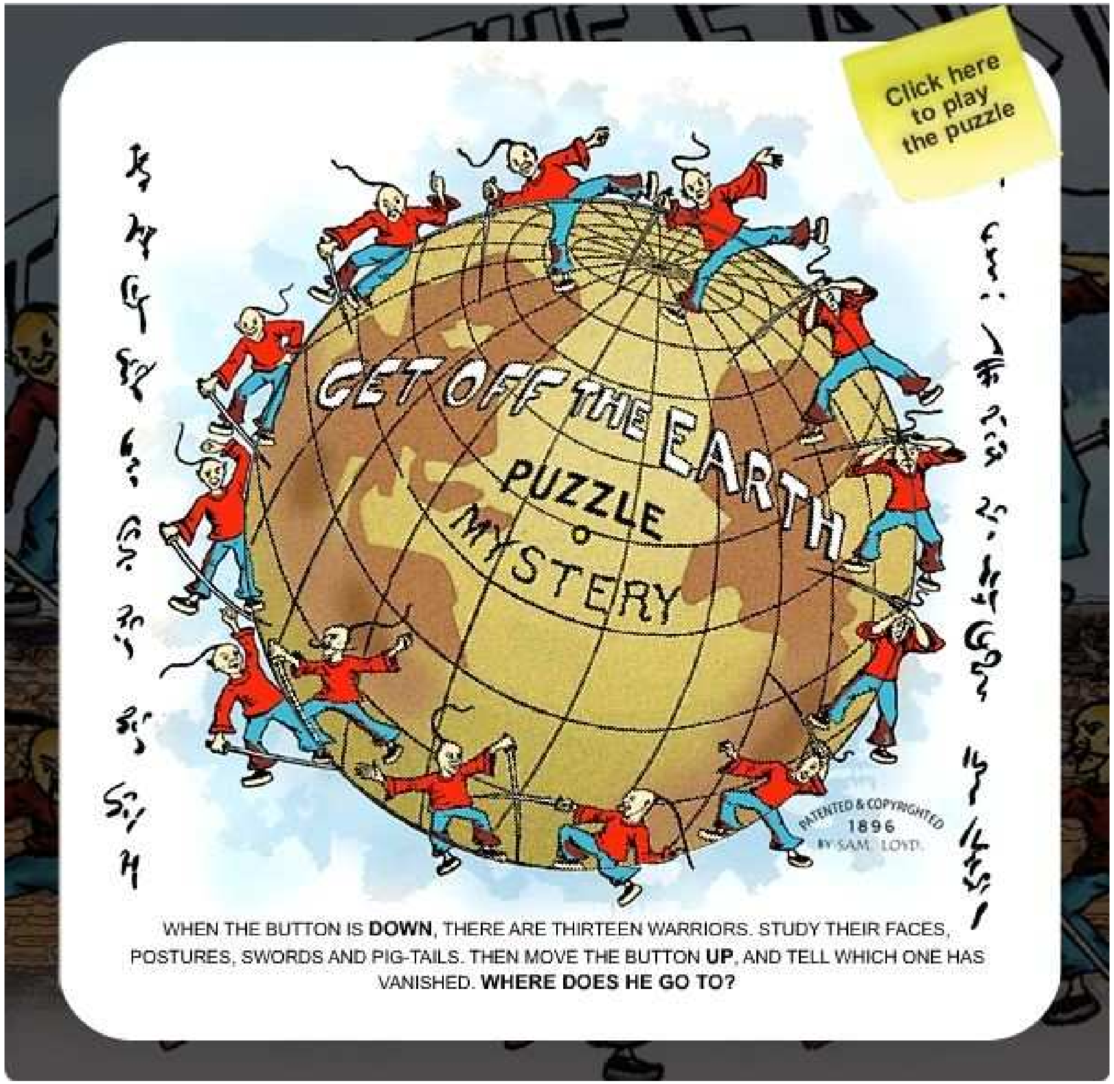


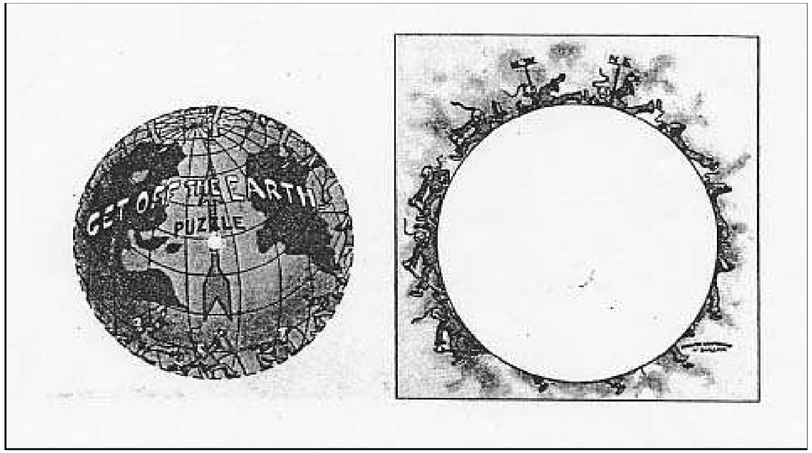
Rompecabezas *“Abandone la Tierra”, Sam Loyd*

http://www.mathpuzzle.com/loydl



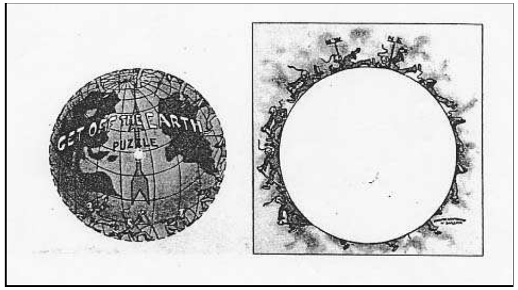
http://www.samuelloyd.com/gote/index.html

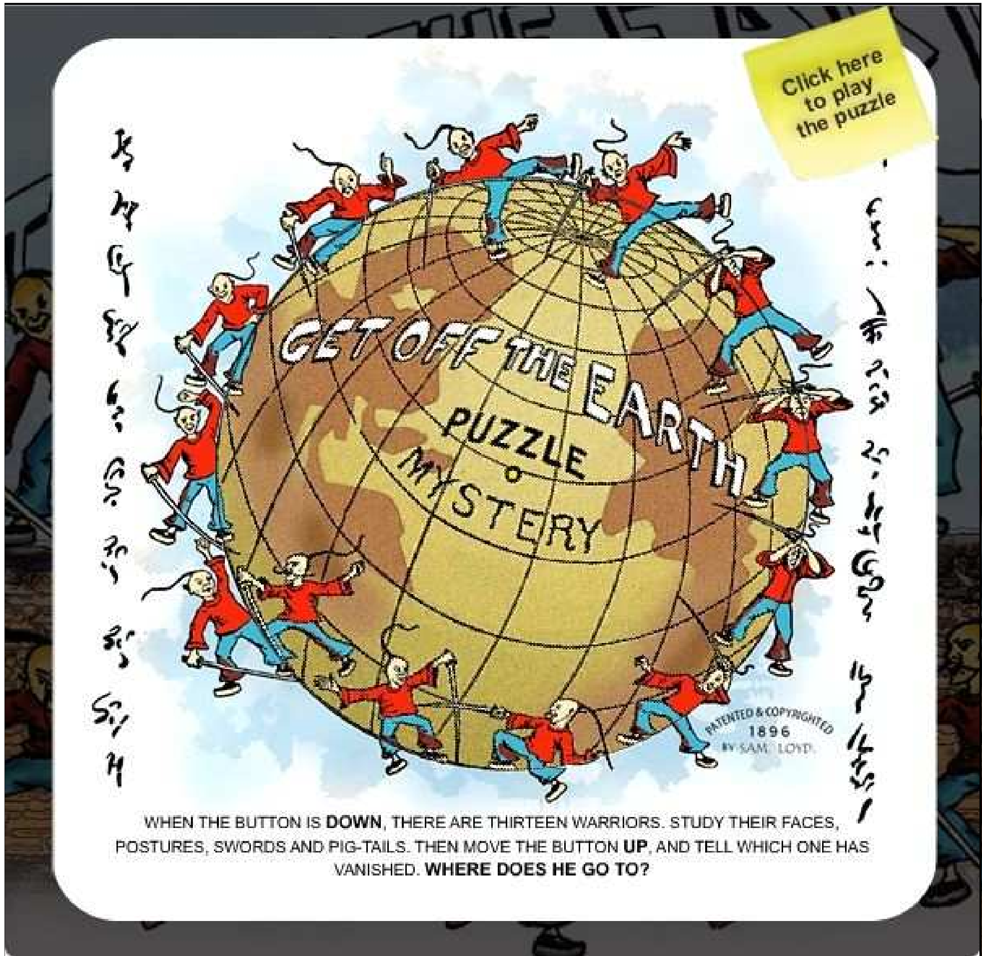


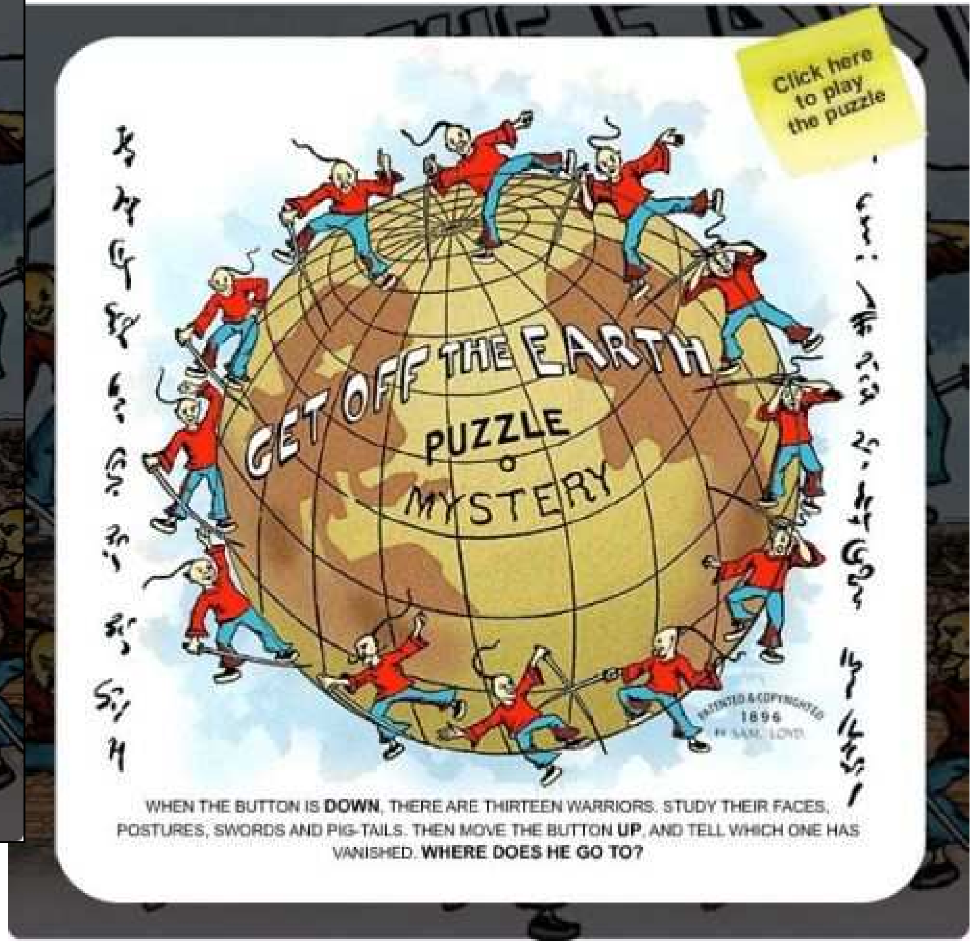


13 guerreros al norte…

http://www.samuelloyd.com/gote/index.html



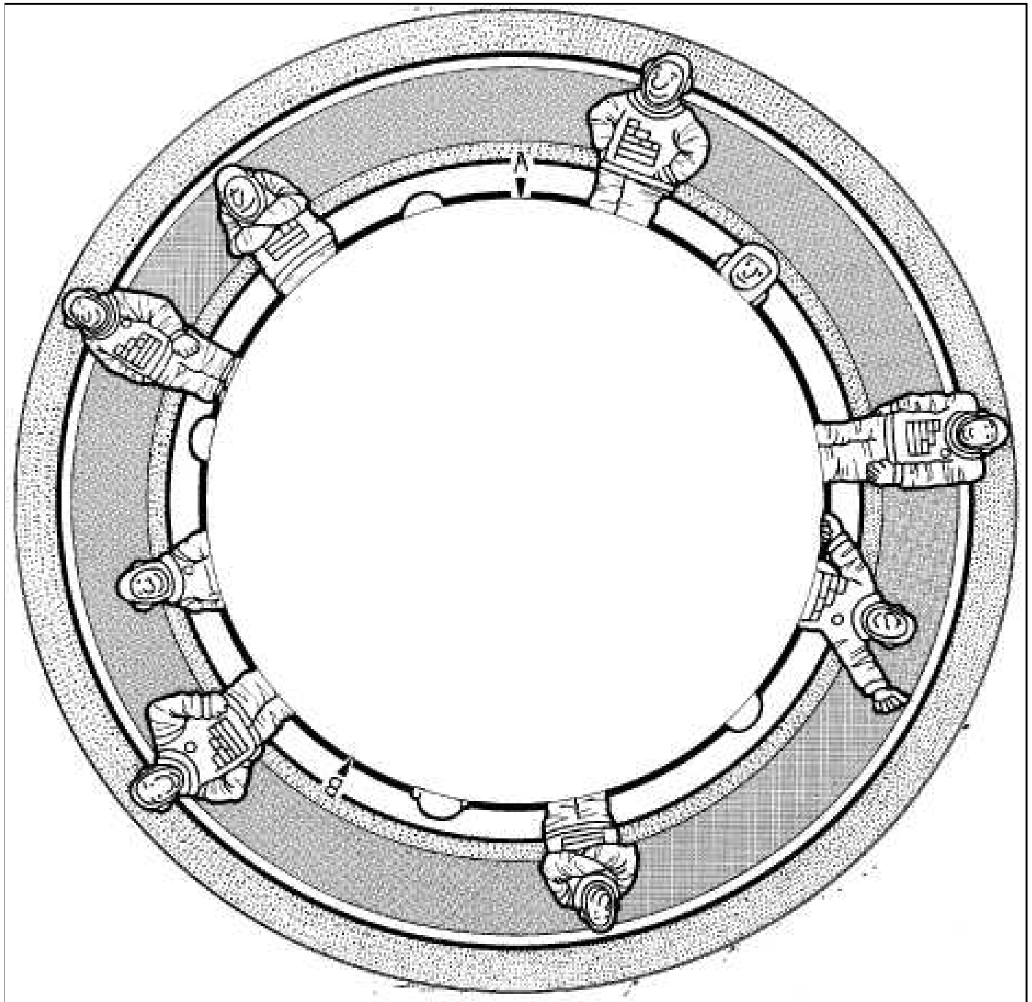


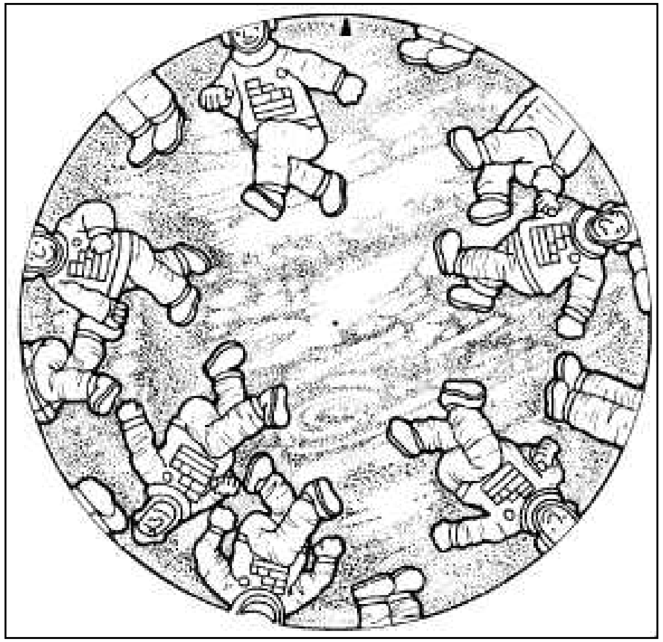


13 guerreros al norte… y 12 guerreros al noroeste

http://www.aimsedu.org/Puzzle/LostInSpace/space.html

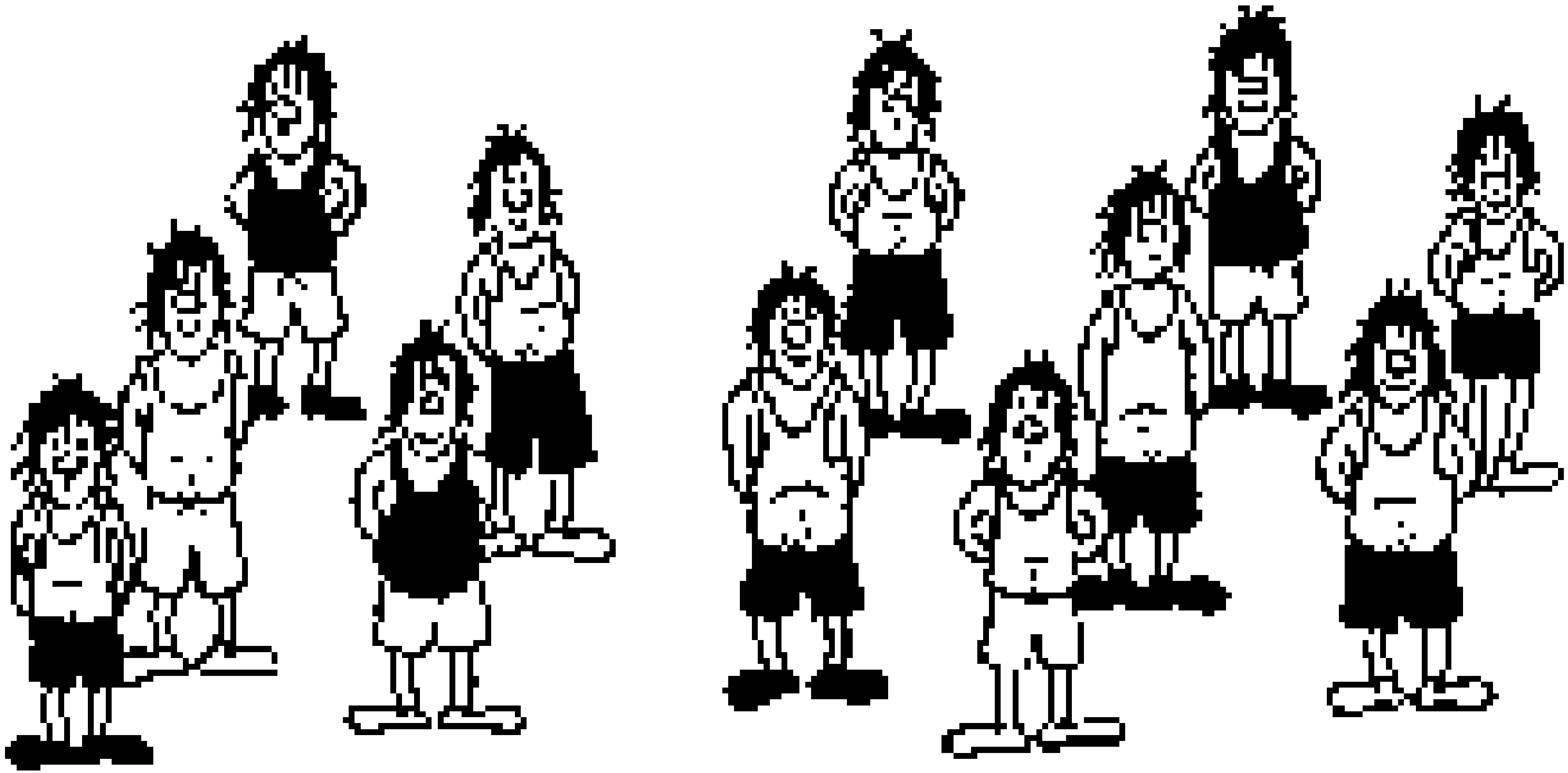
LOST IN SPACE

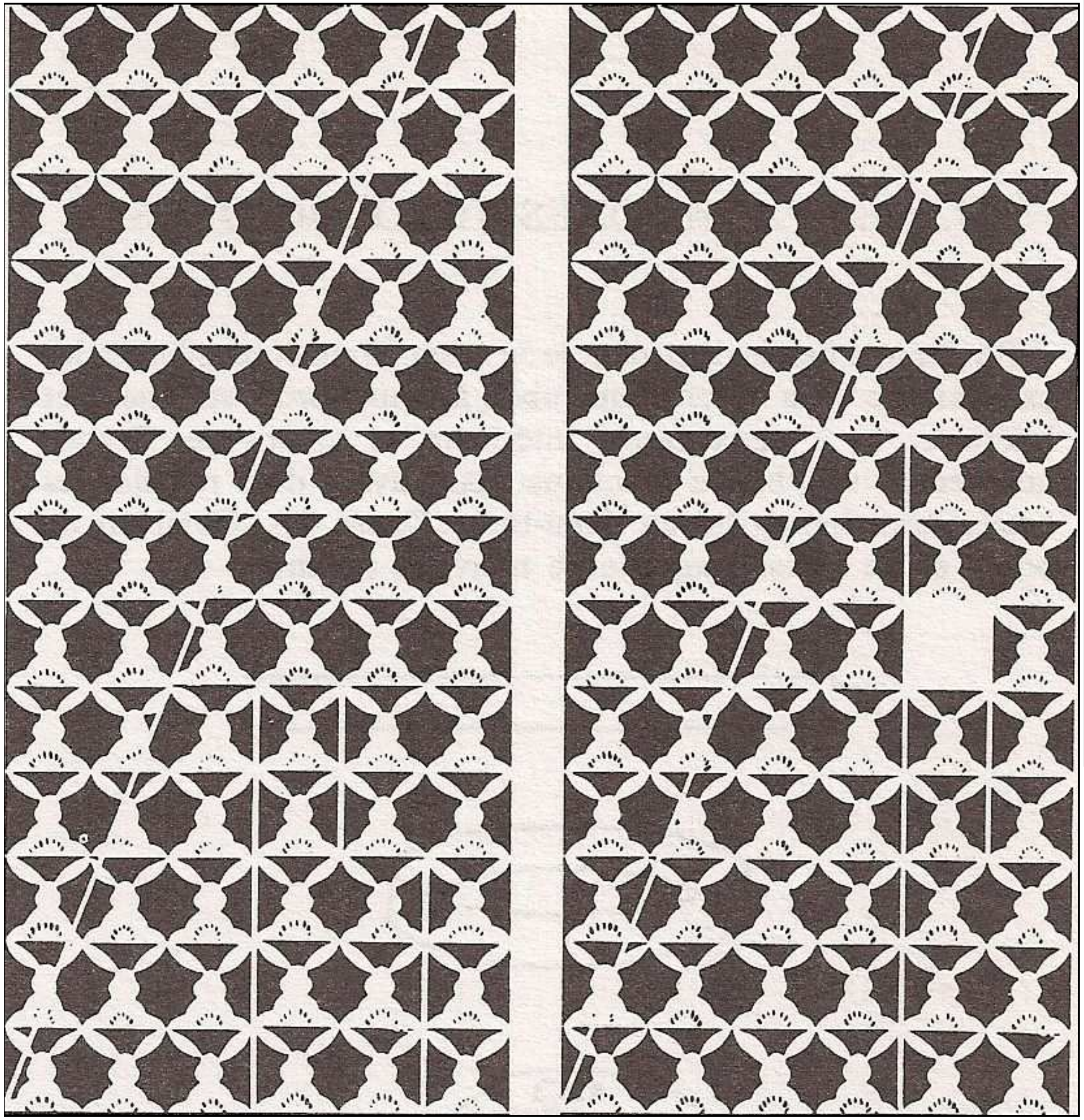




En posición A, 15 astronautas rodean el planeta … cuando se rota el disco de modo que la flecha apunte a B, quedan sólo 14 astronautas …

¿Son 12 deportistas…? ¿O serán 13?





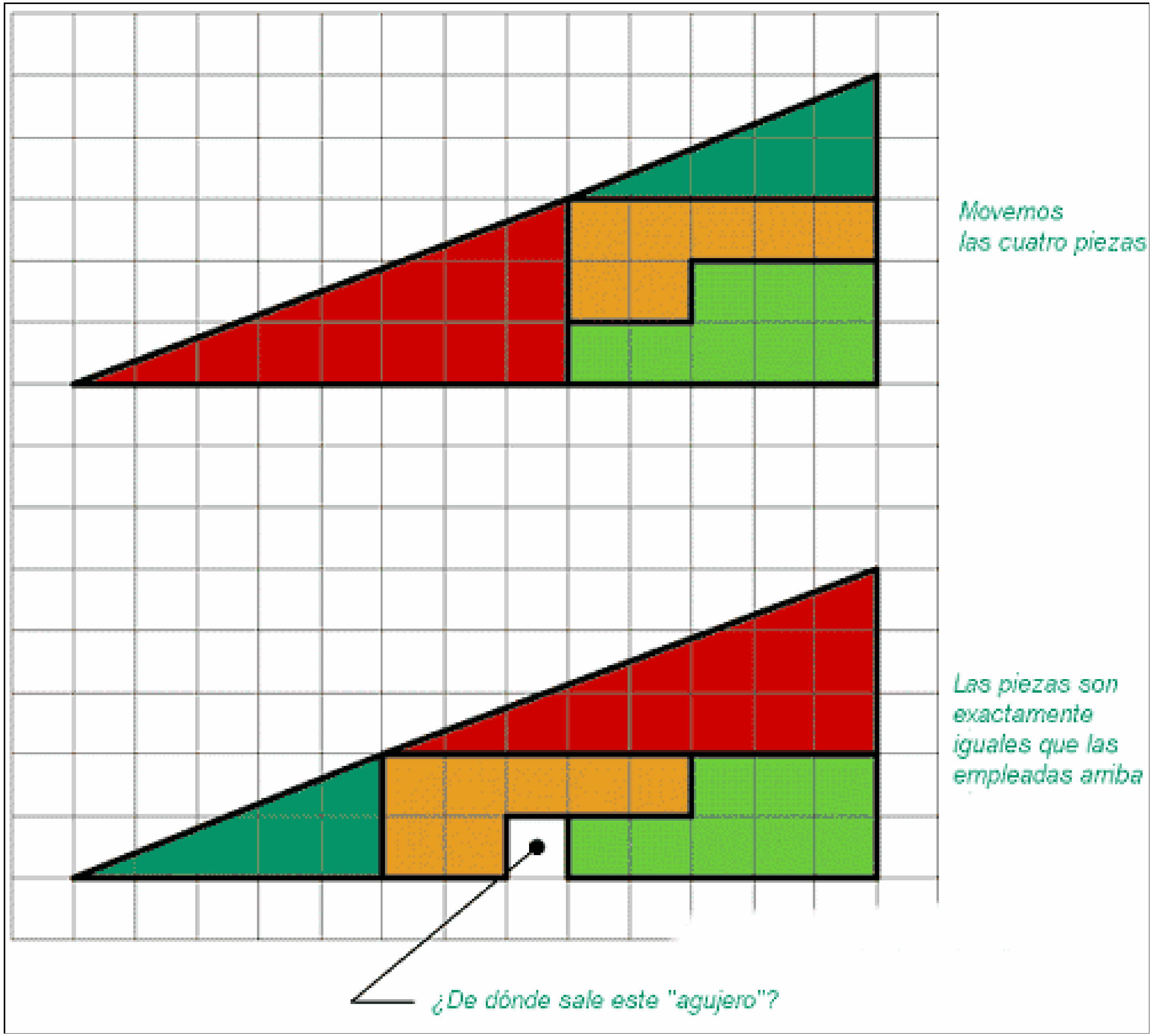
Paradoja de Curry

El primer rectángulo tiene 6x13=78 conejos.
Tras cortar y recolocar quedan ¡77 conejos!

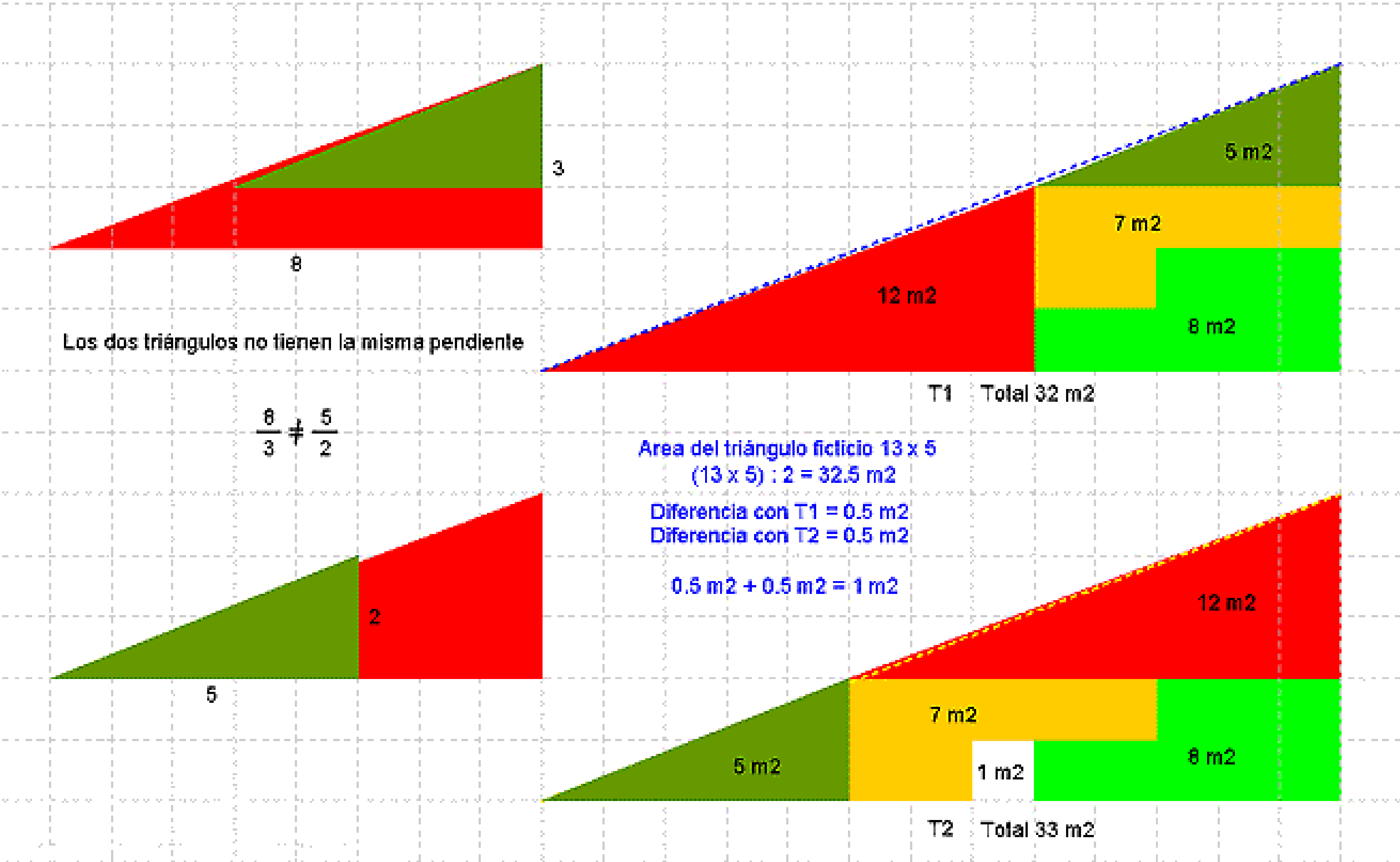
¿Dónde ha quedado el conejo que falta?

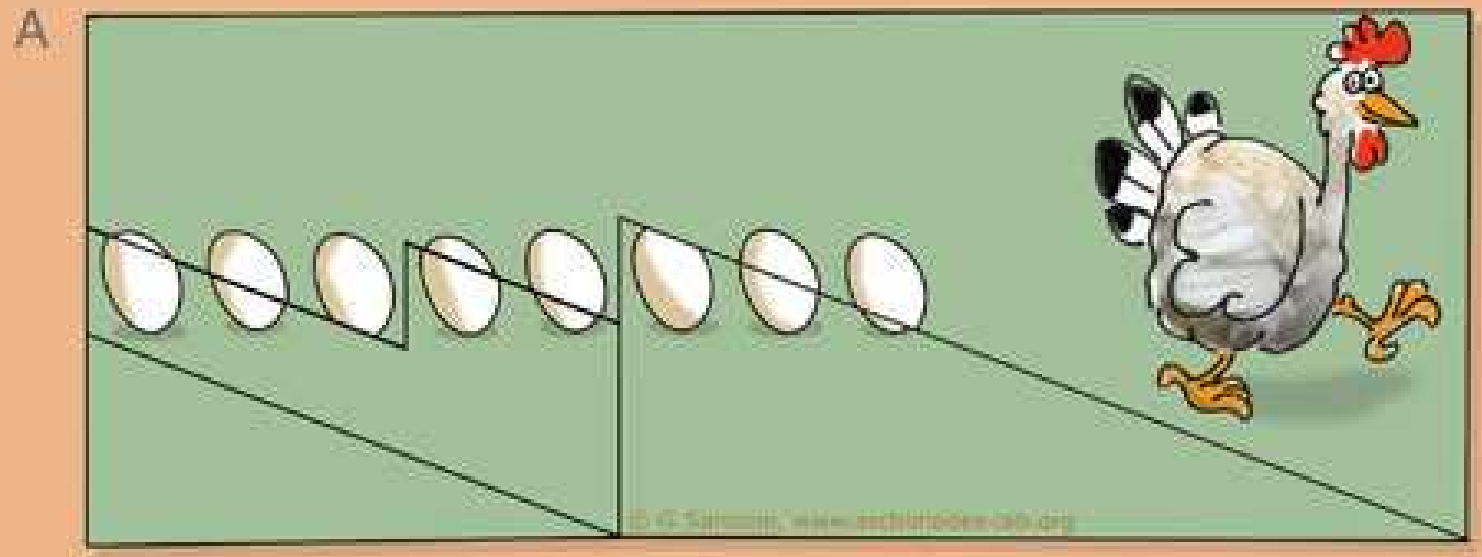
Una paradoja de Hooper

La aparente pérdida de superficie es debida al reajuste de los trozos.

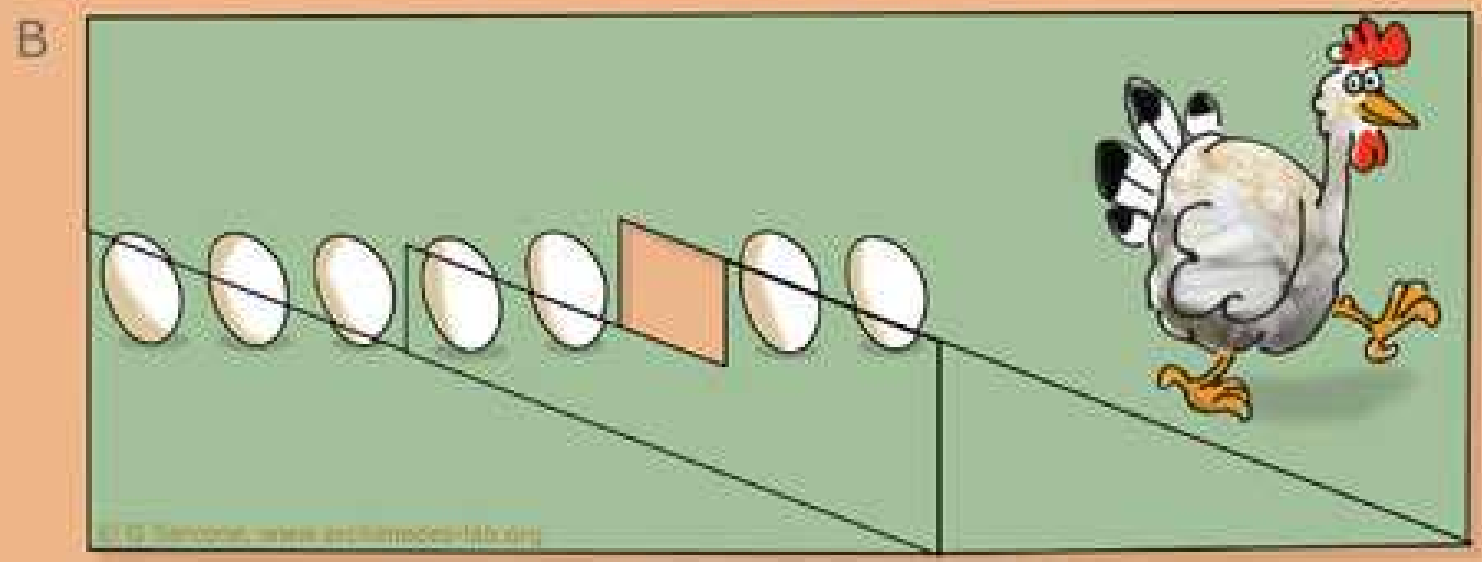


EL TRUCO ESTA EN EL BORDE NEGRO QUE OCULTA QUE LOS DOS TRIANGULOS NO SON PROPORCIONALES
LOS DOS TRIANGULOS NO TIENEN LA MISMA PENDIENTE

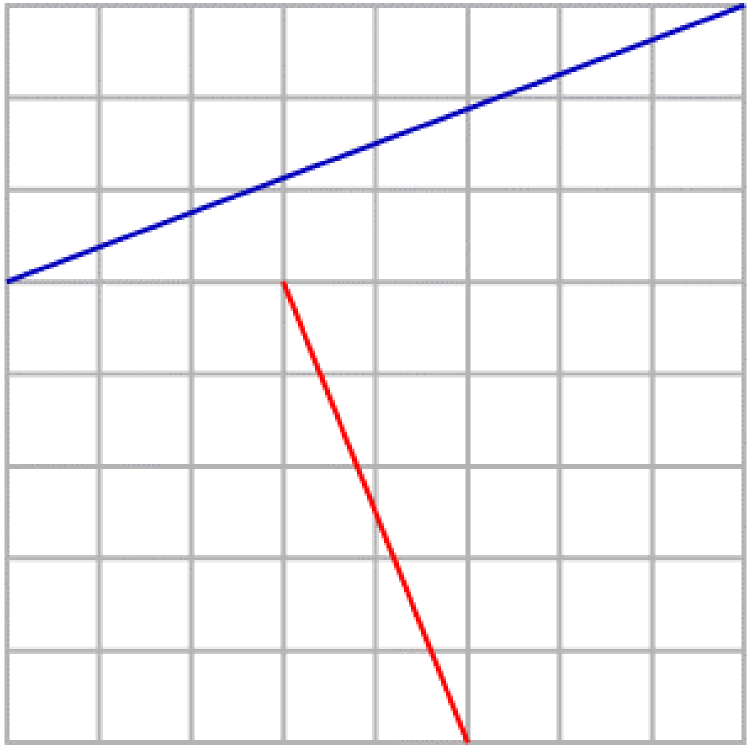




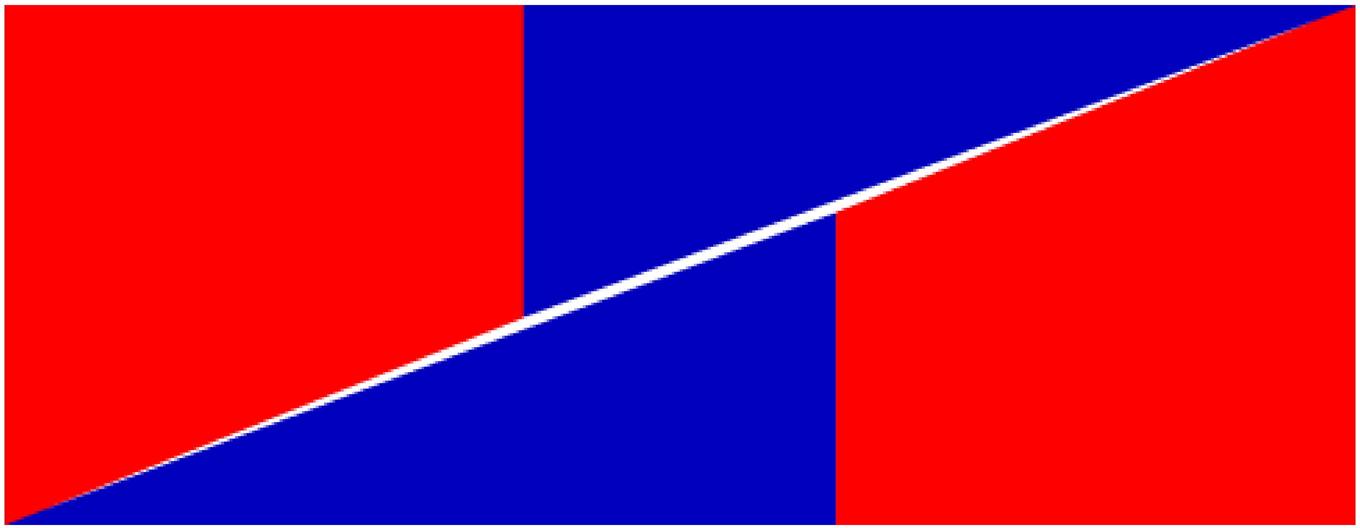
By permuting the triangular pieces an egg disappears. How does it happen?



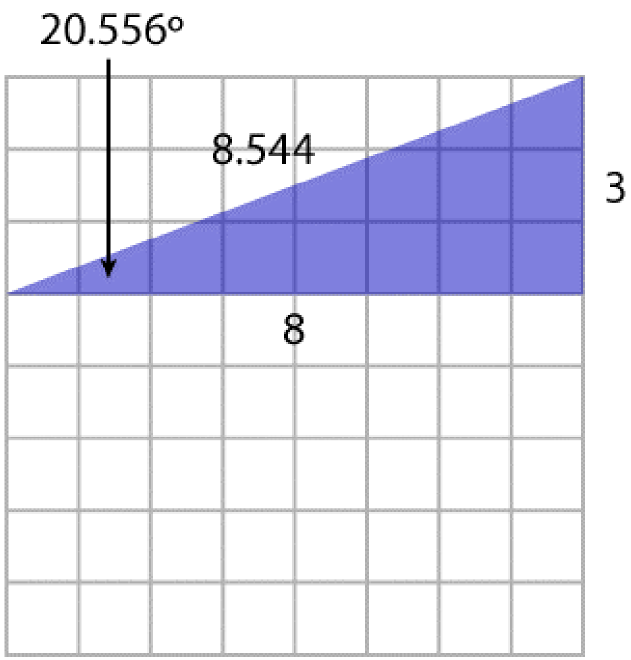
$$64 = 65\ ?$$



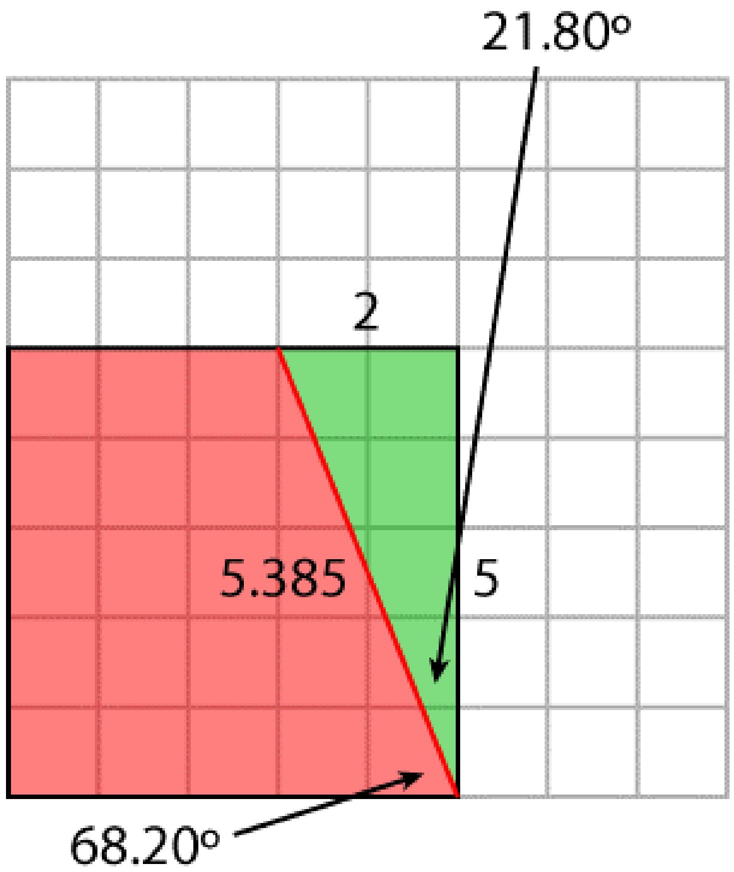
Los segmentos azules generan dos triángulos y los rojos dos trapezoides, se reajustan…



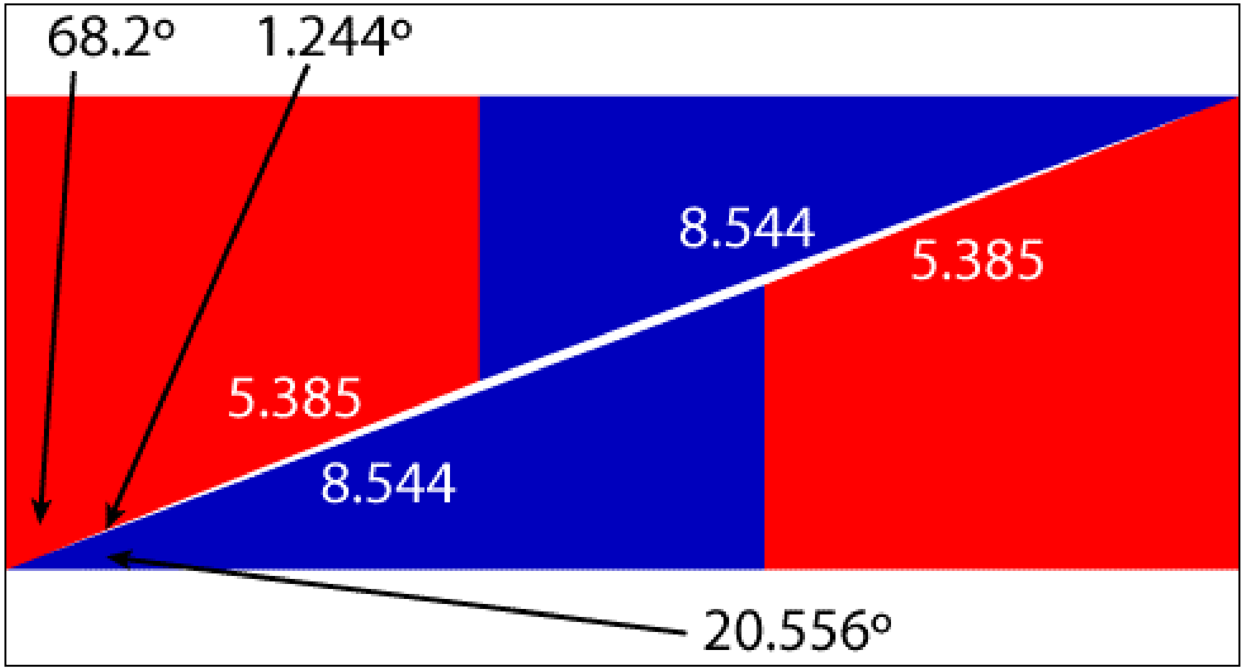
¿Ves la parte blanca? Es un paralelogramo con área 1.

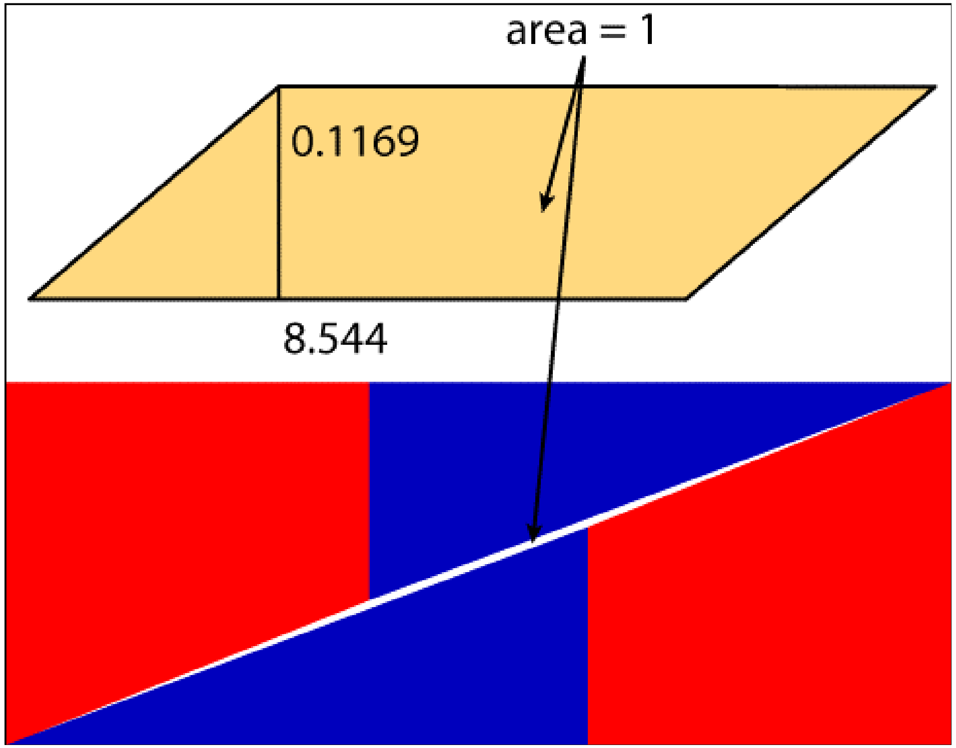


$3^2 + 8^2 = h^2$, así la hipotenusa es la raíz cuadrada de 73 y el ángulo menor 20.556°



$2^2 + 5^2 = h^2$, así la hipotenusa es la raíz cuadrada de 29 y el ángulo menor es de 21.80°.
El triángulo verde es el que se inserta en el cuadrado 5 x 5 para pegarse al trapezoide rojo, cuyo ángulo menor debería ser entonces de 90°- 21.80°= 68.20°.





El ángulo agudo del paralelogramo blanco es
90°- 68.2°- 20.556°= 1.244°.

Así, el área del paralelogramo blanco es:
8.544 x sen(1.244) x 5.385 =
0.9988…

Los Embajadores
(1533)

Holbein el joven (1497-1543)

National Gallery de Londres


Jean de Dinteville (1504-1555), embajador francés en Inglaterra.


Jean de Dinteville
(1504-1555),
smbajador francés
en Inglaterra.
Georges de Selve
(1508-1541) obispo
de Lavaur.


Jean de Dinteville (1504-1555), smbajador francés en Inglaterra.
Georges de Selve (1508-1541) obispo de Lavaur.
Relojes solares, un globo terráqueo, instrumentos de navegación y de astronomía, libro de aritmética,...

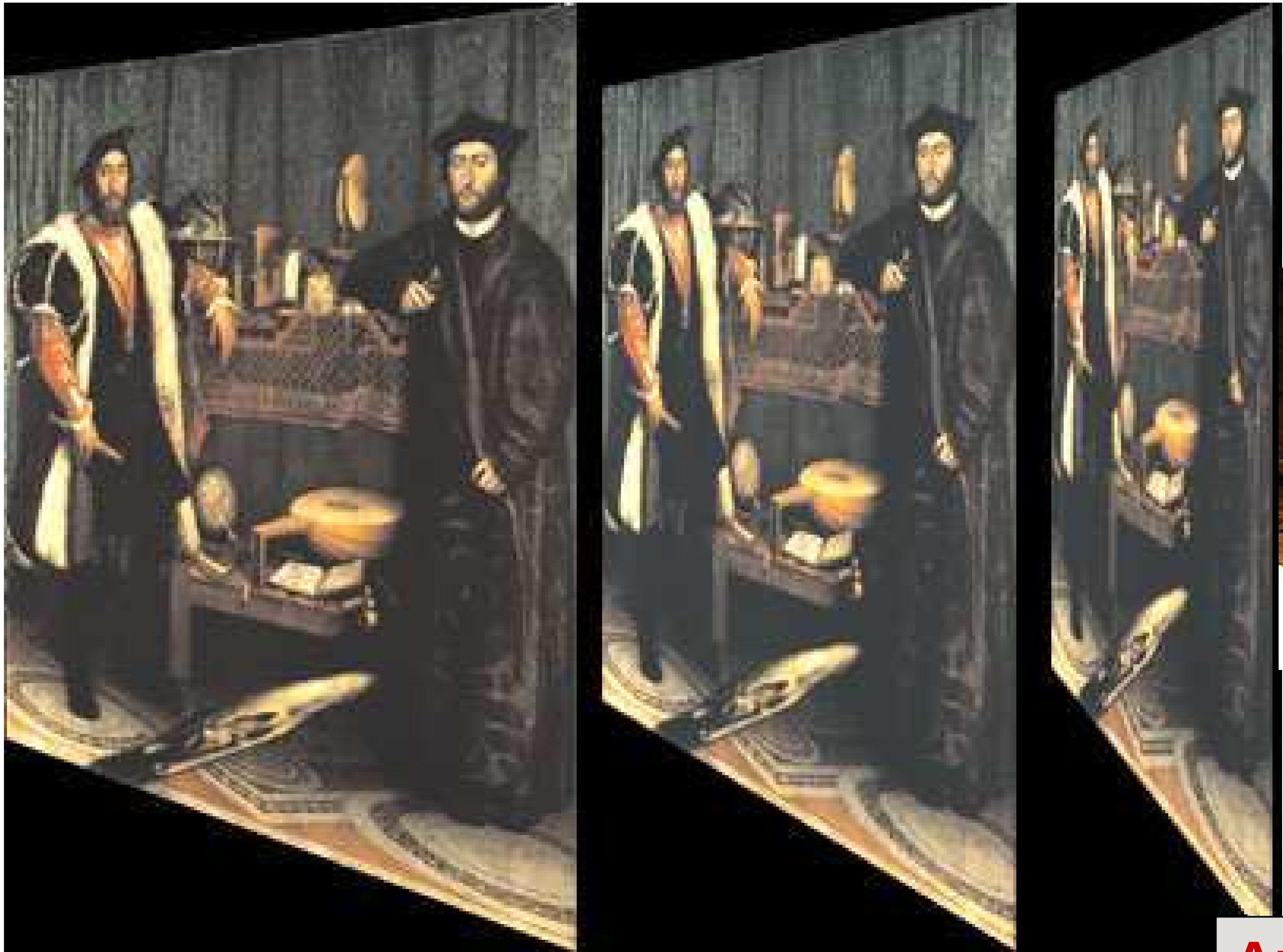

Jean de Dinteville
(1504-1555),
smbajador francés
en Inglaterra.
Georges de Selve
(1508-1541) obispo
de Lavaur.
¿Qué es
esto?
Relojes solares, un globo
terráqueo, instrumentos de
navegación y de astronomía,
libro de aritmética,...

Antes,... un poco de historia.
Fecha: 11 de abril de 1533.

Poco tiempo antes, Enrique VIII solicitaba al papa Clemente VII anular su matrimonio con Catalina de Aragón, ya que de su unión no había nacido ningún heredero varón. El papa no accede a este favor, lo que no impide al monarca desposar en secreto a Ana Bolena el 25 de enero de 1533.
A principios de abril, Thomas Cranmer, el arzobispo de Canterbury, anula el matrimonio con Catalina y declara a Ana Bolena Reina de Inglaterra.

El hecho no tiene precedentes, y se envía una embajada francesa para intentar una reconciliación con el papa: dos de estos embajadores están representados en el cuadro.

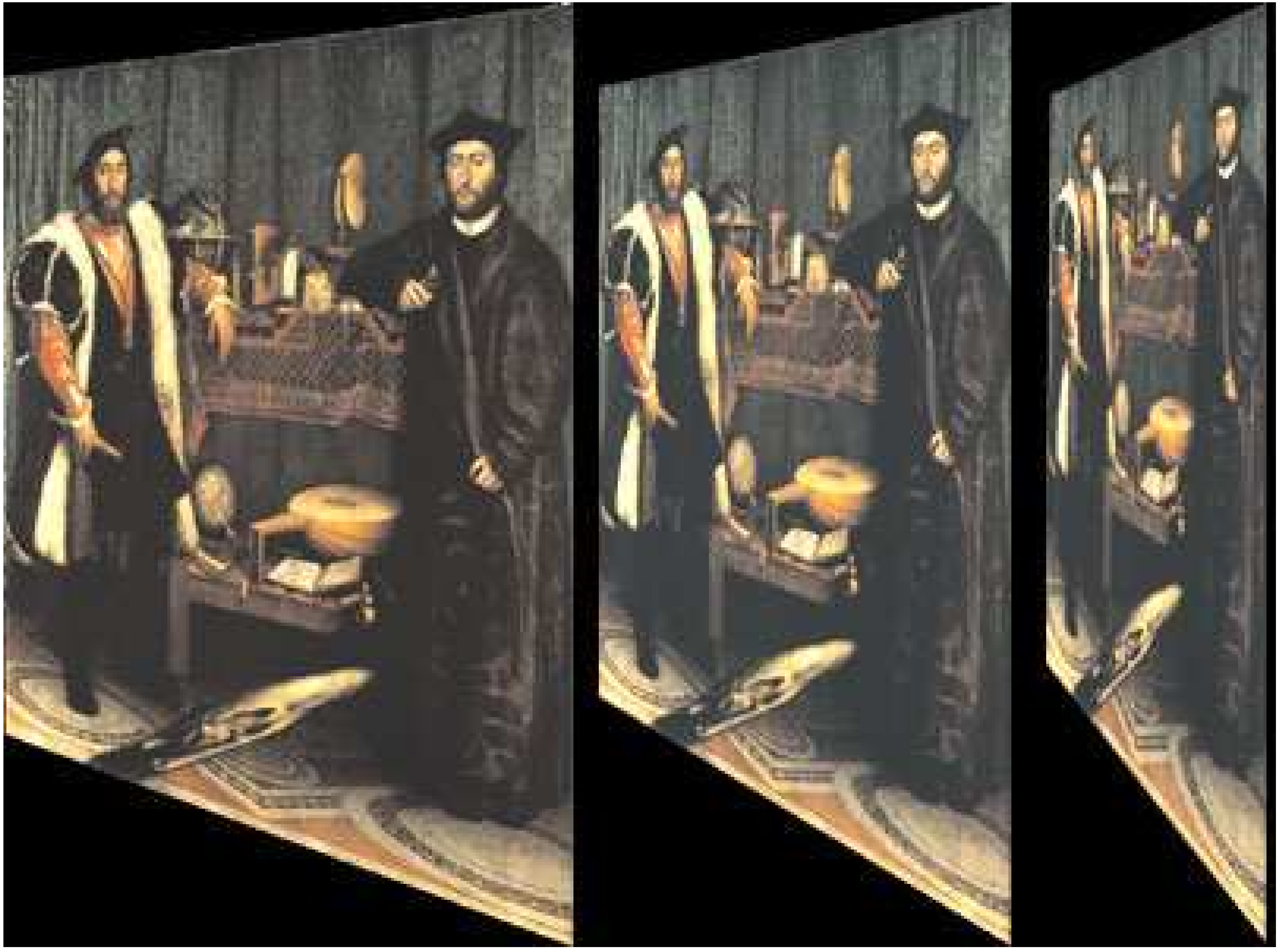
Y, al salir de la sala, al mirar el cuadro desde otro punto de vista, aparece…



Video

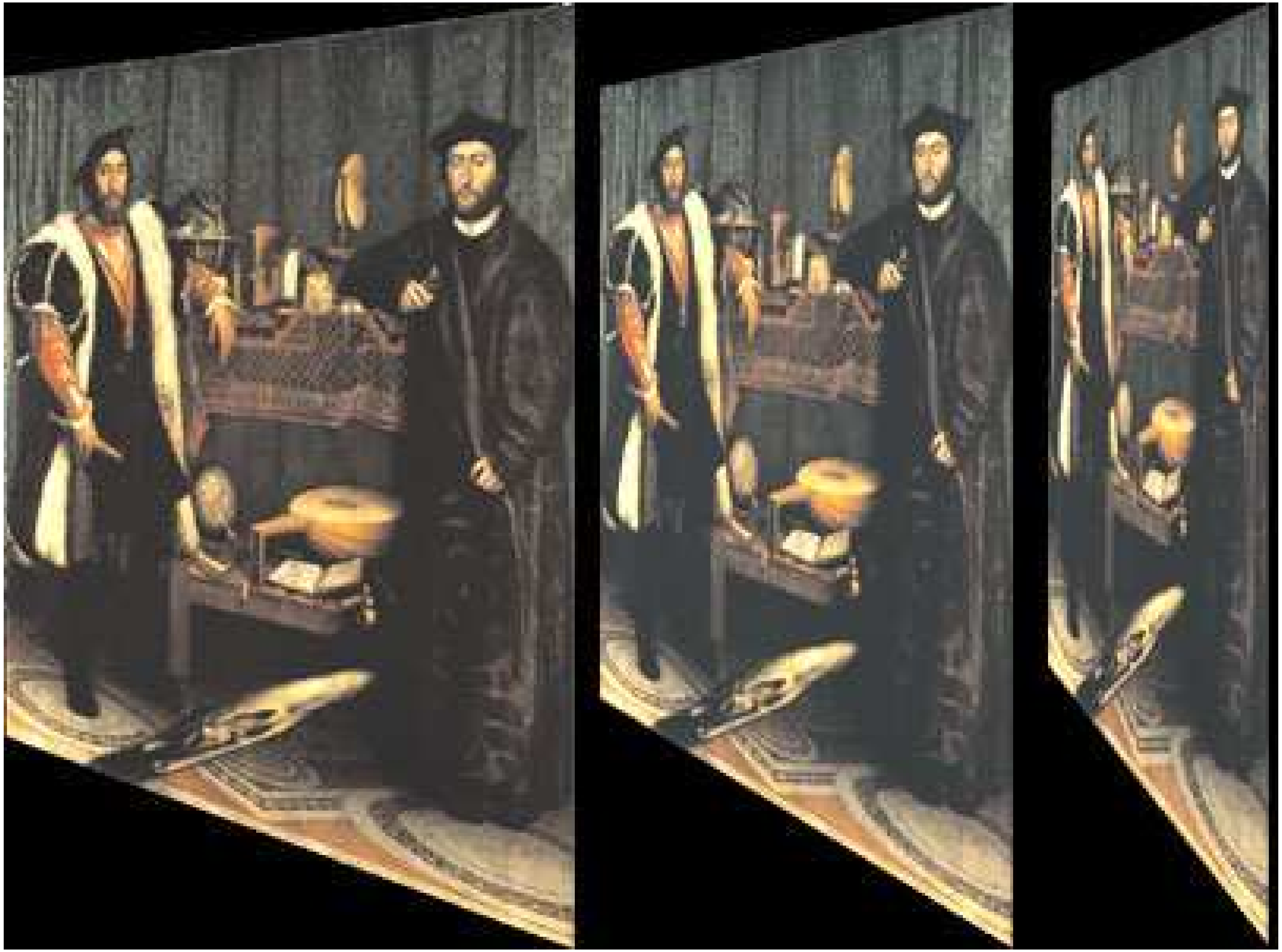
Anamorfosis...

¿Firma del pintor? HOLBEIN = (bein) hueso (hohl) hueco



¿Firma del pintor? HOLBEIN = (bein) hueso (hohl) hueco

¿Muerte de la dinastía (Los Tudor)?

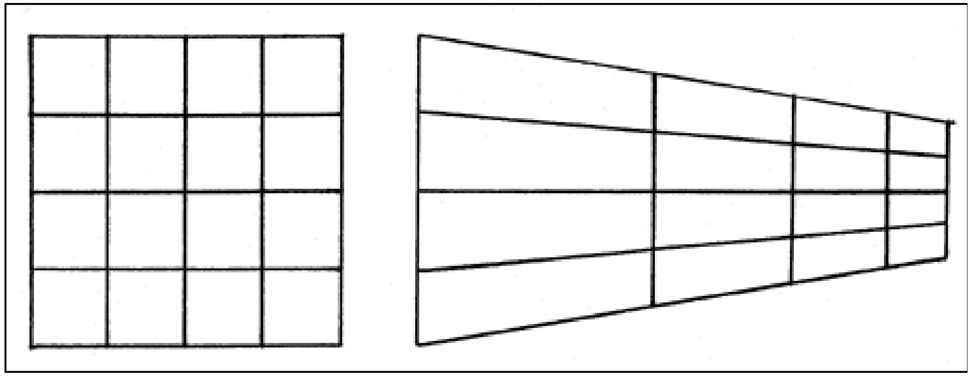


¿Qué es una anamorfosis?

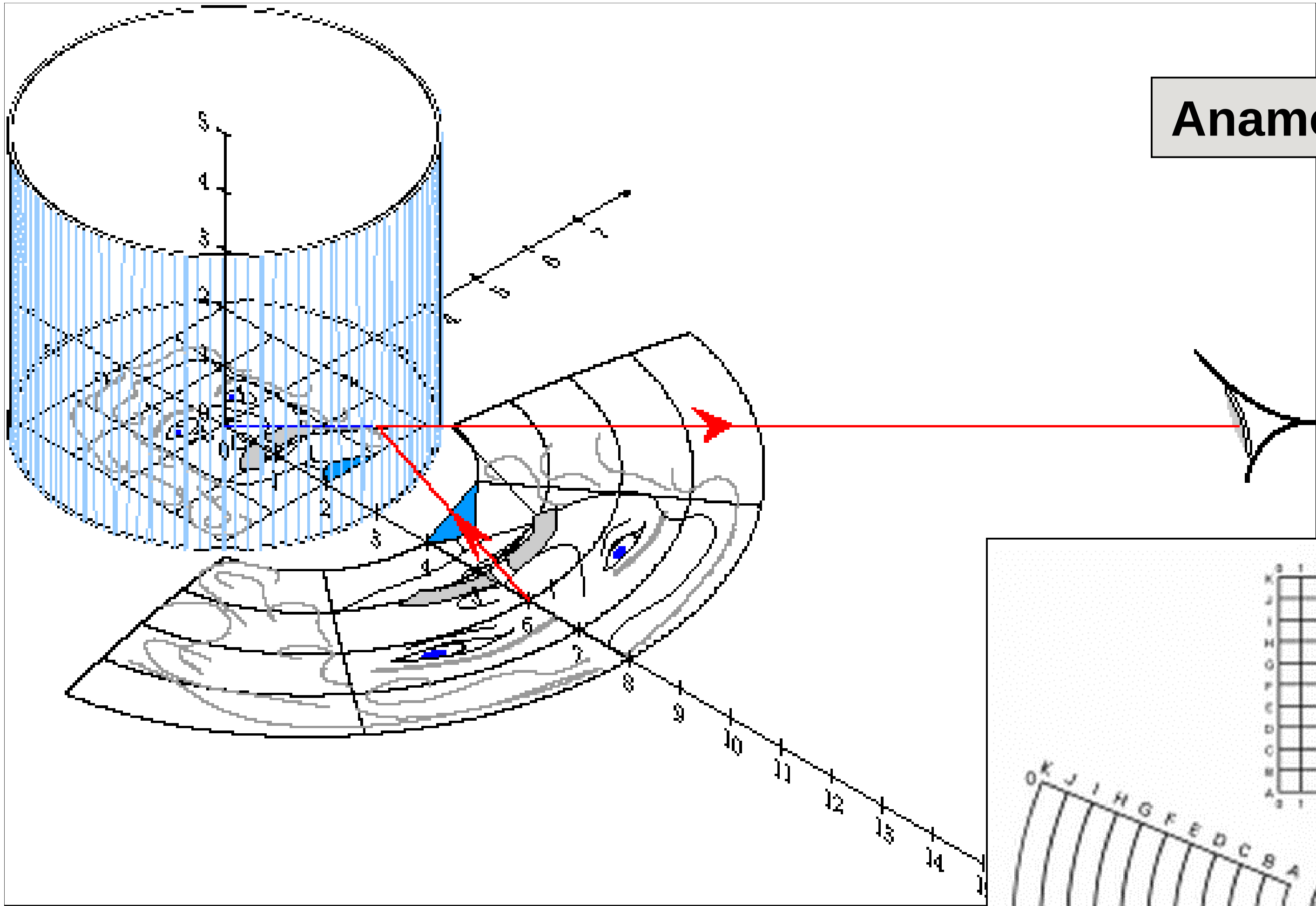
Una **anamorfosis** es una deformación reversible de una imagen a través de procedimientos matemáticos u ópticos.

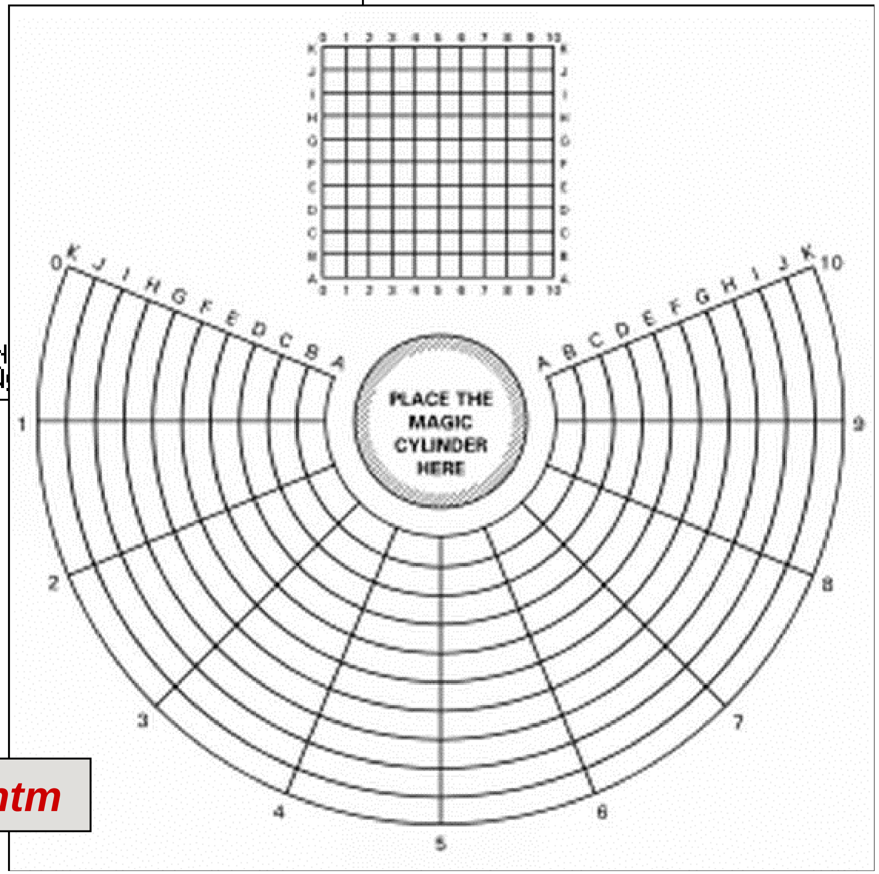
En este grabado de Durero, el artista usa un retículo (velo de Alberti) para guardar las proporciones de la modelo.

¿Y si no se coloca el enrejado de forma perpendicular?

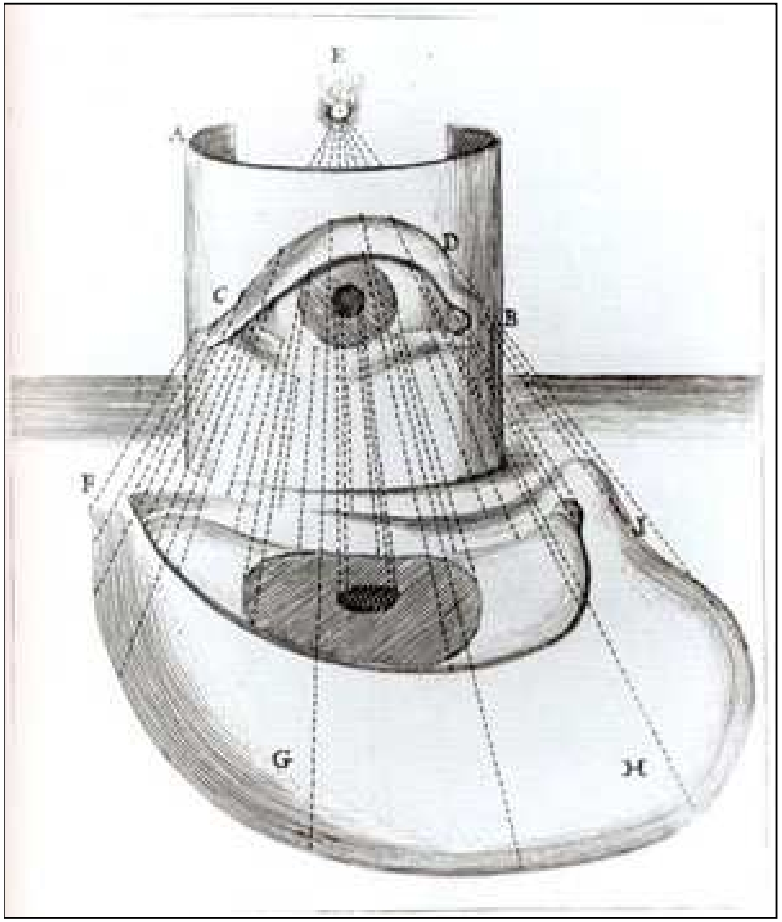


Anamorfosis cilíndrica



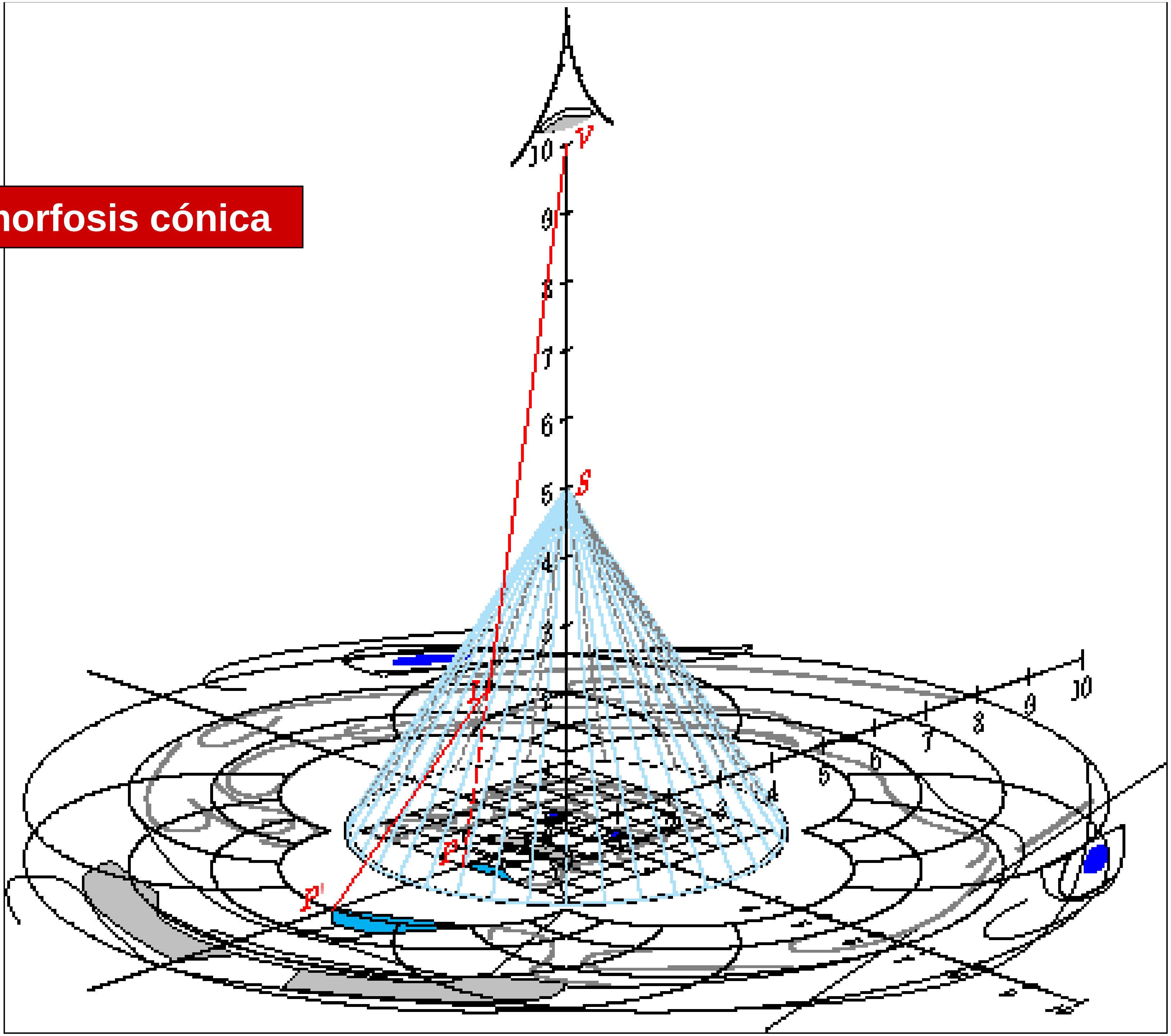


http://members.aol.com/ManuelLuque3/miroirs.htm

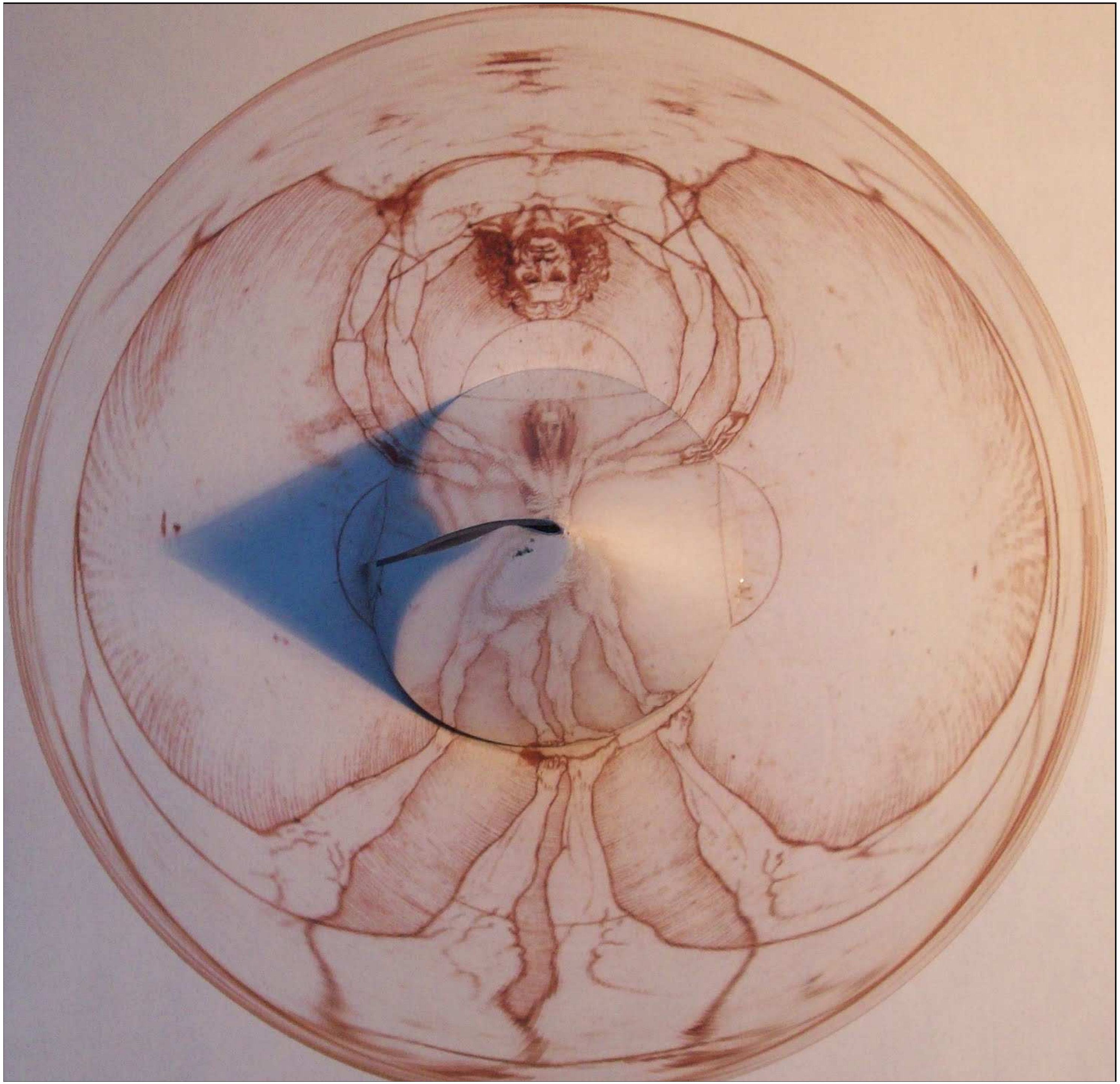


Mario Bettini, *L'Oeil du cardinal Colonna*, 1642

Anamorfosis cónica



"Sténopé - The Representation of Space",Cité des Sciences et de l'Industrie, Paris



Anamorfosis cónicas con AnamorphMe!

I.E.S. Santa María de Alarcos. Ciudad Real

Sancho Panza y su burro

Napoleón

Anamorfosis
Casa de las Ciencias de Logroño.

La escultura de Domingo García y Antonio J. Lombillo, es un tronco de cono invertido de acero inoxidable y de 2,5 metros de altura.


LO IMPORTANTE
ES NO DEJAR
DE HACERSE
PREGUNTAS


LO IMPORTANTE
ES NO DEJAR
DE HACERSE
PREGUNTAS

István Orosz (1951-)

La isla misteriosa y el retrato de Julio Verne

Video

http://www.geocities.com/SoHo/Museum/8716/

Ole Martin Lund Bo nos invita a reflexionar sobre la ***Apariencia externa engañosa***…
Deceptive Outward Appearance, 5 x 3.5 x 2.5 m, 2007

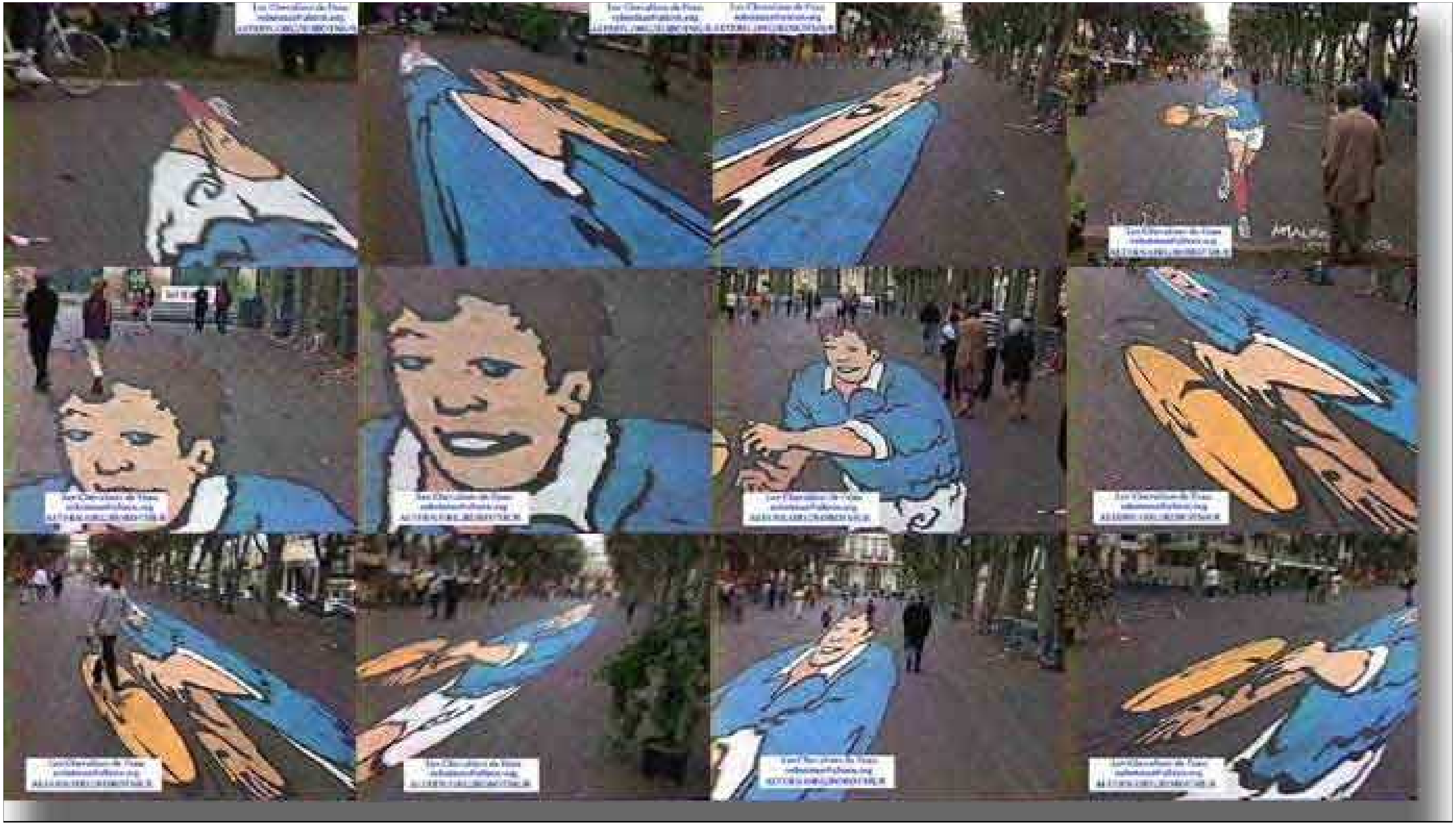

(receptive outward appearance)

Otra bellísima anamorfosis cilíndrica de Itsván Orosz (2007) es:

Edgar Allan Poe: The Raven

en donde tras un impresionante cuervo se esconde...


Les Chevaliers de l'Eau
ALTERN.ORG/ROBOTMUR
MLAURENCE



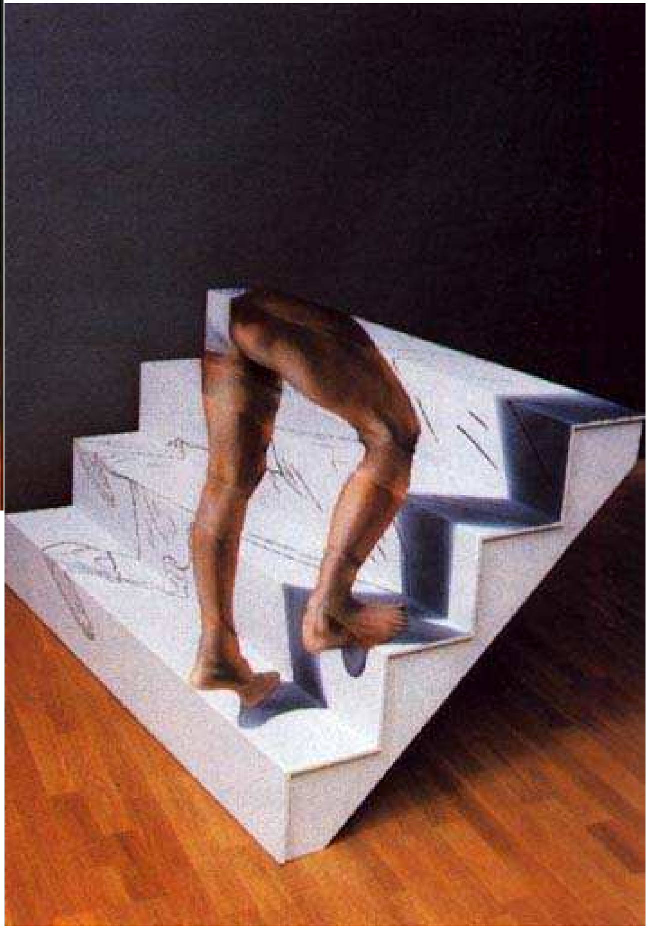
Les Chevaliers de l'eau (**http://jourdain.ifrance.com/sommaire.htm**)
Jugador de Rugby de 134,20 metros de largo. Beziers, 30 septiembre de 1999 (apertura de la copa del mundo de Rugby): es la mayor anamorfosis del mundo.

Kurt Wenner

***Dies Irae*, Italia**

http://www.kurtwenner.com/

***Musas*, Suiza**



István Orosz

Escalera de dimensión tres, vista desde diferentes ángulos.
Los dos primeros revelan una figura que camina sobre las escaleras, un tanto distorsionada. Sólo la figura final resuelve la anamorfosis.

Make Poverty History

Dibujo encargado para la campaña de presión al G8

Vista de frente

Edinburgh City Centre

Visto de lado: 13 metros

Julian Beever

http://users.skynet.be/J.Beever/pave.htm


Eduardo Relero
Grandes chorizos

Anamorfosis y señalización

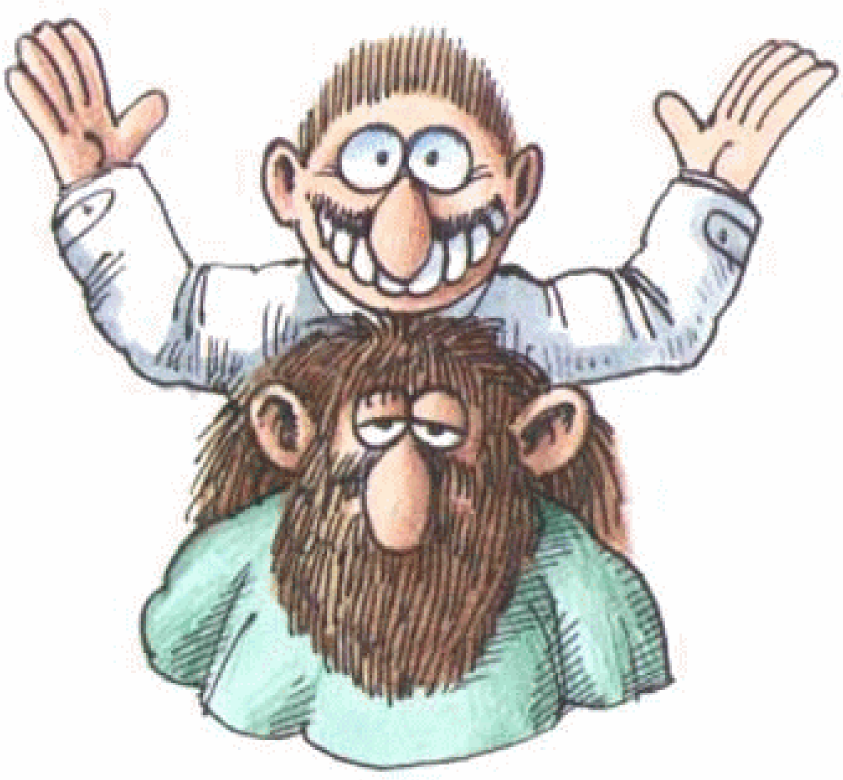
Las anamorfosis se usan a menudo en señales de tráfico, para que las señales sean correctamente interpretadas por los conductores y conductoras.

Plan de la charla

1. **Paradojas de la geometría: magia e ilusión (desapariciones y anamorfosis)**
2. **Paradojas lógicas: de barberos y otros asuntos**
3. **Paradojas del infinito: el hotel infinito de Hilbert**
4. **Paradojas de la vaguedad: el eterno problema del tamaño**
5. **Paradojas de la predicción: ¡Me libro seguro!**
6. **Paradojas de la confirmación: ¿son todos los cuervos negros?**
7. **Paradojas de la probabilidad: ¿me compensa jugar?**
8. **Paradojas topológicas: ¡qué desorientado vas!**

En Aveinte, el barbero, Jon, afeita a los que no se afeitan a sí mismos.

¿Quién afeita al barbero de Aveinte?




AVEINTE
50

Si Jon no se afeita a sí mismo, será una de las personas de Aveinte que no se afeitan a sí mismas…

Si Jon no se afeita a sí mismo, será una de las personas de Aveinte que no se afeitan a sí mismas…

con lo cual Jon debería de afeitarse, siendo por lo tanto una de las personas que se afeitan a sí mismas…

Si Jon no se afeita a sí mismo, será una de las personas de Aveinte que no se afeitan a sí mismas…

con lo cual Jon debería de afeitarse, siendo por lo tanto una de las personas que se afeitan a sí mismas…

no debiendo por tanto afeitarse...

¿?

Solución:

Bertrand Russel define su famosa *teoría de tipos*, donde se eliminan los conjuntos auto-contradic-torios, así que Jon, el barbero de Aveinte…

Solución:

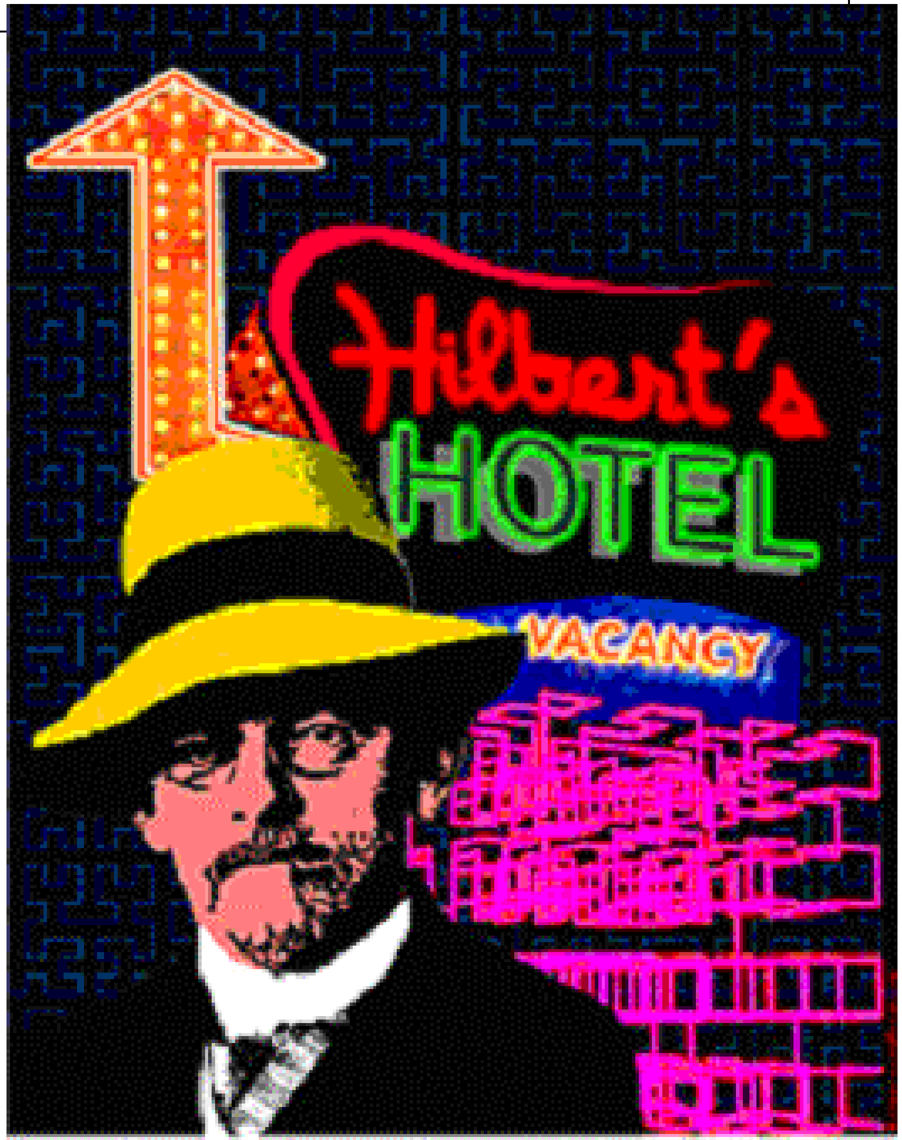
Bertrand Russel define su famosa *teoría de tipos*, donde se eliminan los conjuntos auto-contradic-torios, así que Jon, el barbero de Aveinte…

… ¡no existe!

Plan de la charla

1. **Paradojas de la geometría: magia e ilusión (desapariciones y anamorfosis)**
2. **Paradojas lógicas: de barberos y otros asuntos**
3. **Paradojas del infinito: el hotel infinito de Hilbert**
4. **Paradojas de la vaguedad: el eterno problema del tamaño**
5. **Paradojas de la predicción: ¡Me libro seguro!**
6. **Paradojas de la confirmación: ¿son todos los cuervos negros?**
7. **Paradojas de la probabilidad: ¿me compensa jugar?**
8. **Paradojas topológicas: ¡qué desorientado vas!**

Érase una vez un hotel con infinitas habitaciones (numeradas), con el lema: ***"Se garantiza el alojamiento de cualquier nuevo huésped".***



<u>Primera paradoja</u>: llega un hombre al hotel que se encuentra lleno, …

Érase una vez un hotel con infinitas habitaciones (numeradas), con el lema: *"Se garantiza el alojamiento de cualquier nuevo huésped".*

<u>Primera paradoja</u>: llega un hombre al hotel que se encuentra lleno, …

El recepcionista, fiel al lema del *Hotel Infinito* avisa por megafonía a todos sus clientes, para que se cambien de su habitación *n* a la habitación *n+1*, con lo que la habitación número 1 queda libre para el nuevo huésped…

<u>Duda</u>: ¿Qué pasa con el huésped que se encontraba en la última habitación?

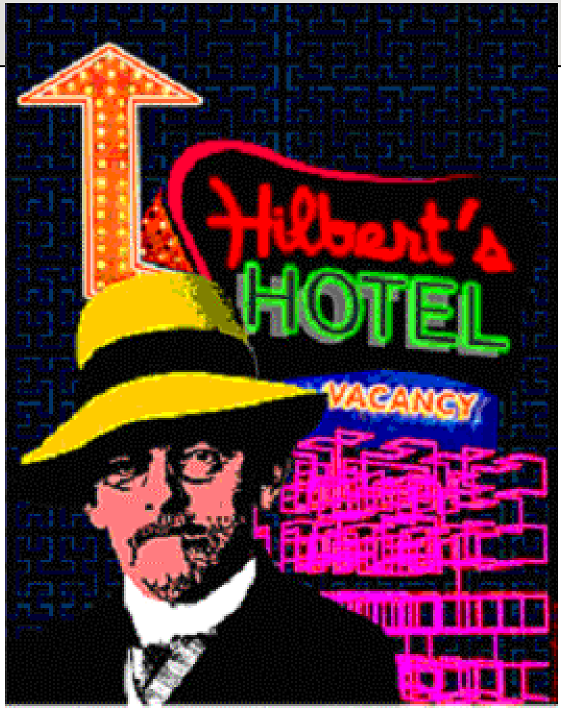
Érase una vez un hotel con infinitas habitaciones (numeradas), con el lema: *"Se garantiza el alojamiento de cualquier nuevo huésped".*

<u>Primera paradoja</u>: llega un hombre al hotel que se encuentra lleno, …

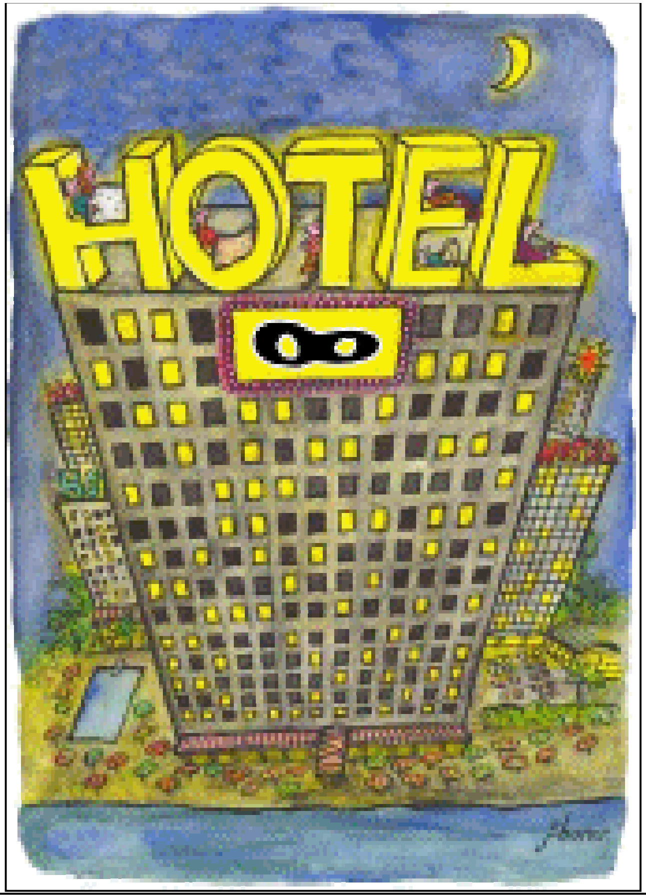
El recepcionista, fiel al lema del *Hotel Infinito* avisa por megafonía a todos sus clientes, para que se cambien de su habitación *n* a la habitación *n+1*, con lo que la habitación número 1 queda libre para el nuevo huésped…

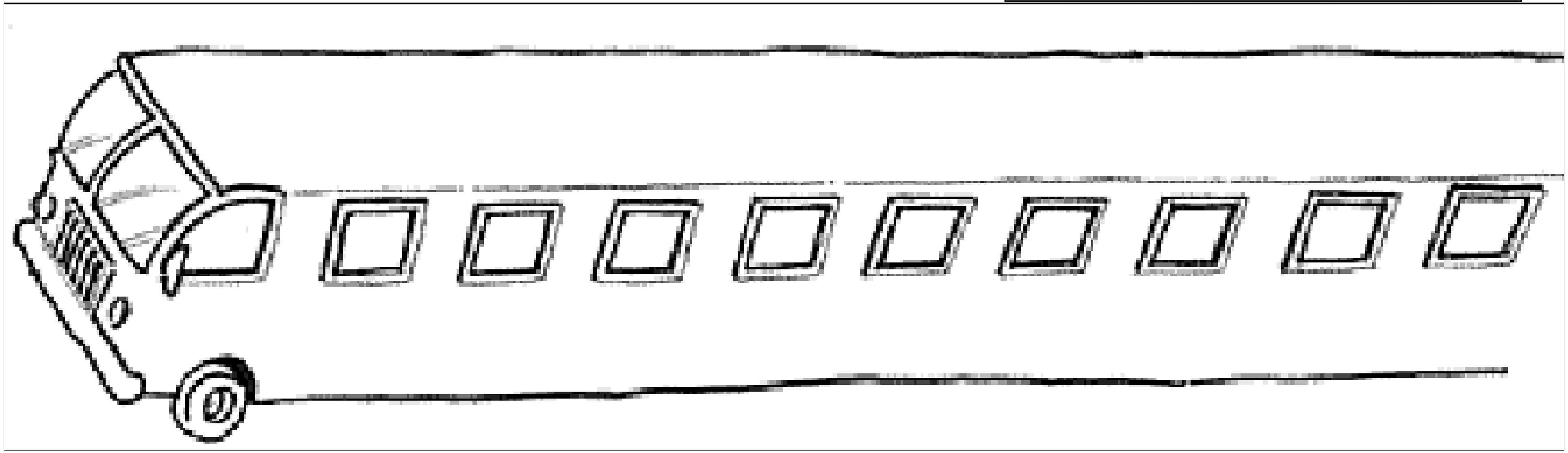
<u>Duda</u>: ¿Qué pasa con el huésped que se encontraba en la última habitación?...

… No existe la "última habitación"...

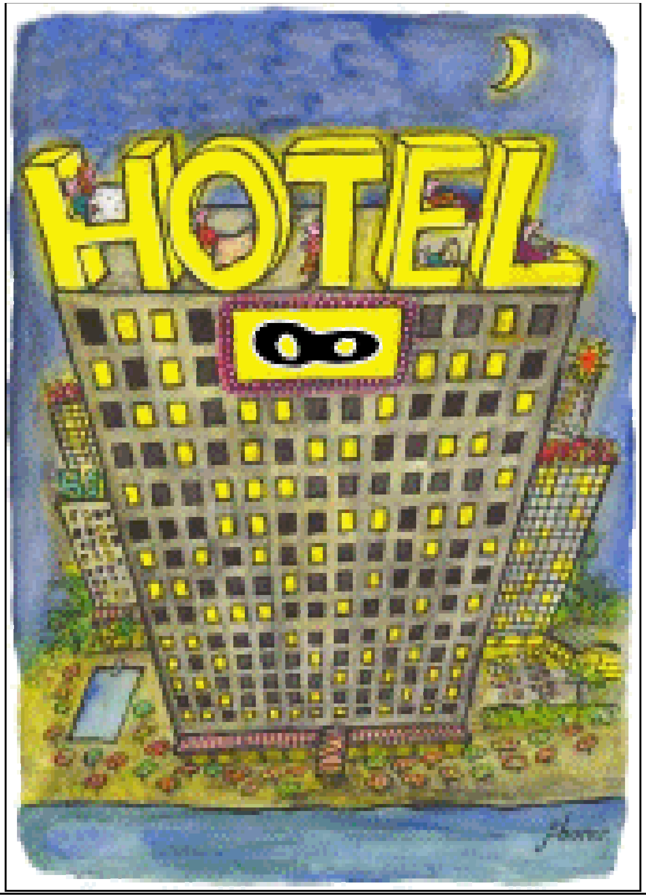


<u>Segunda paradoja</u>: llega al *Hotel Infinito* (que está lleno) una excursión con infinitos pensionistas (numerados)…

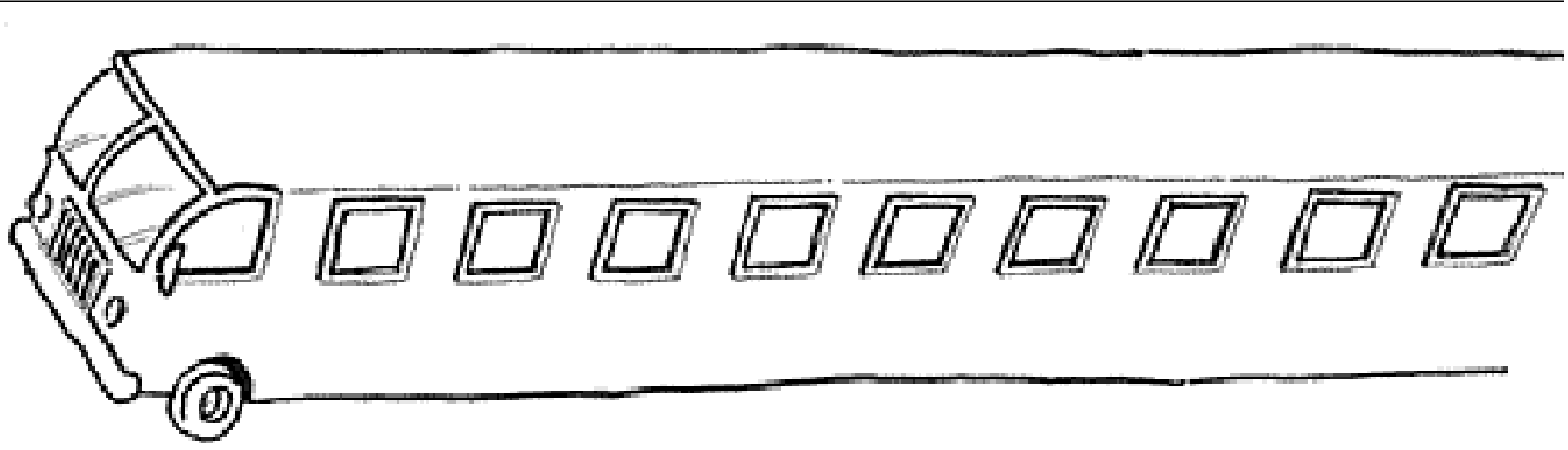




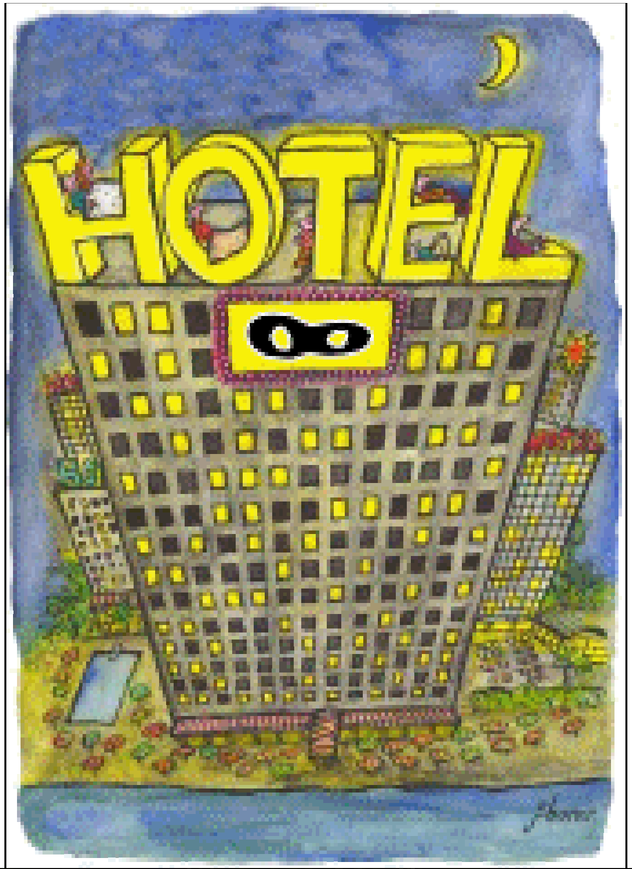
<u>Segunda paradoja</u>: llega al *Hotel Infinito* (que está lleno) una excursión con infinitos pensionistas (numerados)…



... el recepcionista solicita por megafonía a todos sus clientes que se cambien de su habitación número *n* a la habitación *2n*...



<u>Segunda paradoja</u>: **llega al *Hotel Infinito* (que está lleno) una excur-sión con infinitos pensionistas (numerados)…**



... el recepcionista solicita por me-gafonía a todos sus clientes que se cambien de su habitación número *n* a la habitación *2n*...

De esa forma todos los huéspedes se mudan a una habitación par, y todas las habitaciones impares quedan libres...

Plan de la charla

1. **Paradojas de la geometría: magia e ilusión (desapariciones y anamorfosis)**
2. **Paradojas lógicas: de barberos y otros asuntos**
3. **Paradojas del infinito: el hotel infinito de Hilbert**
4. **Paradojas de la vaguedad: el eterno problema del tamaño**
5. **Paradojas de la predicción: ¡Me libro seguro!**
6. **Paradojas de la confirmación: ¿son todos los cuervos negros?**
7. **Paradojas de la probabilidad: ¿me compensa jugar?**
8. **Paradojas topológicas: ¡qué desorientado vas!**

Paradojas tipo Sorites

"Sorites" es la palabra griega para "montón" o "pila".

Se da este nombre a una clase argumentos paradójicos –atribuidos al lógico Eubulides de Mileto–, que se derivan de los límites indeterminados de aplicación de los predicados envueltos...

El *hombre calvo*: ¿describi-rías a un hombre con un pelo en la cabeza como calvo?

Un *grano de arena no es un montón*, si 1 grano de arena no es un montón, tampoco 2 granos de arena lo son… Si 9.999 granos de arena no son un montón, tampoco los son 10.000 granos.
¿Cuántos granos tiene un montón?

Algunas respuestas a esta paradoja son:

- **el acercamiento a un *lenguaje ideal*, cuyo atributo clave es su precisión: la vaguedad del lenguaje natural es un defecto a eliminar (Frege y Russell);**

- **lógicas multivaluadas (no clásicas), como la *lógica difusa* de Goguen y Zadeh (1969) que sustituye a la usual (dos-valuada), que reconocen para un objeto "los grados" de verdad;**

- **aceptar la paradoja: ...**

Algunas respuestas a esta paradoja son:

- **el acercamiento a un *lenguaje ideal*, cuyo atributo clave es su precisión: la vaguedad del lenguaje natural es un defecto a eliminar (Frege y Russell);**

- **lógicas multivaluadas (no clásicas), como la *lógica difusa* de Goguen y Zadeh (1969) que sustituye a la usual (dos-valuada), que reconocen para un objeto "los grados" de verdad;**

- **aceptar la paradoja:**

¡ la calvicie no existe !

Plan de la charla

1. **Paradojas de la geometría: magia e ilusión (desapariciones y anamorfosis)**
2. **Paradojas lógicas: de barberos y otros asuntos**
3. **Paradojas del infinito: el hotel infinito de Hilbert**
4. **Paradojas de la vaguedad: el eterno problema del tamaño**
5. **Paradojas de la predicción: ¡Me libro seguro!**
6. **Paradojas de la confirmación: ¿son todos los cuervos negros?**
7. **Paradojas de la probabilidad: ¿me compensa jugar?**
8. **Paradojas topológicas: ¡qué desorientado vas!**

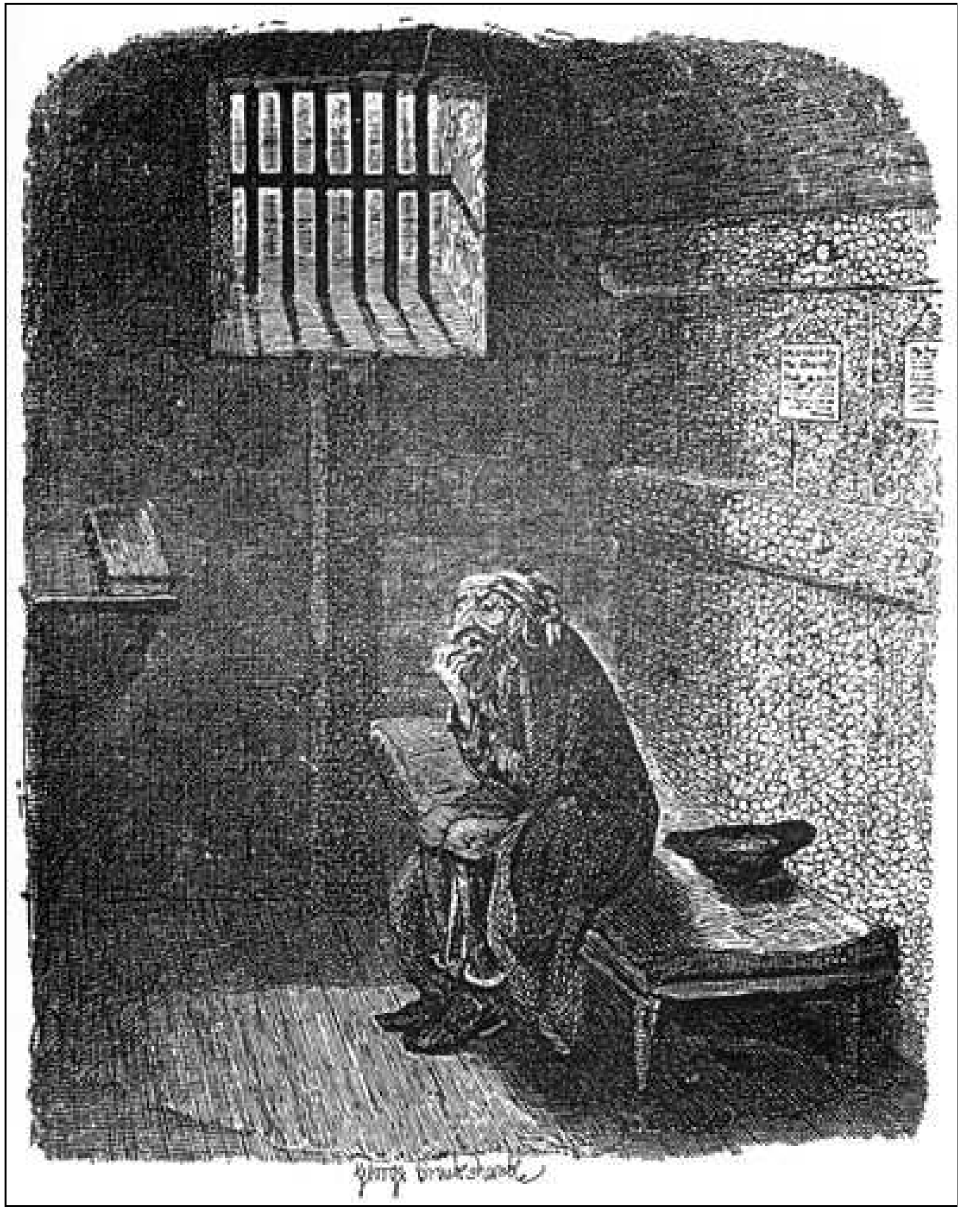
La paradoja del condenado

En la Edad Media, un rey de reconocida sinceridad, pronuncia su sentencia:

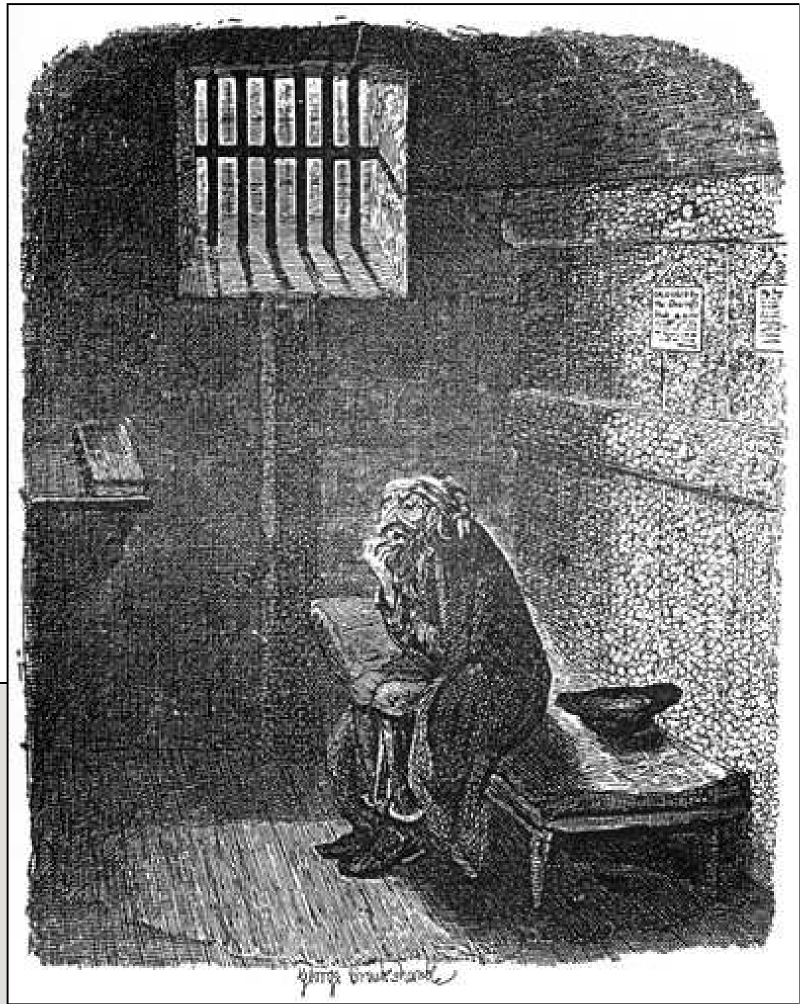
Una mañana de este mes serás ejecutado, pero no lo sabrás hasta esa misma mañana, de modo que cada noche te acostarás con la duda, que presiento terrible, de si esa será tu última sobre la Tierra...

En la soledad de su celda, el reo argumenta:

Si el mes tiene 30 días, es evidente que no podré ser ajusticiado el día 30, ya que el 29 por la noche sabría que a la mañana siguiente habría de morir...
Así que el último día posible para cumplir la sentencia es el 29.
Pero entonces, el 28 por la noche tendré la certeza de que por la mañana seré ejecutado...



En la soledad de su celda, el reo argumenta:
Si el mes tiene 30 días, es evidente que no podré ser ajusticiado el día 30, ya que el 29 por la noche sabría que a la mañana siguiente habría de morir. Así que el último día posible para cumplir la sentencia es el 29. Pero entonces, el 28 por la noche tendré la certeza de que por la mañana seré ejecutado...



Continuando de este modo, el prisio-nero concluye triunfalmente que la condena es de ejecución imposible, y comienza a dormir aliviado, aguardan-do que transcurra el mes para pedir su libertad…

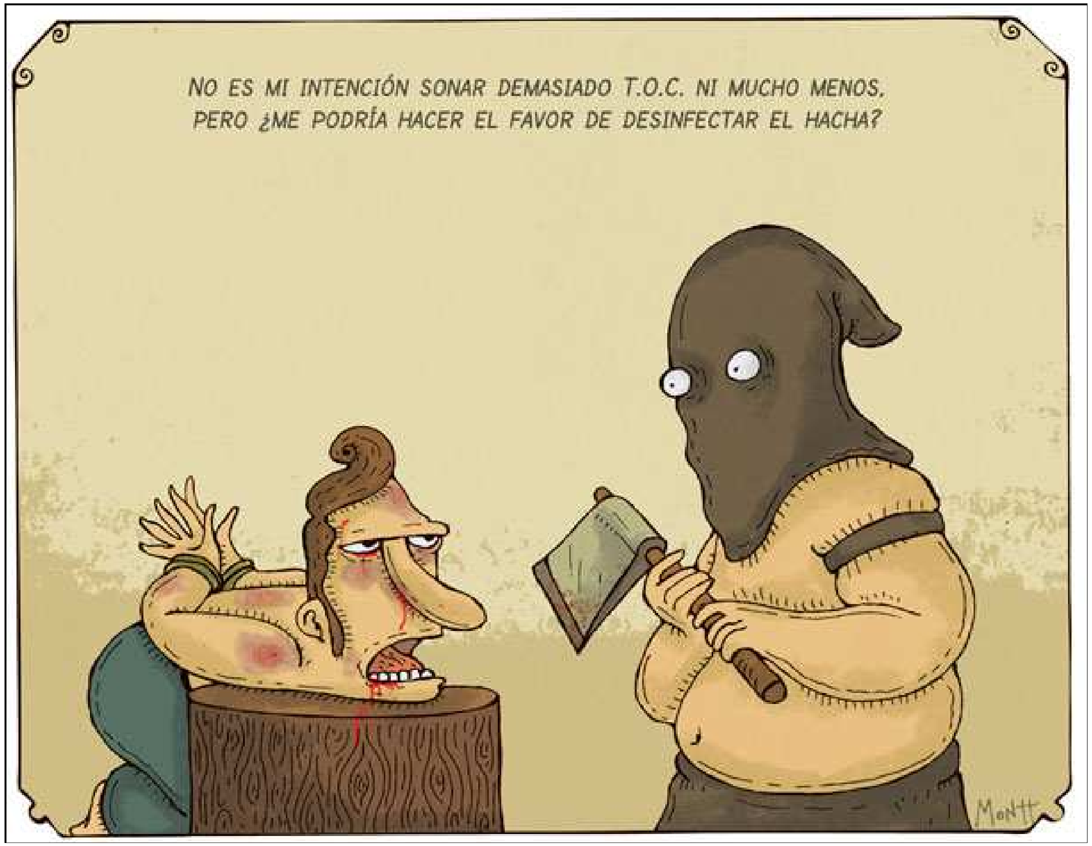
Sin embargo, sorpresa, un día cualquiera –por ejemplo el fatídico día 13, que casualmente era martes–, el verdugo, con el hacha afilada en la mano, despierta al reo... que instantes más tarde es decapitado.

La sentencia se cumple literalmente...

Sin embargo, sorpresa, un día cualquiera –por ejemplo el fatídico día 13, que casualmente era martes–, el verdugo, con el hacha afilada en la mano, despierta al reo... que instantes más tarde es decapitado.

La sentencia se cumple literalmente...

¿Dónde ha fallado el razonamiento del condenado?



Una solución puede pasar por la noción fundamental de que no es lo mismo el día 30, más el día 29, más el día 28, etc., que el mes.

Un conjunto es diferente y contiene cualidades distintas de la mera adición de sus partes.

El análisis individual, día por día, por parte del prisionero es irreprochable... pero el defecto de su argumento aparece cuando atribuye al conjunto (este mes) las mismas y exclusivas cualidades que poseían sus partes (cada día), no advirtiendo que el conjunto mes ha incorporado algunas características: entre otras la de contener…

Una solución puede pasar por la noción fundamental de que no es lo mismo el día 30, más el día 29, más el día 28, etc., que el mes.

Un conjunto es diferente y contiene cualidades distintas de la mera adición de sus partes.

El análisis individual, día por día, por parte del prisionero es irreprochable... pero el defecto de su argumento aparece cuando atribuye al conjunto (este mes) las mismas y exclusivas cualidades que poseían sus partes (cada día), no advirtiendo que el conjunto mes ha incorporado algunas características: entre otras la de contener…

… días sorpresa.

Hacia el siglo III, el filósofo chino Hui Tzu afirmaba:

Un caballo bayo y una vaca parda son tres: el caballo, la vaca, y el conjunto de caballo y vaca.

El razonamiento no es trivial, y es la esencia de la paradoja del condenado.

¡  +  = 3!

Plan de la charla

1. **Paradojas de la geometría: magia e ilusión (desapariciones y anamorfosis)**
2. **Paradojas lógicas: de barberos y otros asuntos**
3. **Paradojas del infinito: el hotel infinito de Hilbert**
4. **Paradojas de la vaguedad: el eterno problema del tamaño**
5. **Paradojas de la predicción: ¡Me libro seguro!**
6. **Paradojas de la confirmación: ¿son todos los cuervos negros?**
7. **Paradojas de la probabilidad: ¿me compensa jugar?**
8. **Paradojas topológicas: ¡qué desorientado vas!**

La paradoja del cuervo

Carl Hempel (1905-1997), inventor de esta paradoja, afirma que la existencia de una vaca de color violeta incrementa la probabilidad de que los cuervos sean negros.

¿Por qué?

Para responder, establezcamos la ley: *Todos los cuervos son negros,* de una manera diferente, pero lógicamente equivalente *Todos los objetos no-negros no son cuervos*.

Hempel dice: He encontrado un objeto no-negro –una vaca violeta –. Esto confirma (débilmente) la ley "Todos los objetos no-negros no son cuervos*". Y así, también confirma la ley equivalente *"Todos los cuervos son negros".

Es fácil encontrar miles de objetos no-negros que no son cuervos, confirmando así de manera más fuerte la ley. El problema es que observando objetos no-negros se confirma la ley ***"Todos los cuervos son negros"***
pero sólo a un nivel "infinitesimal".
La clase de objetos que no son cuervos, es tan enormemente grande comparada con las que son cuervos que el grado con en el cual un no-cuervo que es no negro confirma la hipótesis es despreciable...

Los detractores de Hempel opinan que la existencia de una vaca de color violeta confirma del mismo modo el ***enunciado***
"Todos los cuervos son blancos"...

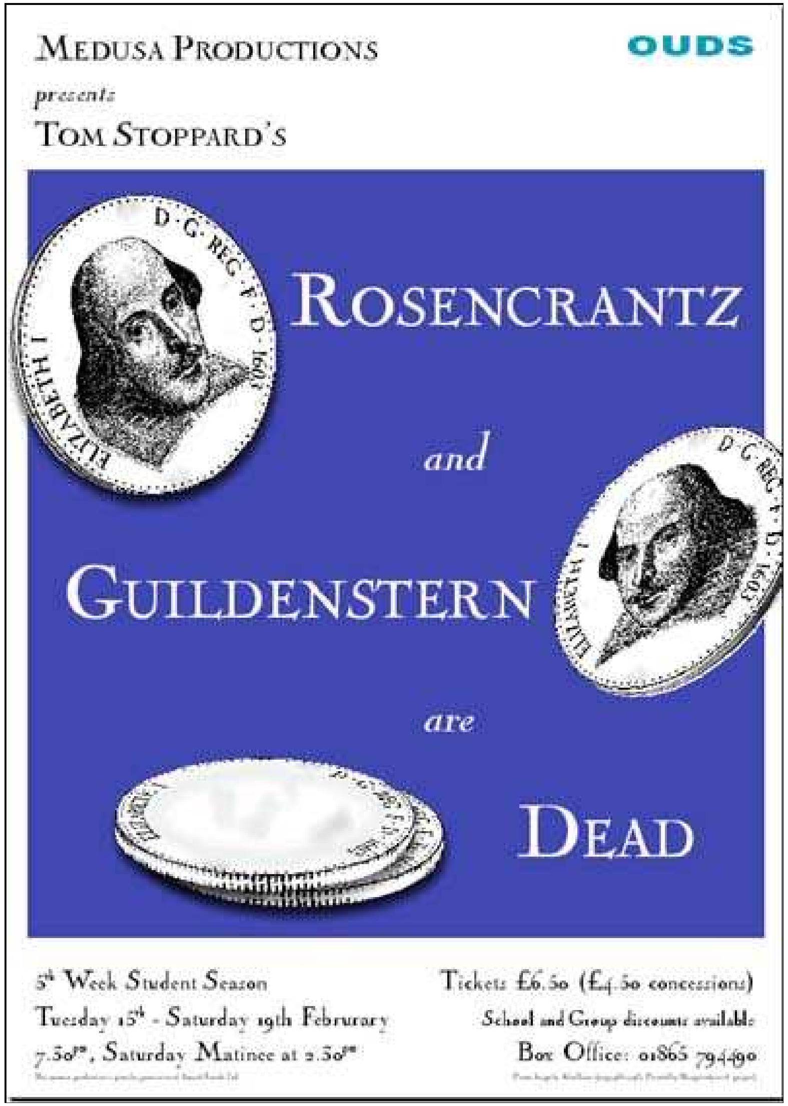
Plan de la charla

1. **Paradojas de la geometría: magia e ilusión (desapariciones y anamorfosis)**
2. **Paradojas lógicas: de barberos y otros asuntos**
3. **Paradojas del infinito: el hotel infinito de Hilbert**
4. **Paradojas de la vaguedad: el eterno problema del tamaño**
5. **Paradojas de la predicción: ¡Me libro seguro!**
6. **Paradojas de la confirmación: ¿son todos los cuervos negros?**
7. **Paradojas de la probabilidad: ¿me compensa jugar?**
8. **Paradojas topológicas: ¡qué desorientado vas!**

La paradoja de San Petesburgo

Esta paradoja trata sobre el *cálculo de probabilidades* y el concepto abstracto de *esperanza matemática*. Se debe a Nicolás Bernoulli (1695-1726).

La pieza del Tom Stoppard *"Rosencrantz y Guildenstern han muerto"* (1966) se abre con una escena en donde los dos personajes secundarios de *Hamlet* juegan a cara y cruz.



G ha lanzado 90 monedas, todas han salido cara y han regresado, como lo manda el juego, a R.
A pesar de la gran improbabilidad de una tal serie, saben que es posible.
Cuando los protagonistas están cansados de lanzar simplemente las monedas, R propone una variante: lanzará una moneda hasta que salga cara; si sucede en la primera tirada, dará 1 moneda a G, en la segunda tirada, 2 monedas, en la tercera, 4 monedas, y así sucesivamente, doblando la cantidad cada vez que la pieza cae en cruz.

¿Cuánto dinero debe pagar G a R para que el juego sea equitativo?

El problema se resuelve en términos de esperanza matemática de ganar: la probabilidad del evento

cara aparece en la tirada n

es de $1/2^{n-1}\,(1/2) = 1/2^n$.

La esperanza de ganar de G es pues la suma

$$1/2 + 2(1/2)^2 + 4(1/2)^3 + 8(1/2)^4 + \ldots + 2^{n-1}(1/2)^n + \ldots =$$

$$1/2 + 1/2 + 1/2 + 1/2 + \ldots + 1/2 + \ldots = \infty$$

En honor a la equidad, el juego no debería tener lugar.

La progresión de la ganadas es muy rápida (serie geométrica de razón 2). Se podría reemplazar 2 por un número inferior q y retomar los cálculos: la esperanza de ganada de G es entonces de

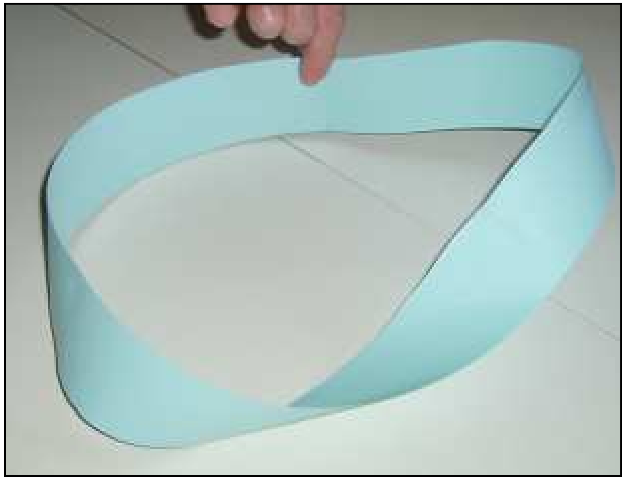
$$1/2 + q(1/2)^2 + q^2(1/2)^3 + q^3(1/2)^4 + \ldots + q^{n-1}(1/2)^n + \ldots =$$
$$1/2\ (1 + q/2 + (q/2)^2 + \ldots + (q/2)^n + \ldots) = 1/(2 - q).$$

La ganada infinita de G aparece como caso límite cuando q tiende a 2. Haciendo variar q, se puede entonces establecer la lista de las ganadas de G y el dinero que deberá ceder a R al principio del juego. En todos los casos, y en ausencia de cualquier otra condición, parece preferible renunciar a este juego tan azaroso tanto en el papel de G como de R.

Plan de la charla

1. **Paradojas de la geometría: magia e ilusión (desapariciones y anamorfosis)**
2. **Paradojas lógicas: de barberos y otros asuntos**
3. **Paradojas del infinito: el hotel infinito de Hilbert**
4. **Paradojas de la vaguedad: el eterno problema del tamaño**
5. **Paradojas de la predicción: ¡Me libro seguro!**
6. **Paradojas de la confirmación: ¿son todos los cuervos negros?**
7. **Paradojas de la probabilidad: ¿me compensa jugar?**
8. **Paradojas topológicas: ¡qué desorientado vas!**

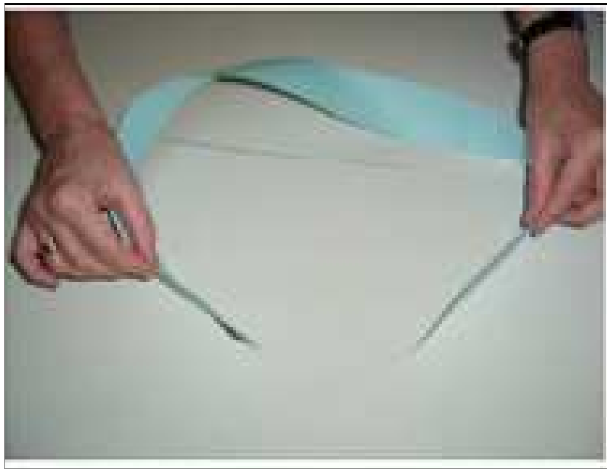
La banda de Moebius es una superficie (con borde): fue descubierta en 1858 de forma independiente por el matemático y astrónomo August Ferdinand Möbius (1790-1868) y por el considerado como fundador de la ***topología*** Johann Benedict Listing (1808-1882).



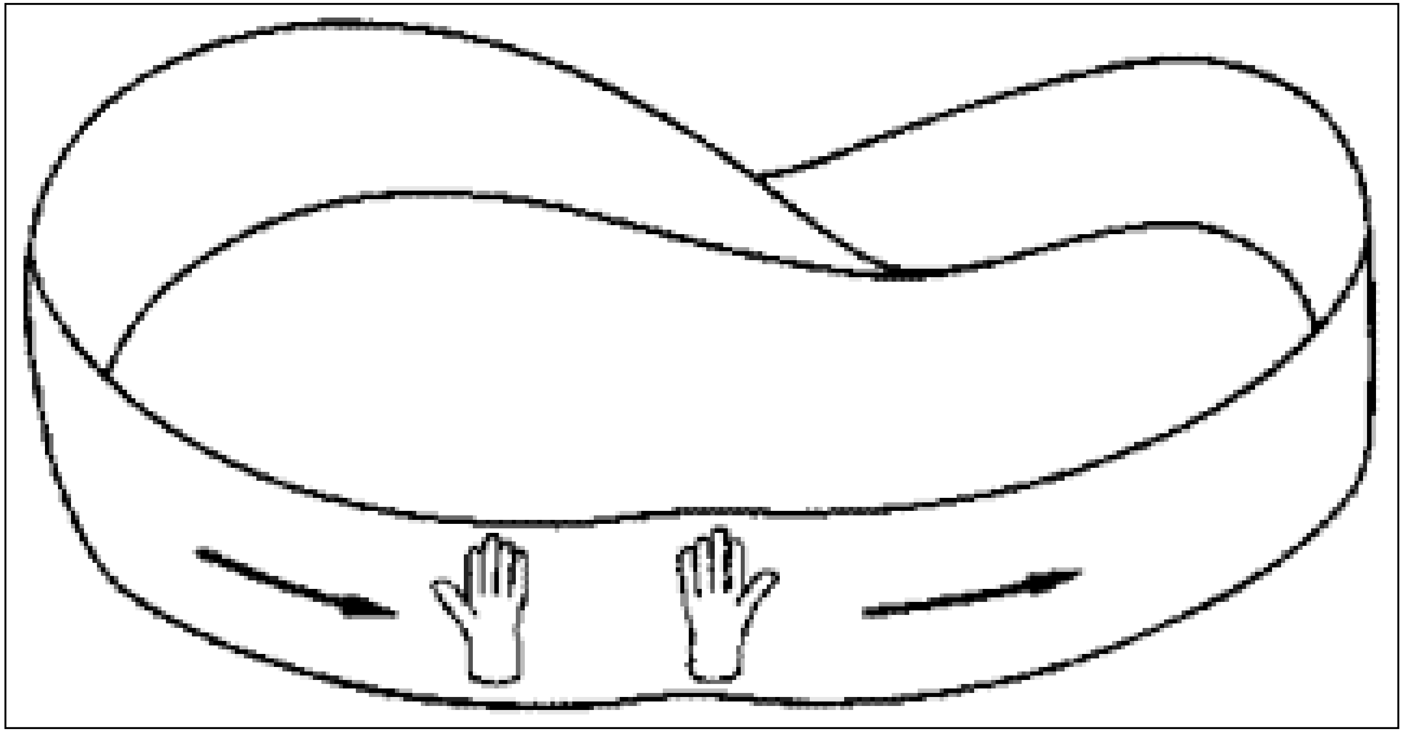
La banda de Möbius es, desde el punto de vista topológico, una superficie (dimensión dos), con un **único borde** y una **única cara**; es además ***no orientable***: todas las propiedades *singulares* de la banda de Möbius (y de cualquier otro objeto que esté formado por una o varias de estas bandas) se derivan de la falta de orientabilidad.



Si se toma una tira de papel y se pegan los extremos como muestra la figura, se obtiene un ***cilindro***, es decir, una superficie que tiene como bordes dos circunferencias disjuntas y dos lados (la cara interior y la exterior de la figura).
Si se hace lo mismo, pero antes de pegar los extremos se gira uno de ellos **180^0**, el objeto que se obtiene es una ***banda de Möbius:*** es un objeto geométrico de dimensión dos, pero sorprendentemente, posee un único borde (el doble de largo, su longitud es la suma de las longitudes de las dos circunferencias que forman el borde del cilindro) y una única cara.

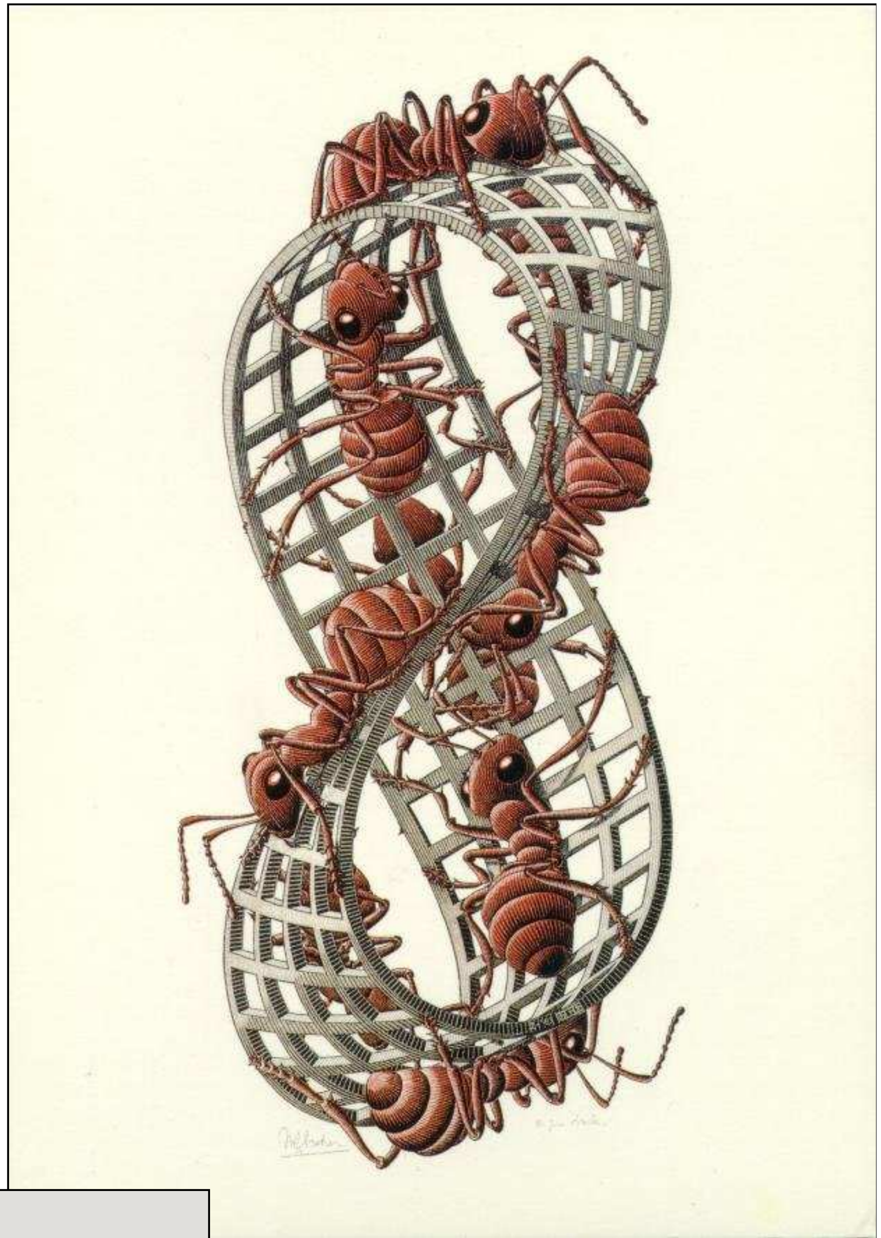


Basta con pasar un dedo por el borde de la cinta, hasta verificar que se ha recorrido todo sin levantarlo en ningún momento, y por ejemplo, pasar un lápiz por la cara de la banda, comprobando que al regresar al punto de partida, las supuestas dos caras del objeto están marcadas.



La banda de Möbius es *no orientable*: dibuja por ejemplo una mano sobre la banda, y muévela a lo largo de su única cara… observa que cuando regresas al punto de partida, ¡la mano ha cambiado de sentido!

¿Qué sucede si antes de pegar los extremos de la banda de papel se gira uno de ellos **360^0**? ¿Qué se obtiene? Se trata (topológicamente) de un cilindro, ya que este objeto y el obtenido al pegar sin realizar ningún giro son *homeomorfos*: se está identificando (pegando) exactamente del mismo modo en ambos casos.
Es fácil comprobar que sólo hay dos posibilidades al pegar una banda por dos de sus extremos opuestos: o bien se obtiene un cilindro (si antes de pegar los extremos, se gira uno de ellos un múltiplo par de 180^0) o bien una banda de Möbius (si antes de pegar los extremos, se gira uno de ellos un múltiplo impar de 180^0)…



Strip II de Escher
http://www.uv.es/buso/escher/escher.html

Vamos a hacer un par de experimentos de insólito resultado: al cortar por la altura mitad un cilindro, se obtienen dos “cilindritos”, la mitad de altos que el cilindro original...

Si se hace lo mismo con la banda de Möbius, … ¿se obtendrán dos “banditas” de Möbius?

… no… se obtiene una única cinta… que es un ***cilindro***, pues posee dos caras.

Al cortar por su tercera parte un cilindro, se obtienen dos cilindros igual de largos, de alturas un tercio y dos tercios de la original.

¿Y si se hace lo mismo con la banda de Möbius?

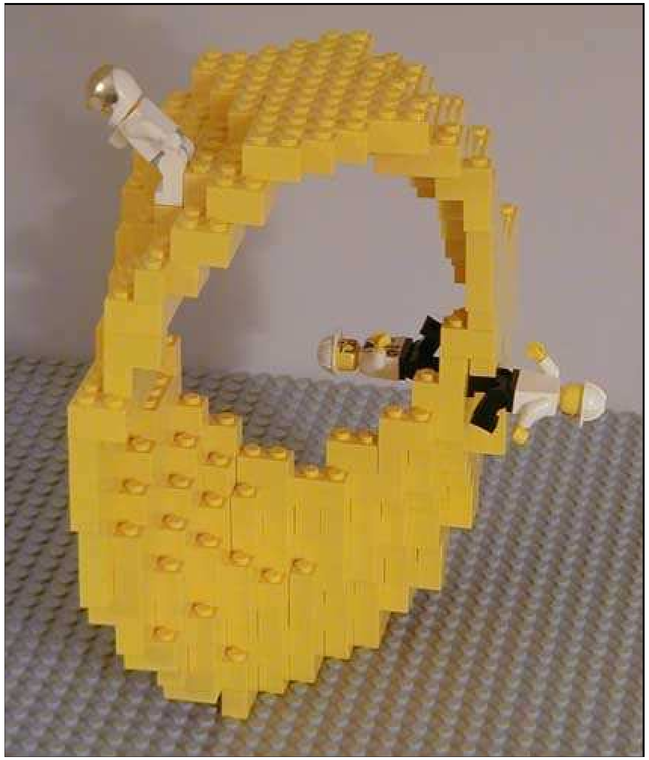
… resultan una ***banda de Möbius*** (igual de larga y un tercio de ancha) y un ***cilindro*** (el doble de largo y un tercio de ancho) y enlazados…

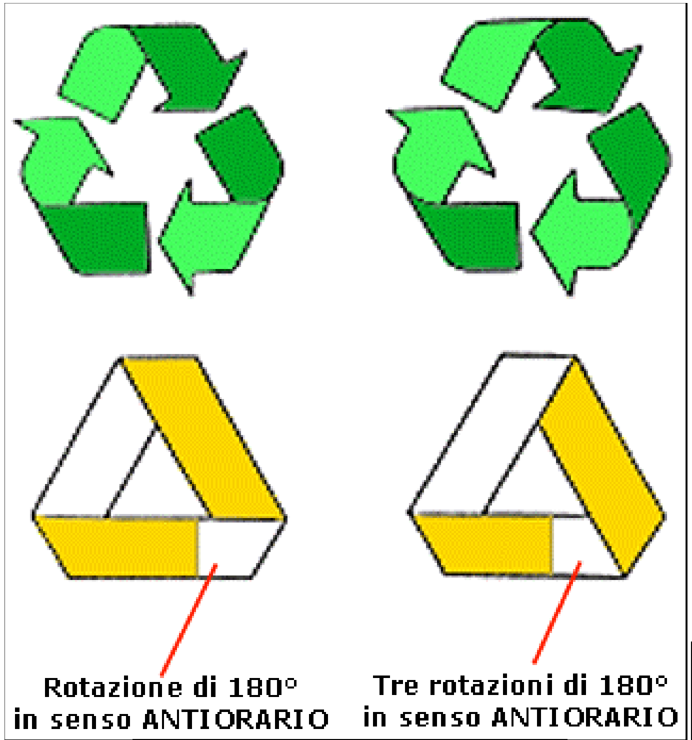
La banda de Möbius es una ***superficie reglada***, representada como subconjunto del espacio euclídeo de dimensión 3, mediante la parametrización:

$$x(u,v) = \cos(u)\,(1 + \tfrac{1}{2}v\cos(\tfrac{1}{2}u))$$
$$y(u,v) = \operatorname{sen}(u)\,(1 + \tfrac{1}{2}v\cos(\tfrac{1}{2}u))$$
$$z(u,v) = \tfrac{1}{2}v\operatorname{sen}(\tfrac{1}{2}u)$$

donde $0 \le u < 2\pi$ y $-1 \le v \le 1$: su anchura es unitaria, su circunferencia central tiene radio 1 y se encuentra en el plano coordenado *OXY,* centrada en el origen de coordenadas.







Rotazione di 180°
in senso ANTIORARIO
Tre rotazioni di 180°
in senso ANTIORARIO


möbius


Rel-UITA


PARSHIP.es
Encuentra a alguien justo para ti

La canción ***Serenata mariachi*** de **Les Luthiers**: relata una serenata de dos mariachis, **Bernardo** y **Porfirio** a su amada María Lucrecia:

En la primera cara de una banda de papel rectangular se escribe la mitad de la poesía (**Bernardo** canta):

Siento que me atan a ti

tu sonrisa y esos dientes

el perfil de tu nariz

y tus pechos inocentes

Se gira esta tira de papel sobre su lado más largo (es esencial), y se escribe la segunda mitad del poema (**Porfirio** canta):

Tus adorados cabellos,
oscuros, desordenados
clara imagen de un anzuelo
que yo mordí fascinado

Se pega la tira para obtener una banda de Möbius y sobre ella se lee (sólo tiene una cara) algo con sentido “opuesto” a la suma de los dos poemas anteriores:

Siento que me atan a ti tus adorados cabellos,
tu sonrisa y esos dientes oscuros, desordenados
El perfil de tu nariz clara imagen de un anzuelo
y tus pechos inocentes que yo mordí fascinado**.**

http://www.youtube.com/watch?v=CEUs6FS_sk4

Bernardo canta

Siento que me atan a ti
tu sonrisa y esos dientes
el perfil de tu nariz
y tus pechos inocentes

Luego **Porfirio**

Tus adorados cabellos,
oscuros, desordenados
clara imagen de un anzuelo
que yo mordí fascinado


Thank You