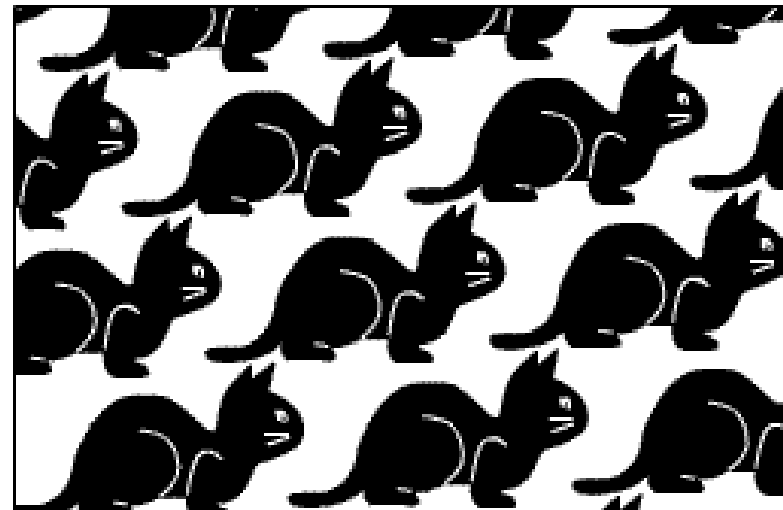


Paradojas lógicas y visuales

Marta Macho Stadler, UPV/EHU



01160110



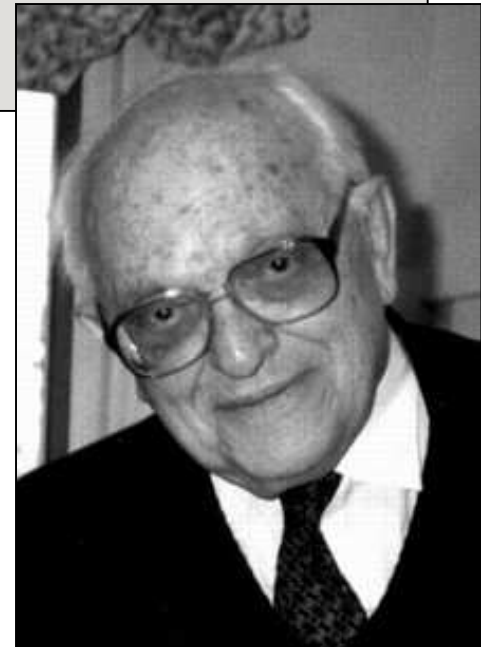
10 y 17 de febrero de 2012

Las **paradojas** han tenido un papel crucial en la historia intelectual, a menudo presentando los desarrollos revolucionarios de las ciencias, de las matemáticas y de la lógica. Cada vez que, en cualquier disciplina, aparece un problema que no puede resolverse en el interior del cuadro conceptual susceptible de aplicarse, experimentamos un choque, choque que puede constreñirnos a rechazar la antigua estructura inadecuada y a adoptar una nueva. Es a este proceso de mutación intelectual al que se le debe el nacimiento de la mayor parte de las ideas matemáticas y científicas.

Escapar a la paradoja

1967

**Anatol Rapoport
(1911-2007)**





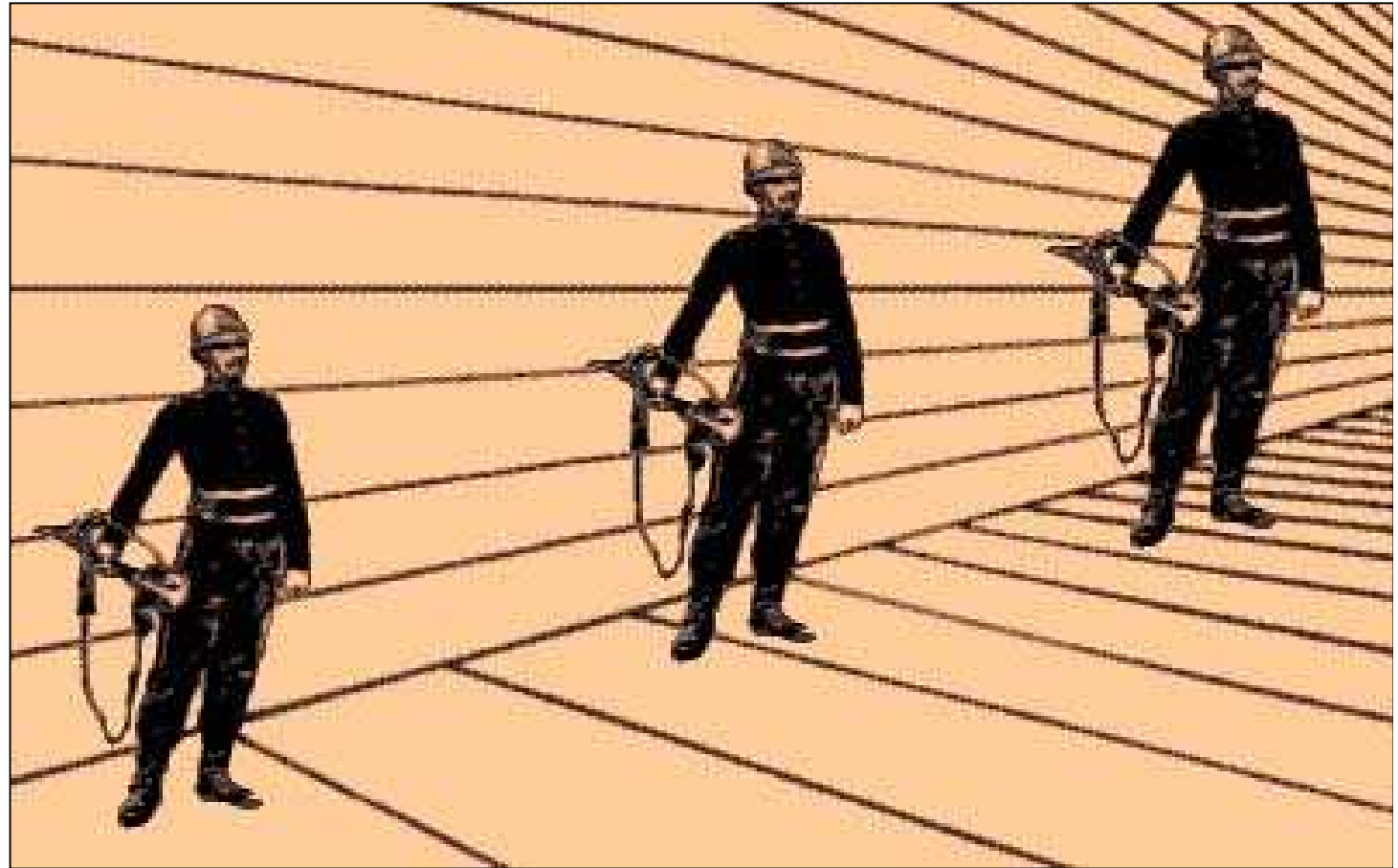
**Las paradojas
aparecen a diario,
aunque no nos demos
cuenta...**

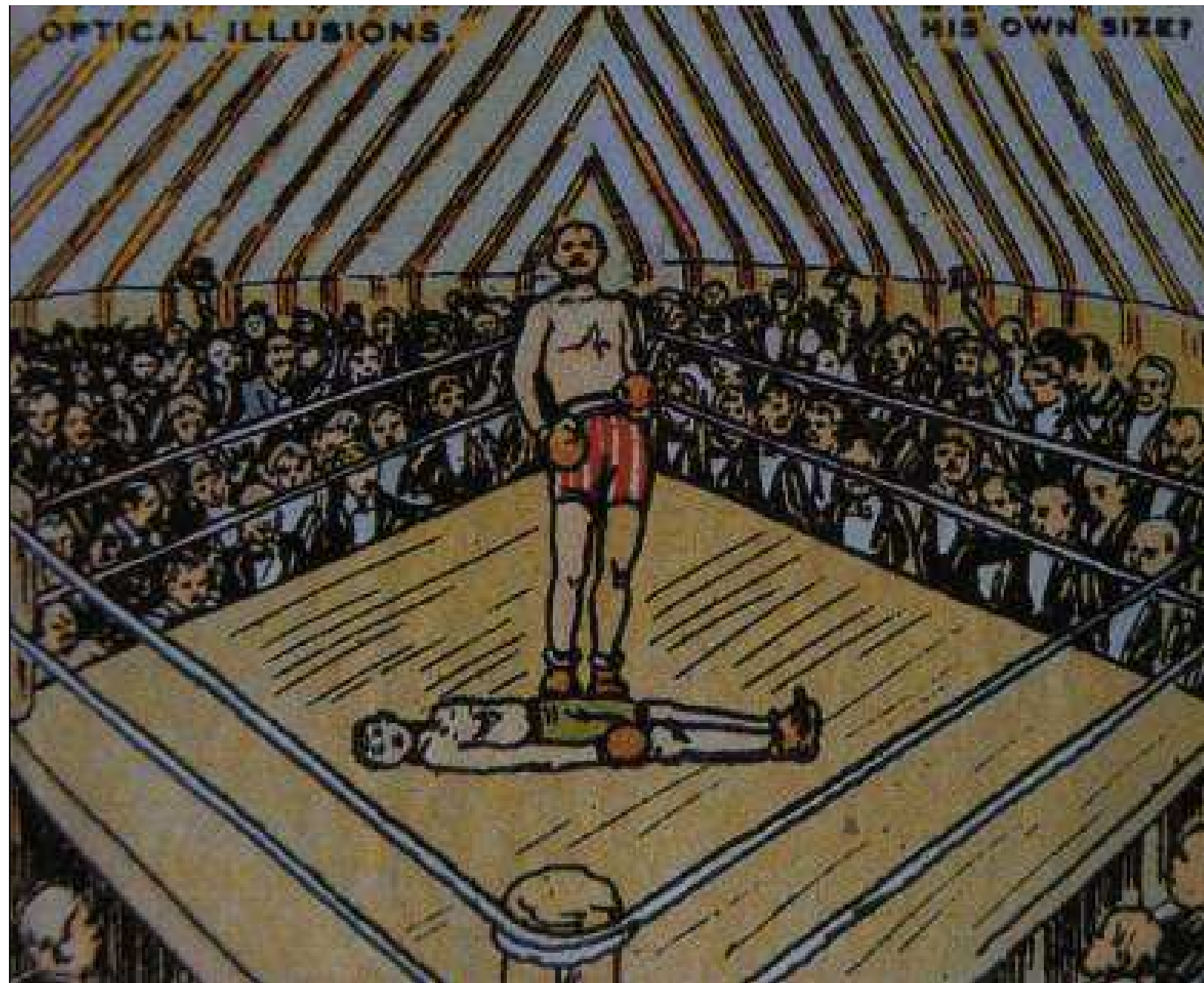


Paradojas de la perspectiva

Paradoja
de la
perspectiva
ascendente

*¿Son los
soldados
del
mismo
tamaño?*





¿Cuál de los boxeadores es más alto?

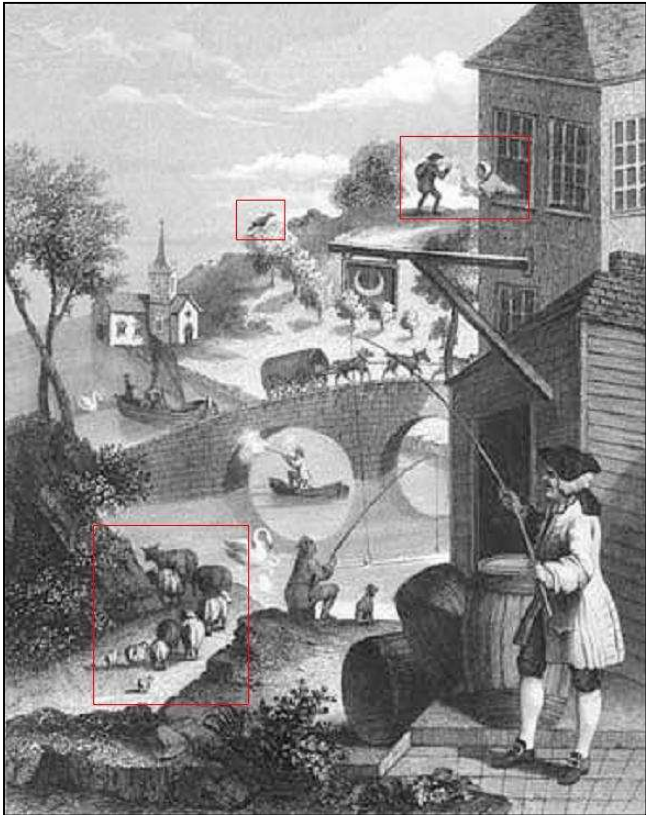


**William Hogarth
(1697-1764)**

***The Magpie on
the Gallows***

1754

**Contiene más
de 20 errores de
perspectiva**



El hotel infinito

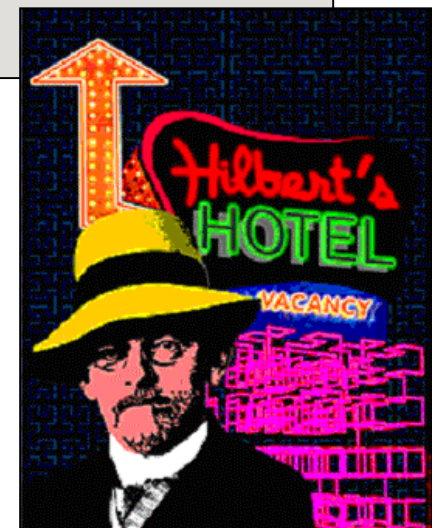
Érase una vez un hotel con infinitas habitaciones (numeradas), con el lema: *“Se garantiza el alojamiento de cualquier nuevo huésped”*.



El hotel infinito

Érase una vez un hotel con infinitas habitaciones (numeradas), con el lema: *“Se garantiza el alojamiento de cualquier nuevo huésped”*.

Primera paradoja: llega un hombre al hotel que se encuentra lleno, ... el recepcionista, fiel al lema del *Hotel Infinito* avisa por megafonía a todos sus clientes, para que se cambien de su habitación n a la habitación $n+1$, con lo que la habitación número 1 queda libre para el nuevo huésped...

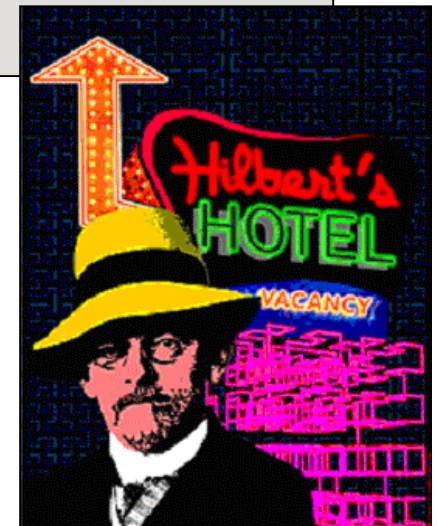


El hotel infinito

Érase una vez un hotel con infinitas habitaciones (numeradas), con el lema: *“Se garantiza el alojamiento de cualquier nuevo huésped”*.

Primera paradoja: llega un hombre al hotel que se encuentra lleno, ... el recepcionista, fiel al lema del *Hotel Infinito* avisa por megafonía a todos sus clientes, para que se cambien de su habitación n a la habitación $n+1$, con lo que la habitación número 1 queda libre para el nuevo huésped...

Duda: ¿Qué pasa con el huésped que se encontraba en la última habitación?...



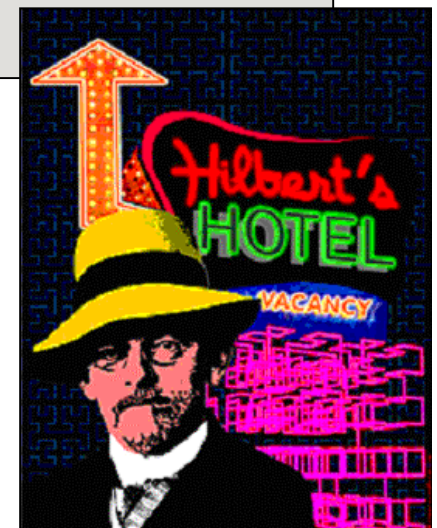
El hotel infinito

Érase una vez un hotel con infinitas habitaciones (numeradas), con el lema: *“Se garantiza el alojamiento de cualquier nuevo huésped”*.

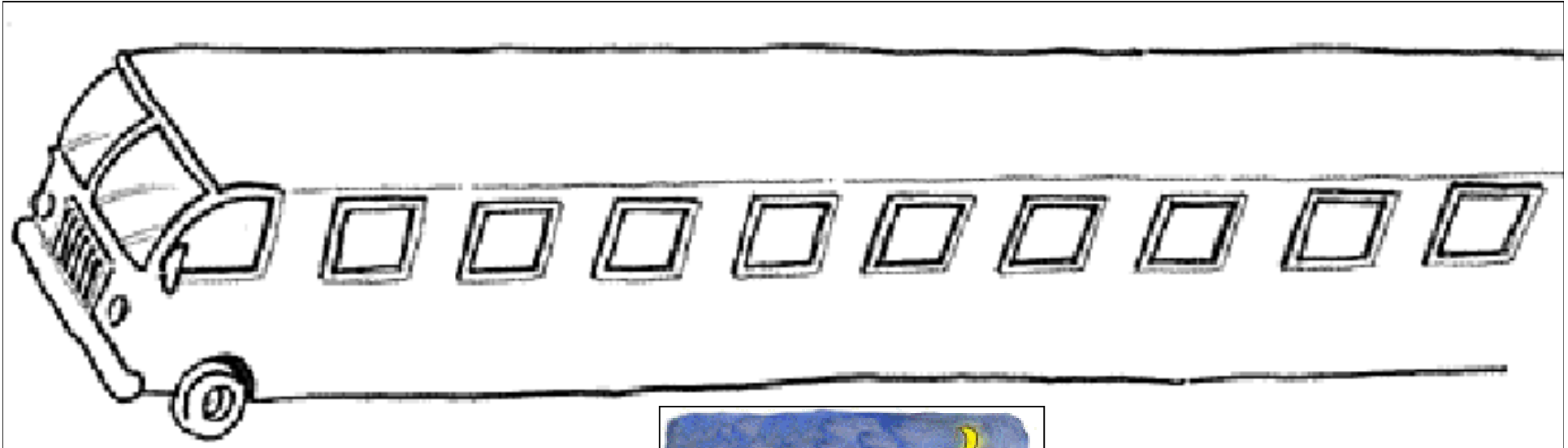
Primera paradoja: llega un hombre al hotel que se encuentra lleno, ... el recepcionista, fiel al lema del *Hotel Infinito* avisa por megafonía a todos sus clientes, para que se cambien de su habitación n a la habitación $n+1$, con lo que la habitación número 1 queda libre para el nuevo huésped...

Duda: ¿Qué pasa con el huésped que se encontraba en la última habitación?..

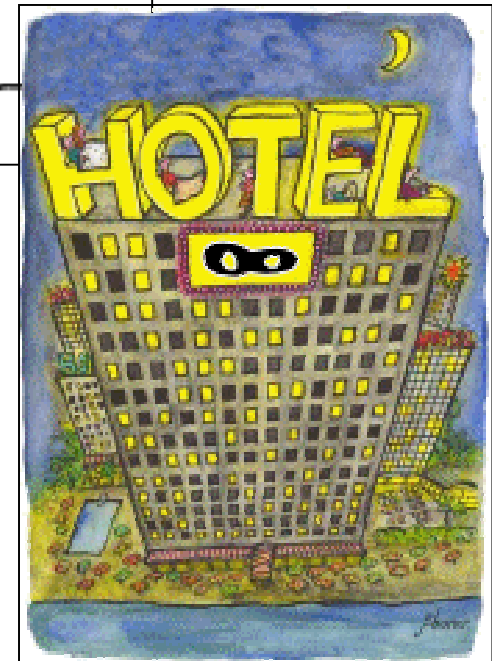
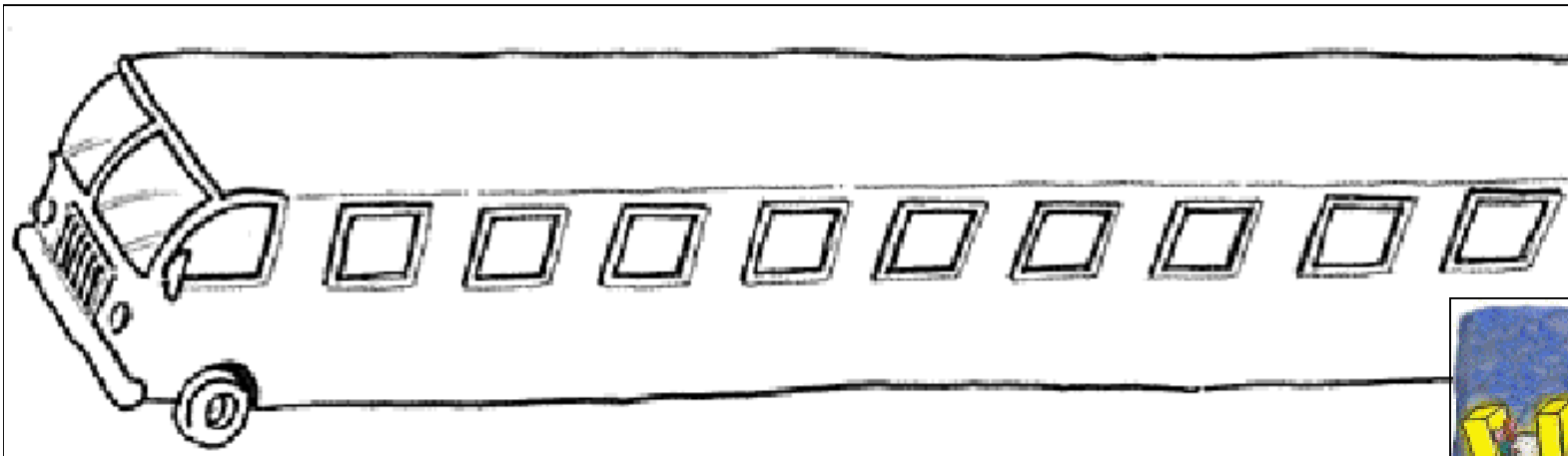
... No existe la “última habitación”...



Segunda paradoja: llega al *Hotel Infinito* (que está lleno) una excursión con infinitos pensionistas (numerados)...



Segunda paradoja: llega al *Hotel Infinito* (que está lleno) una excursión con infinitos pensionistas (numerados)... el recepcionista solicita por megafonía a todos sus clientes que se cambien de su habitación número n a la habitación $2n$. De esa forma todos los huéspedes se mudan a una habitación par, y todas las habitaciones impares quedan libres...



Desapariciones geométricas

Rompecabezas *Abandone la Tierra*, 1914 Sam Loyd (1841-1911)



Just to show the style best calculated to sell in the stores or by street hawkers as a novelty, occasion is taken to illustrate the famous "Get Off the Earth" puzzle, of which over ten millions were sold to the public. The puzzle was printed in bright colors upon two movable pieces (which cannot be shown here). You first see thirteen men, and then only twelve, and the puzzle is to tell which man disappeared.

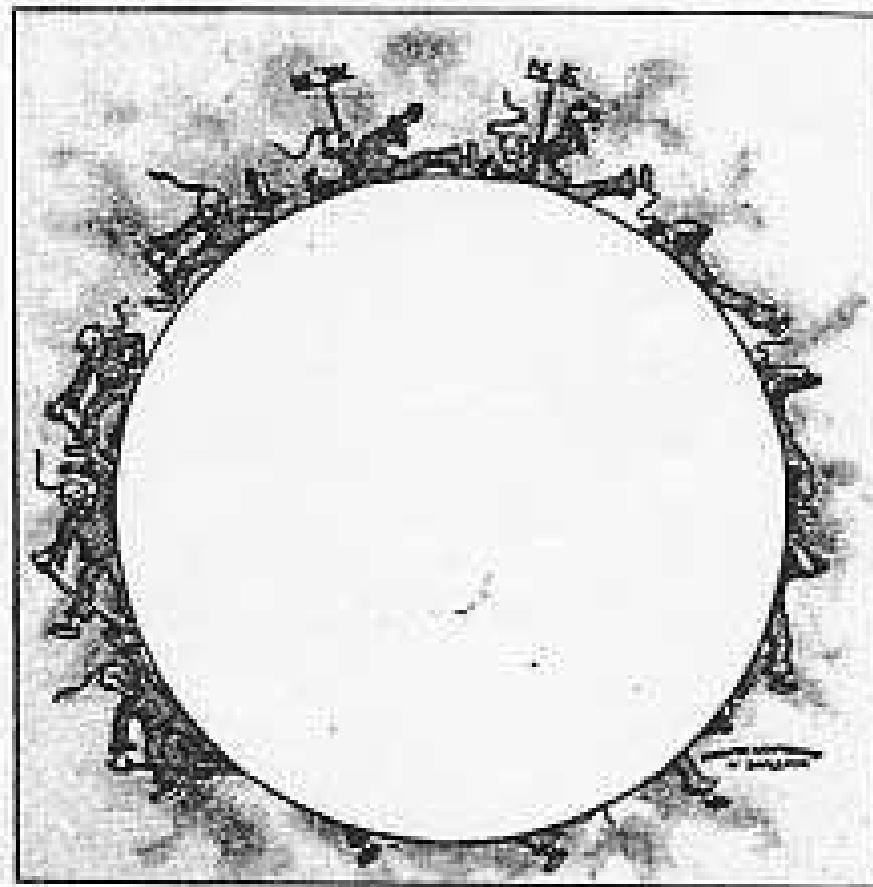
Out of many hundreds of thousands of attempted answers, the most idiotic of which recently appeared in the **LONDON STRAND MAGAZINE**, not one explained the mystery, for which reason Mr. Loyd has issued a new puzzle called **TEDDY AND THE LIONS**, which fully refutes all so-called explanations.

\$1,000 worth of prizes being offered for the best answers received during the year 1909.

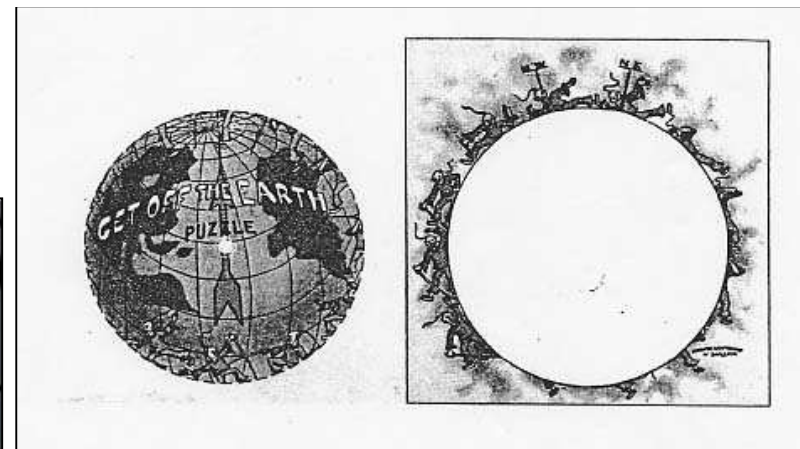
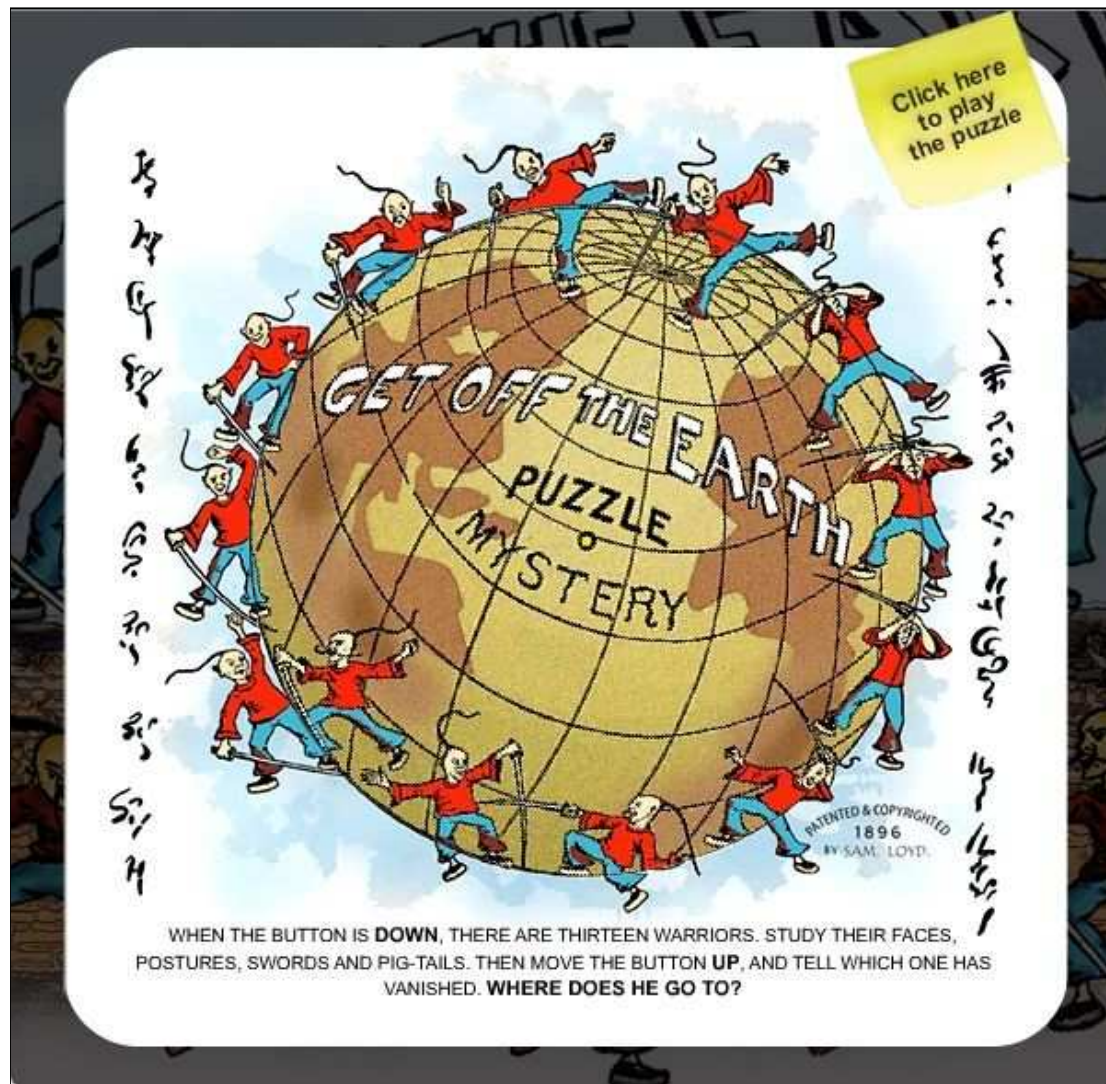


Rompecabezas “Abandone la Tierra”, Sam Loyd

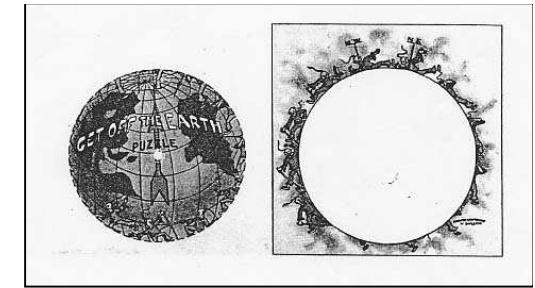
<http://www.mathpuzzle.com/loyd/>



<http://www.samuelloyd.com/>

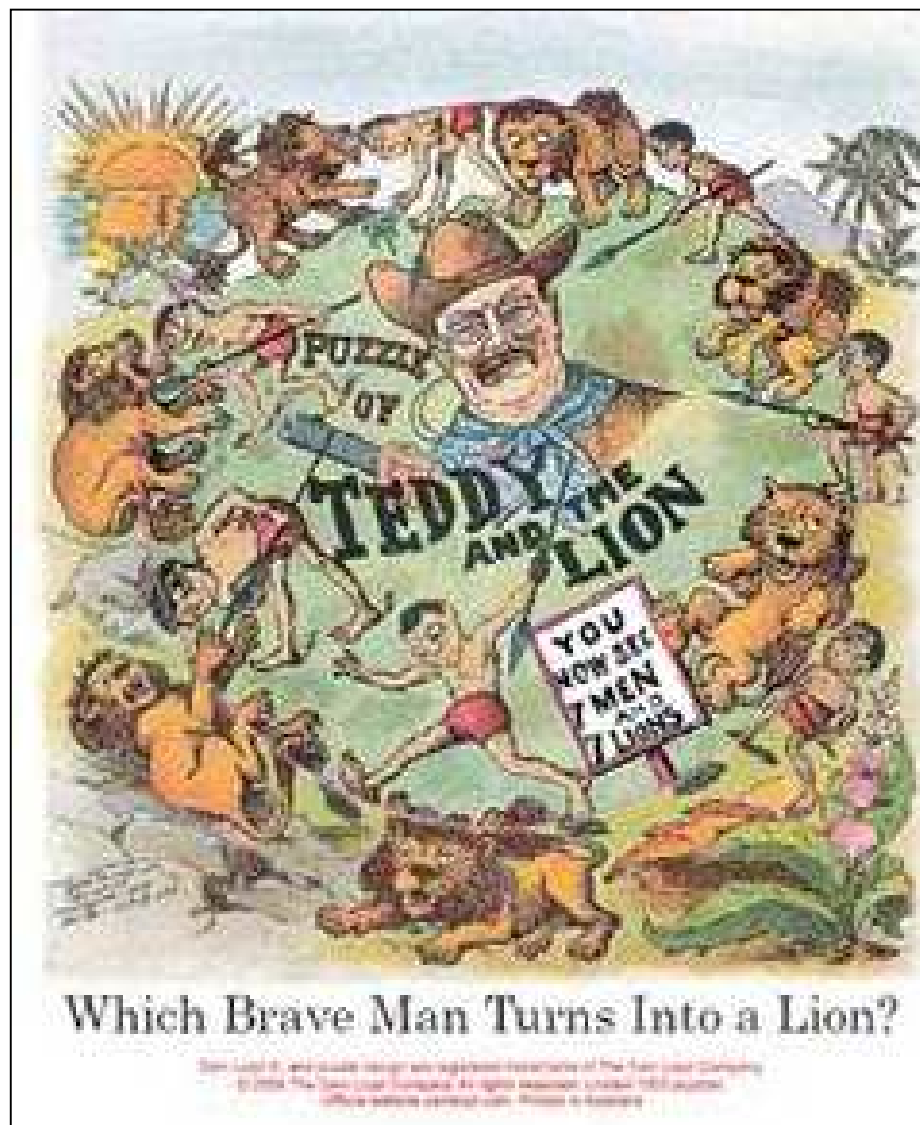


13 guerreros al norte...

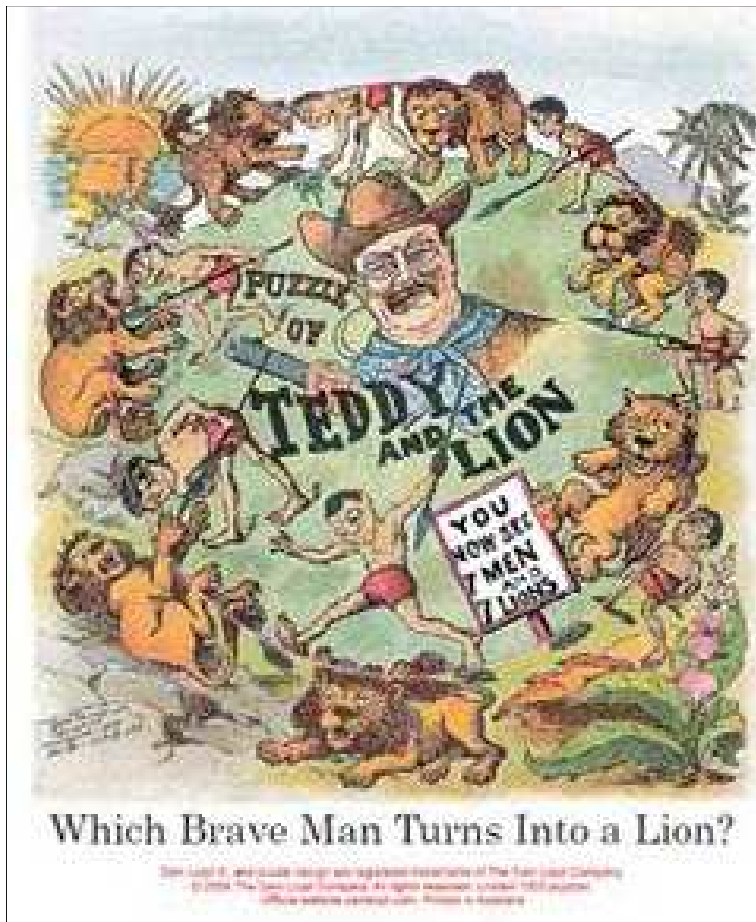


13 guerreros al norte... y 12 guerreros al noroeste

<http://www.samuelloyd.com>



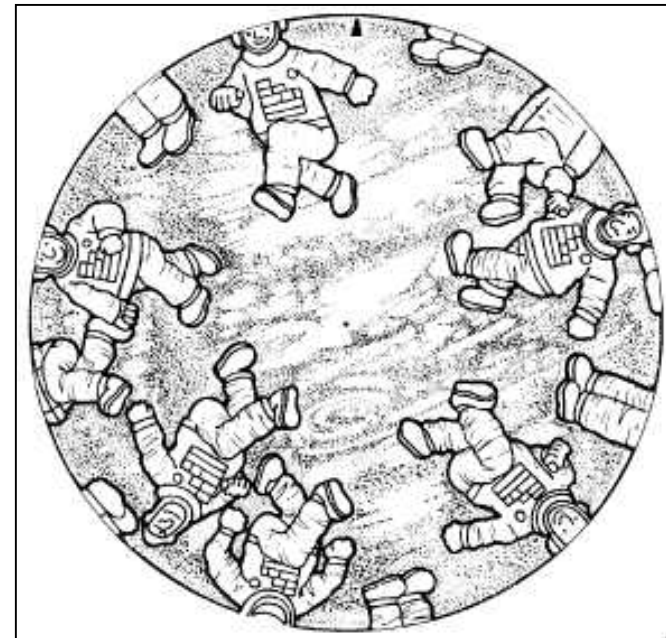
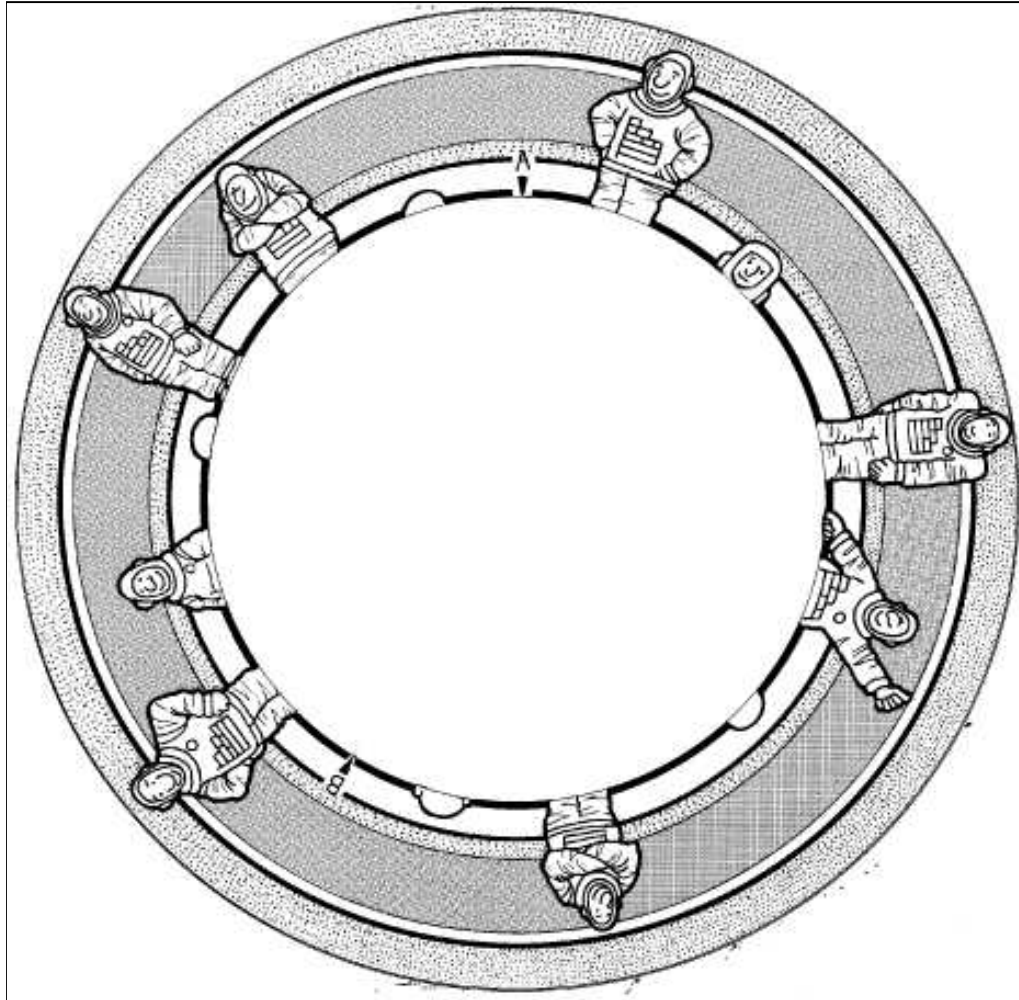
7 hombres y 7 leones... y si giras el círculo central...



6 hombres y 8 leones... ¿qué hombre se ha transformado en león?

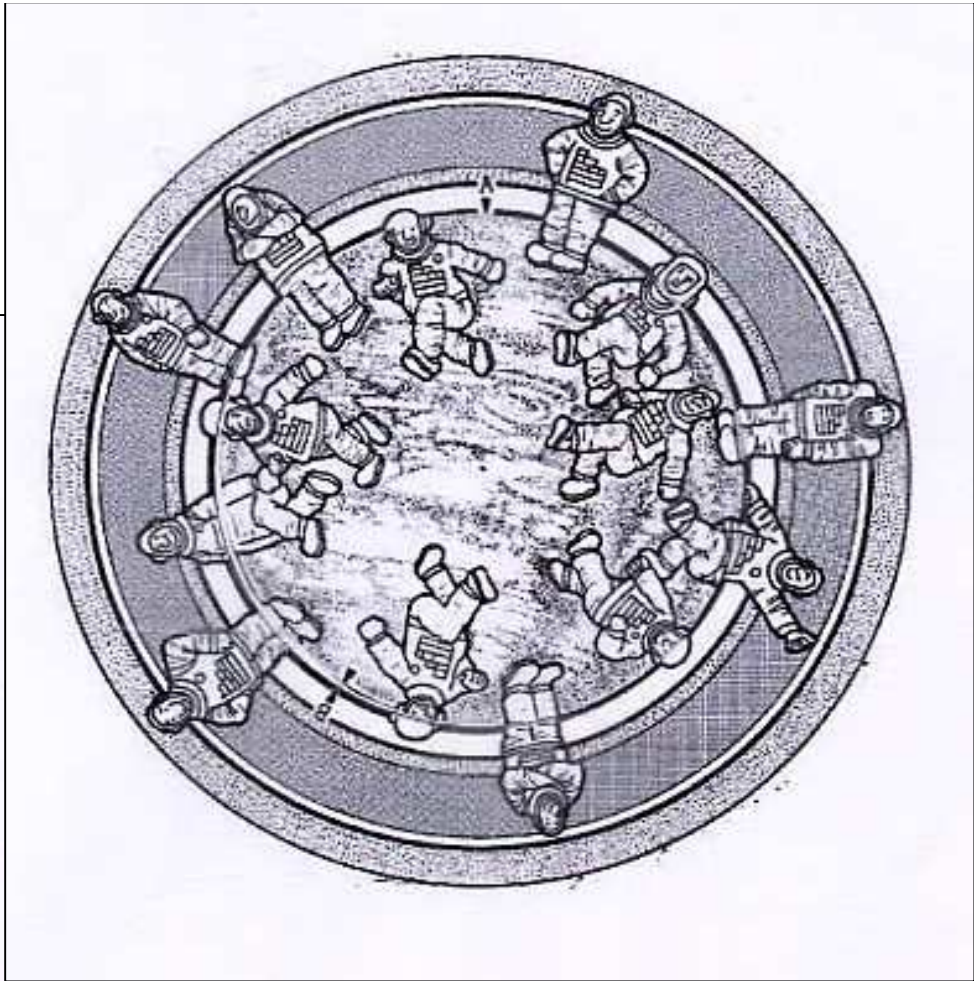
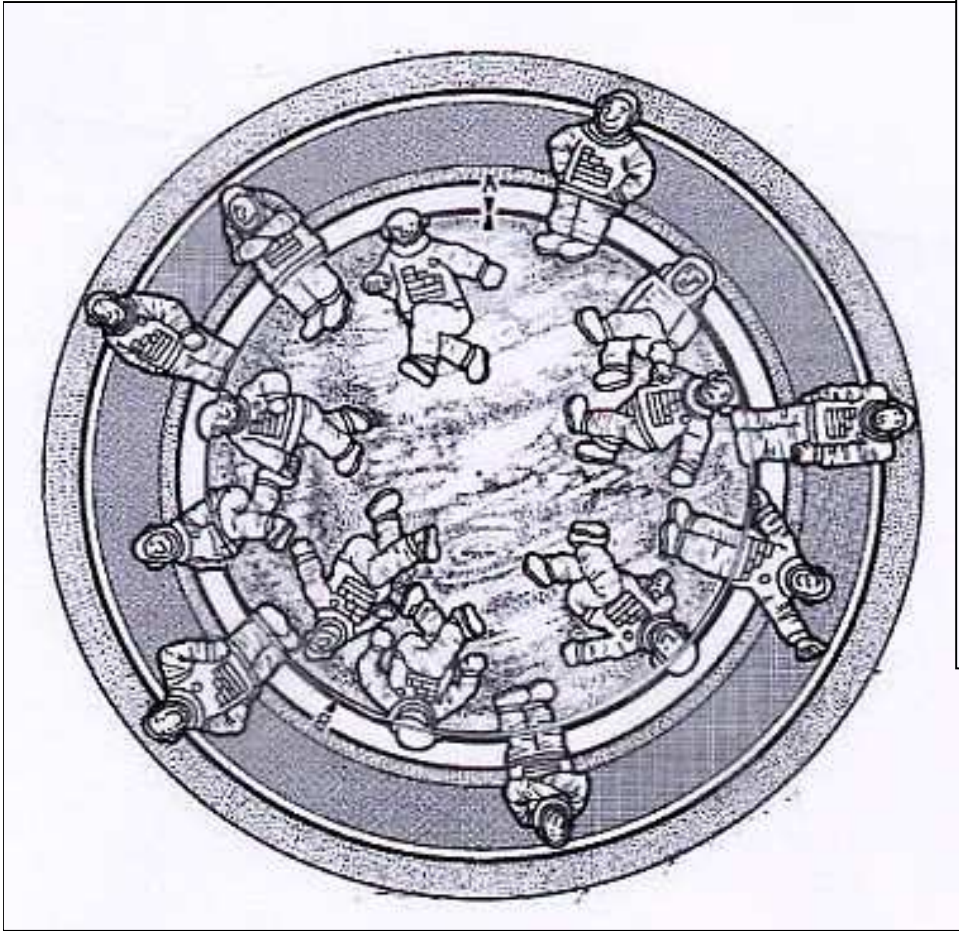
<http://www.aimsedu.org/Puzzle/LostInSpace/space.html>

LOST IN SPACE



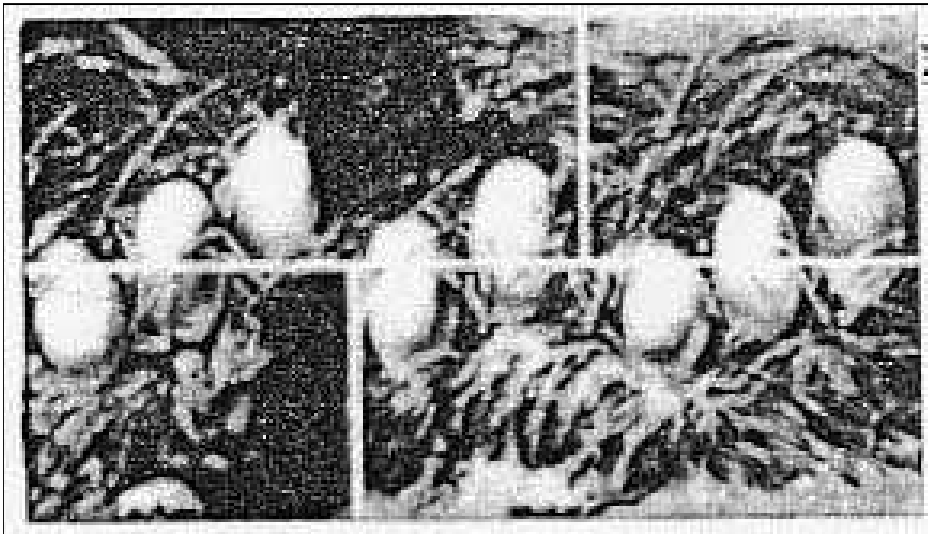
En posición A, **15** astronautas rodean el planeta ... cuando se rota el disco de modo que la flecha apunte a B, ...

LOST IN SPACE

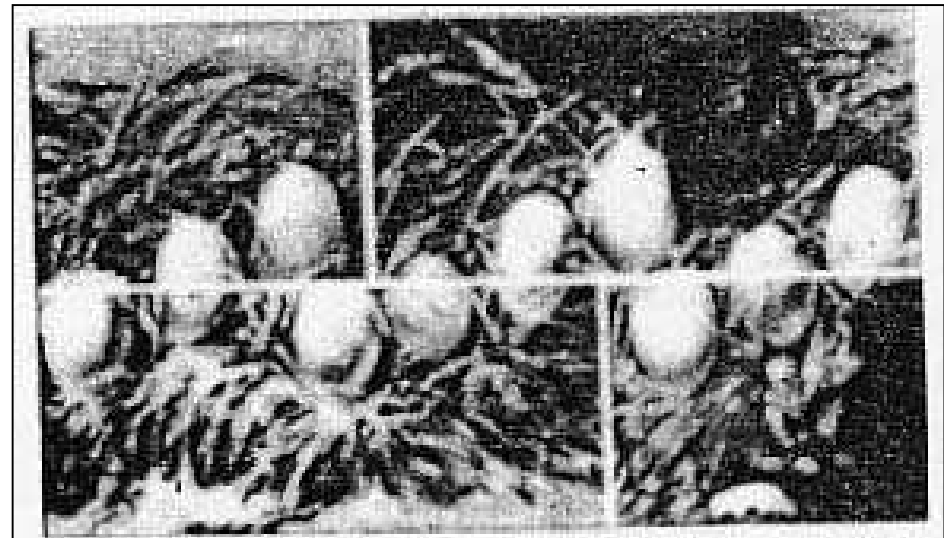


En posición A, **15** astronautas rodean el planeta ... cuando se rota el disco de modo que la flecha apunte a B, quedan sólo **14** astronautas ...

La paradoja del ***huevo desapareciendo***: los cuatro trozos que pueden redistribuirse para obtener **seis, siete, ocho, diez, once o doce** huevos.

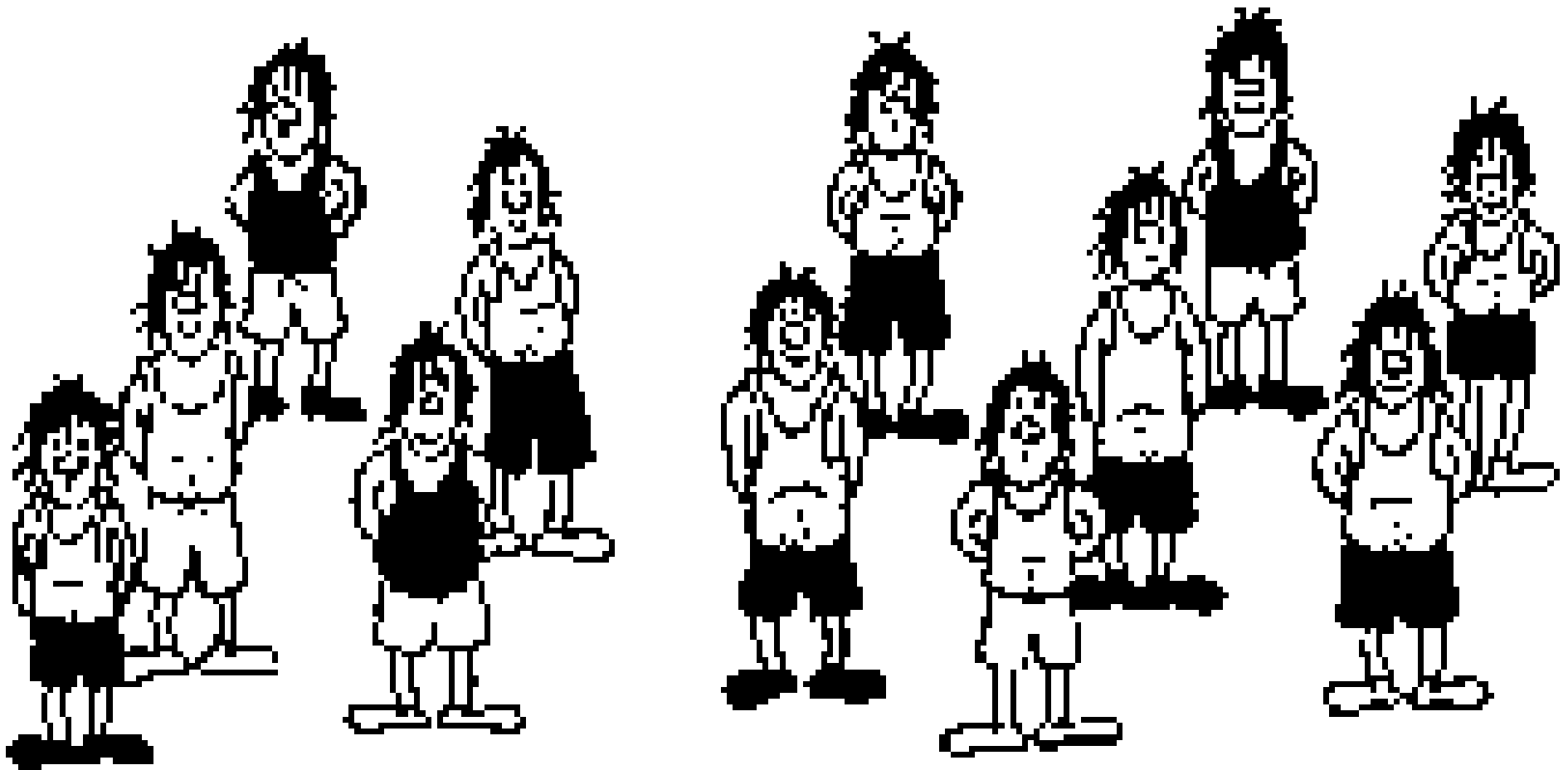


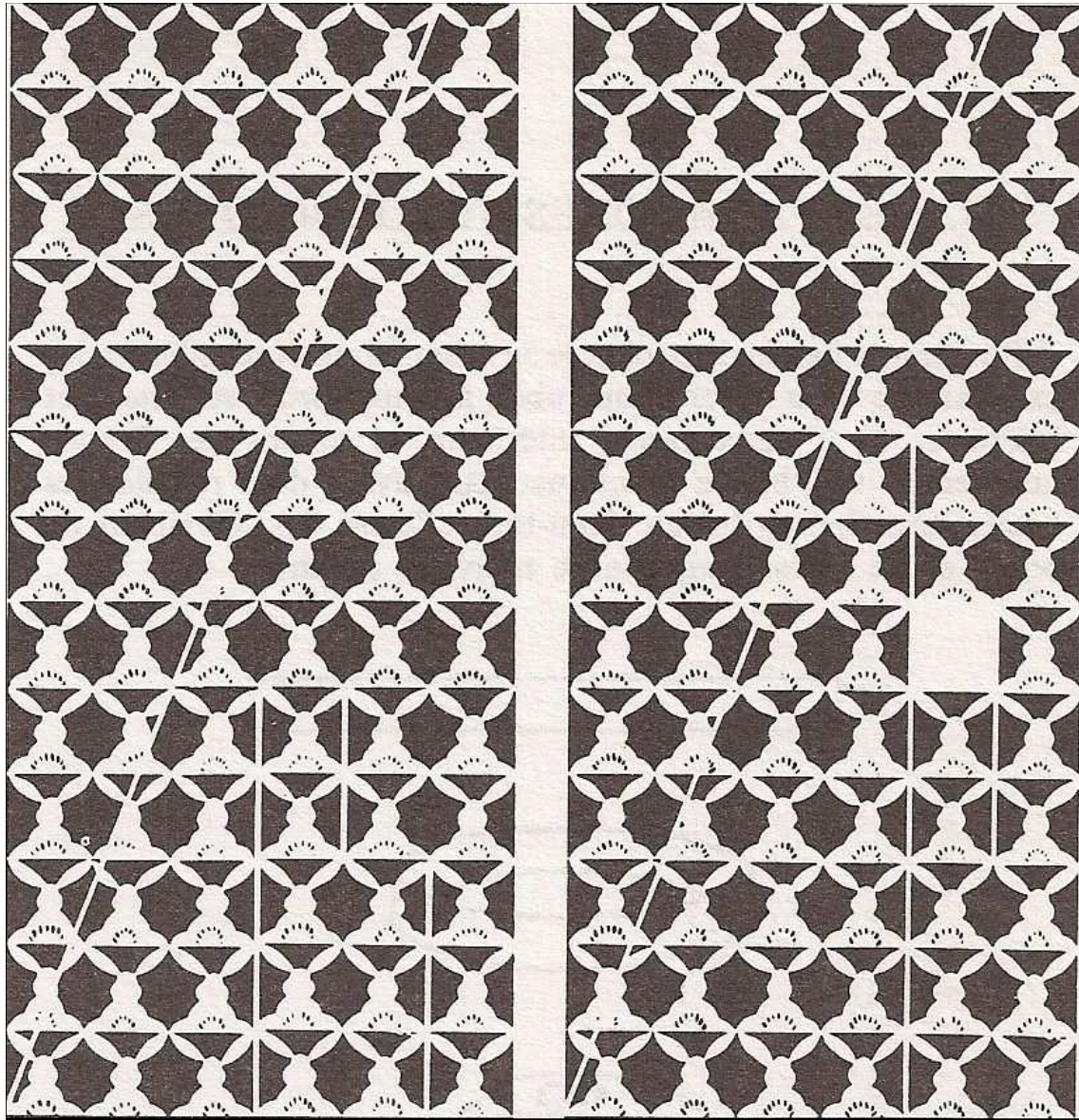
8 huevos



10 huevos

¿Son **12** deportistas...? ¿O serán **13**?





Paradoja de Curry

El primer rectángulo
tiene $6 \times 13 = 78$
conejos.

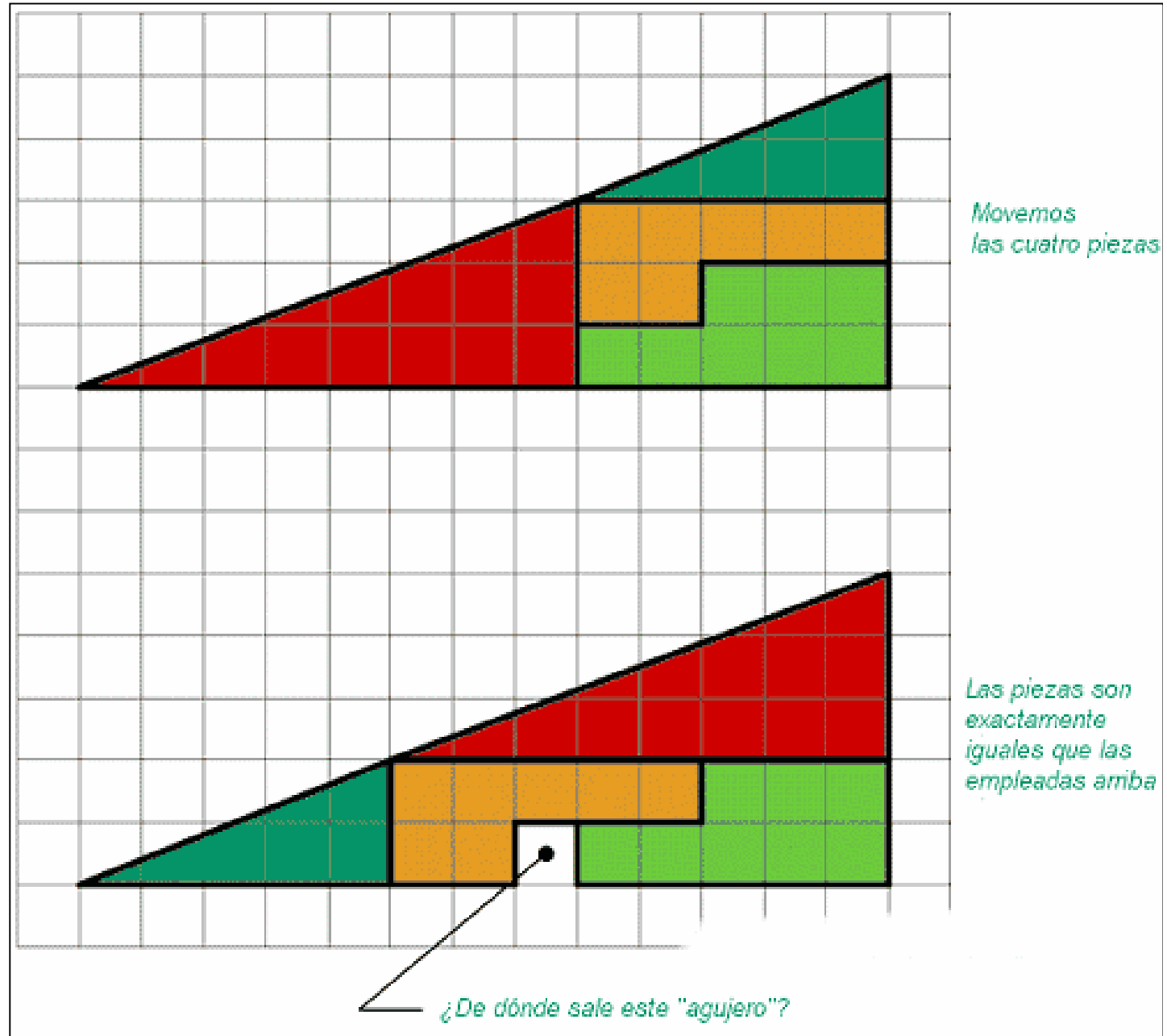
Tras cortar y
recolocar
quedan ¡77 conejos!

¿Dónde ha quedado
el conejo que falta?

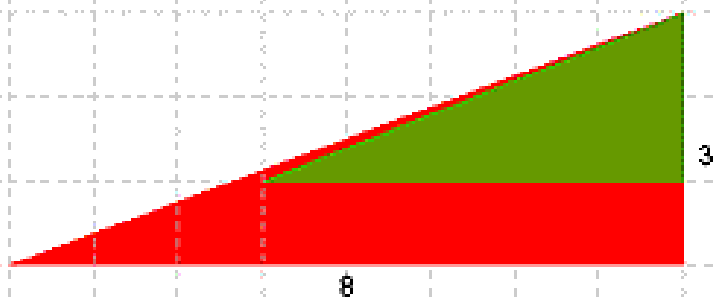


Una paradoja de Hooper

La aparente
pérdida de
superficie es
debida al
reajuste de
los trozos.

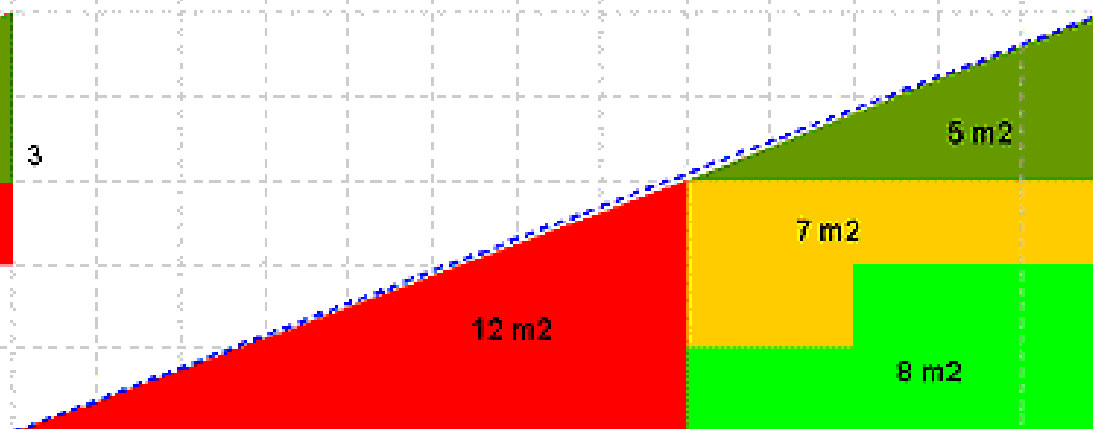


EL TRUCO ESTA EN EL BORDE NEGRO QUE OCULTA QUE LOS DOS TRIANGULOS NO SON PROPORCIONALES
 LOS DOS TRIANGULOS NO TIENEN LA MISMA PENDIENTE



Los dos triángulos no tienen la misma pendiente

$$\frac{8}{3} \neq \frac{5}{2}$$

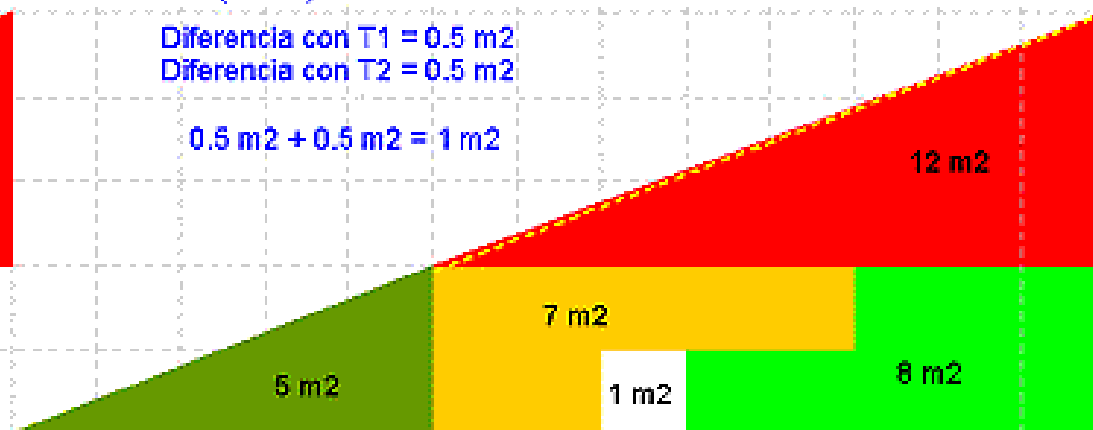
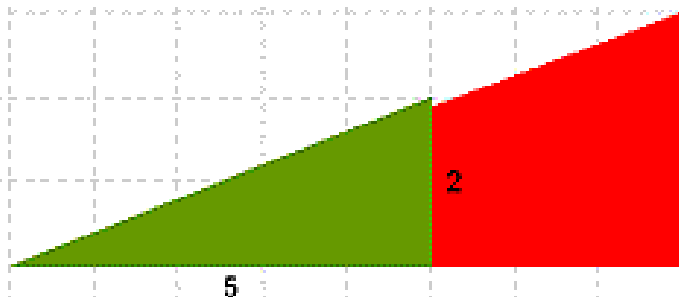


T1 Total 32 m²

Area del triángulo ficticio 13 x 5
 $(13 \times 5) : 2 = 32.5 \text{ m}^2$

Diferencia con T1 = 0.5 m²
 Diferencia con T2 = 0.5 m²

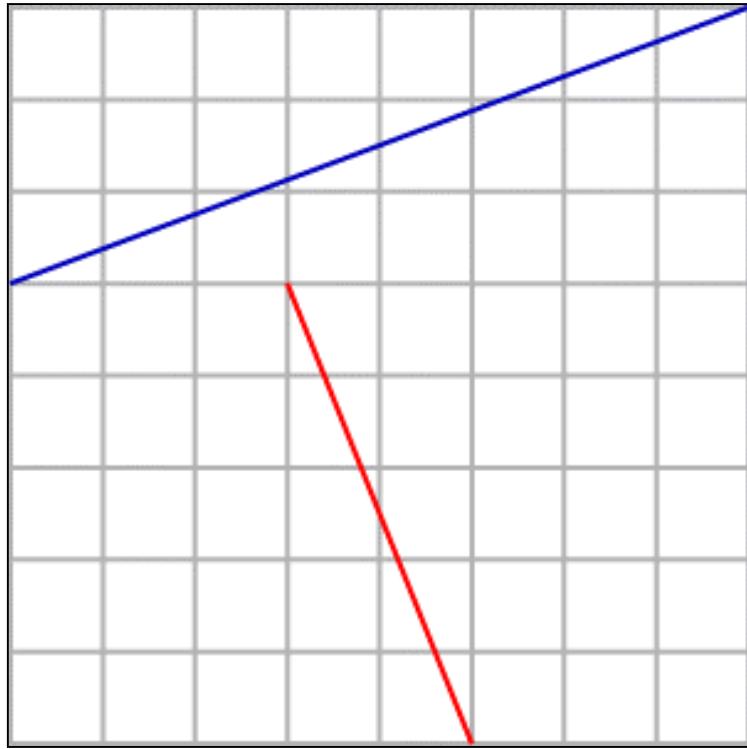
$$0.5 \text{ m}^2 + 0.5 \text{ m}^2 = 1 \text{ m}^2$$



T2 Total 33 m²

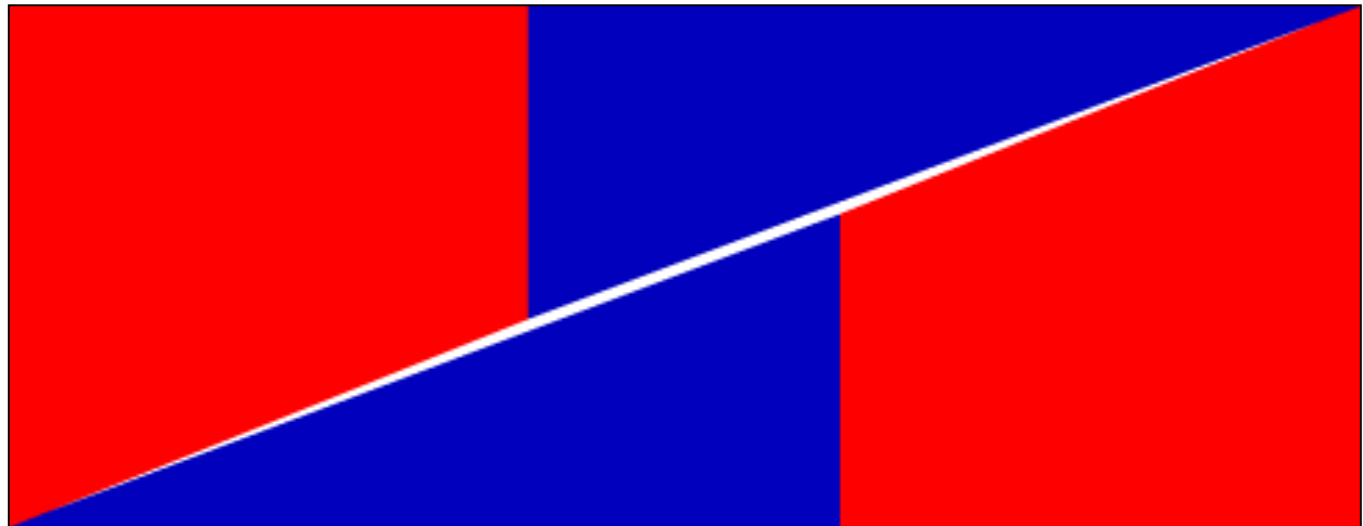
Demostración: $64=65$

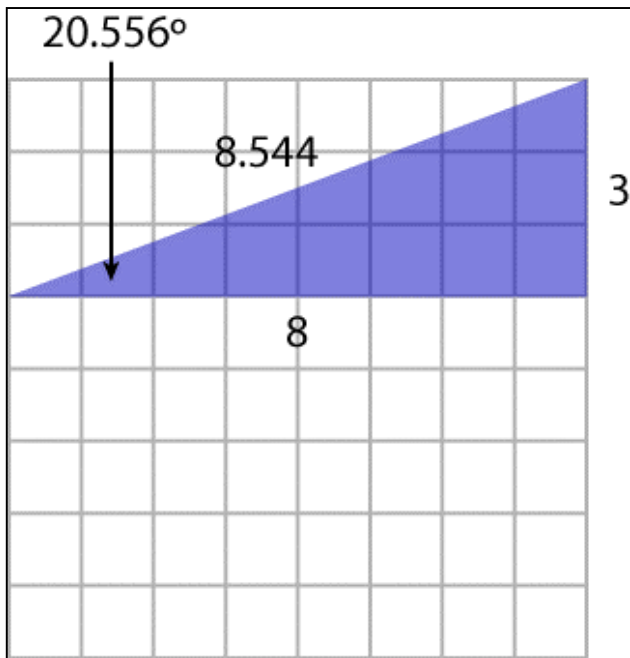
$$64 = 65 ?$$



Los segmentos azules generan dos triángulos y los rojos dos trapezoides, se reajustan...

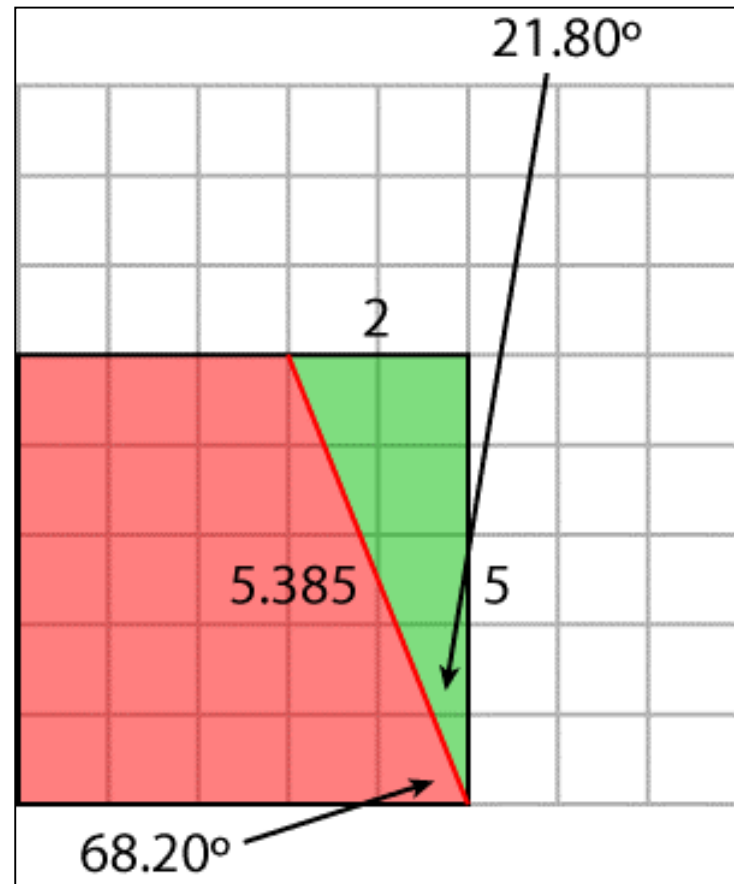
¿Ves la parte blanca? Es un paralelogramo con área 1.

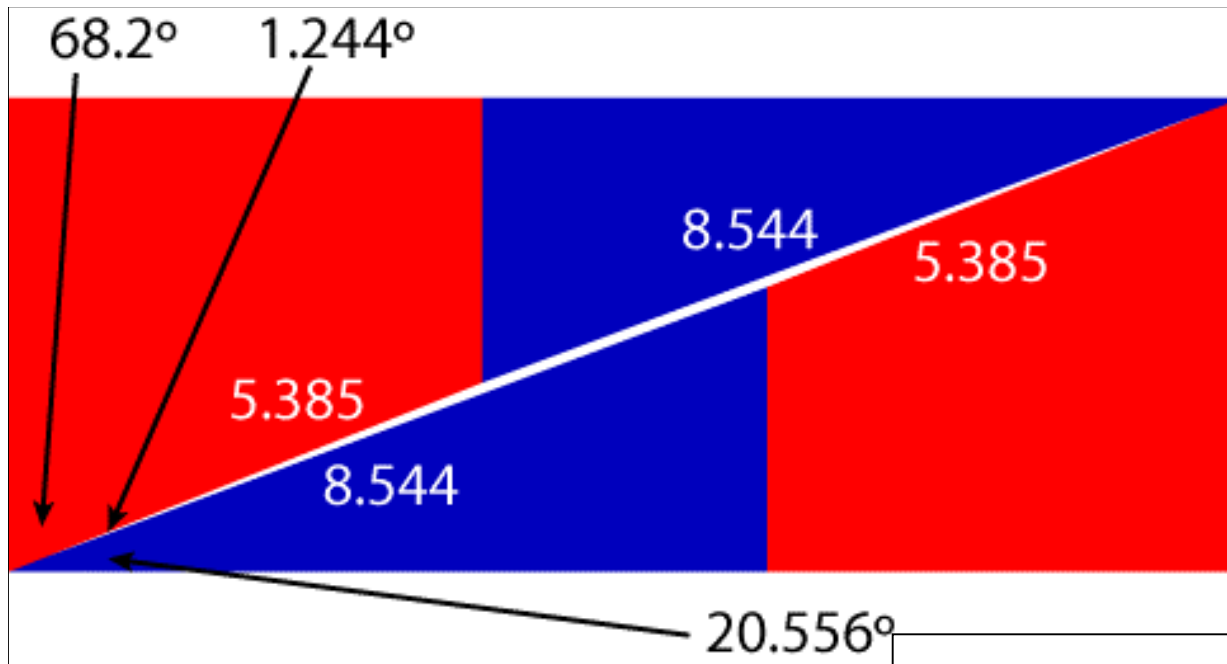




$3^2 + 8^2 = h^2$, así la hipotenusa es la raíz cuadrada de 73 y el ángulo menor 20.556°

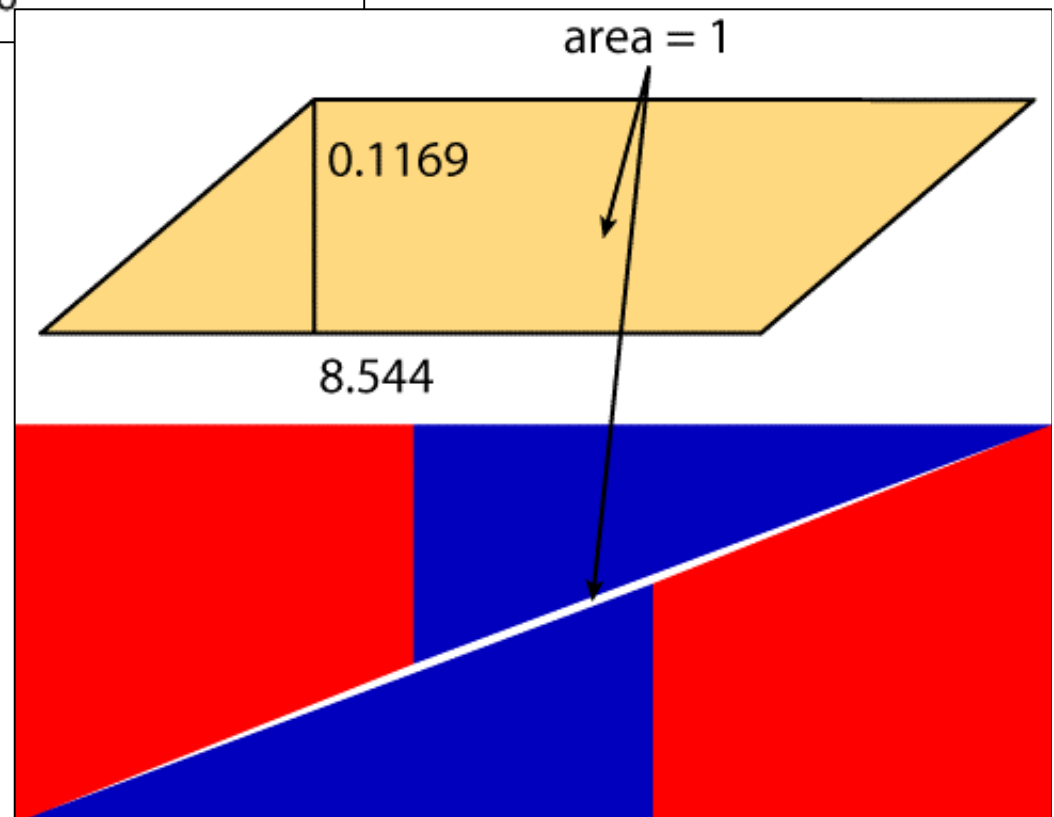
$2^2 + 5^2 = h^2$, así la hipotenusa es la raíz cuadrada de 29 y el ángulo menor es de 21.80°.
 El triángulo verde es el que se inserta en el cuadrado 5 x 5 para pegarse al trapecoide rojo, cuyo ángulo menor debería ser entonces de $90^\circ - 21.80^\circ = 68.20^\circ$.

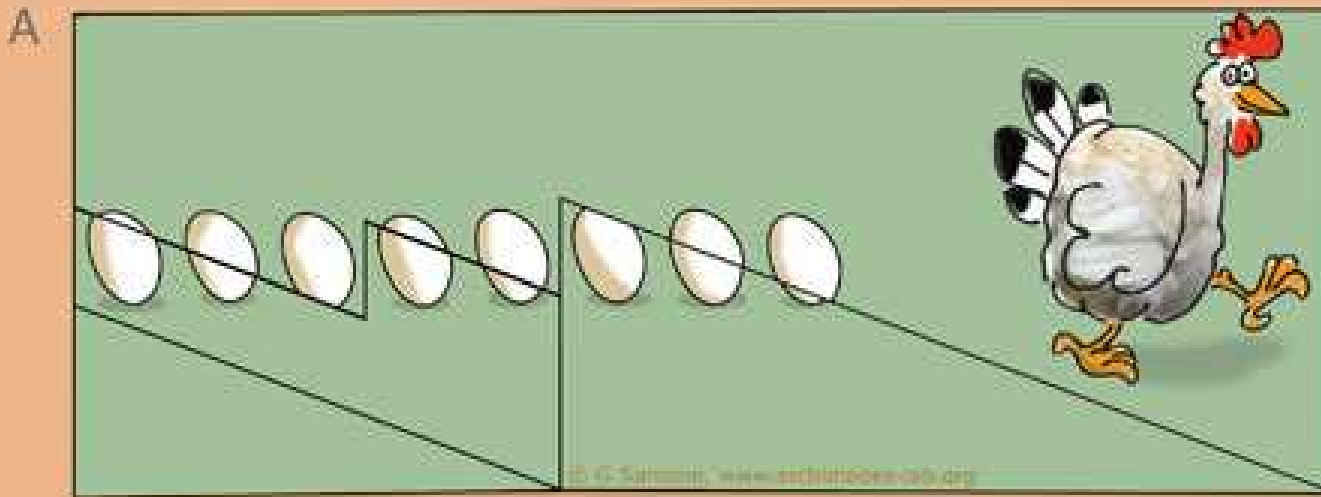




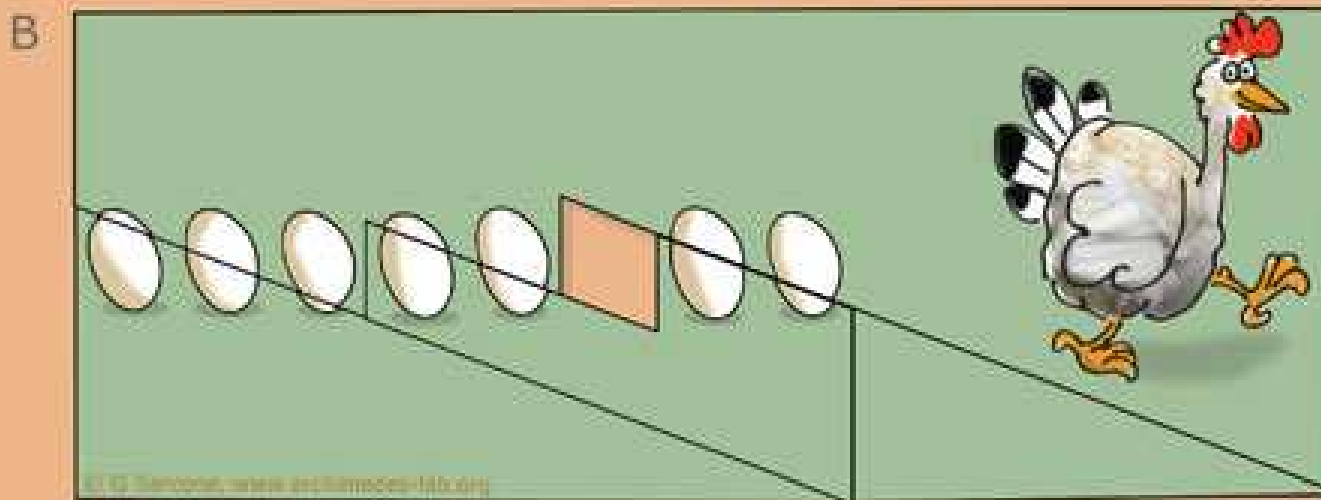
El ángulo agudo del paralelogramo blanco es
 $90^\circ - 68.2^\circ - 20.556^\circ = 1.244^\circ$.

Así, el área del paralelogramo blanco es:
 $8.544 \times \text{sen}(1.244) \times 5.385 = 0.9988\dots$





By permuting the triangular pieces an egg disappears. How does it happen?



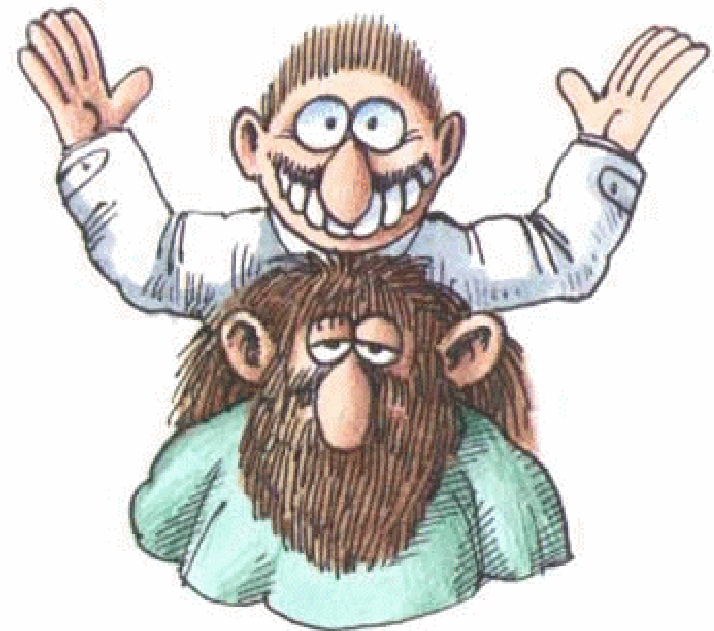
© G. Sarcone, www.archimedes-lab.org

http://www.archimedes-lab.org/Gallery/new_optical_illusions/index.html

Paradoja del barbero

En Barbilandia, hay un único barbero, **Jon**, que afeita a los que no se afeitan a sí mismos.

¿Quién afeita al barbero de Barbilandia?



Si **Jon no se afeita a sí mismo, será una de las personas de Barbilandia que no se afeitan a sí mismas... con lo cual **Jon** debería de afeitarse, siendo por lo tanto una de las personas que se afeitan a sí mismas... no debiendo por tanto afeitarse.**

Si **Jon** no se afeita a sí mismo, será una de las personas de Barbilandia que no se afeitan a sí mismas... con lo cual **Jon** debería de afeitarse, siendo por lo tanto una de las personas que se afeitan a sí mismas... no debiendo por tanto afeitarse.

Solución: Russel define su famosa *teoría de tipos*, donde se eliminan los conjuntos auto-contradictorios, así que **Jon**, el barbero de Barbilandia...

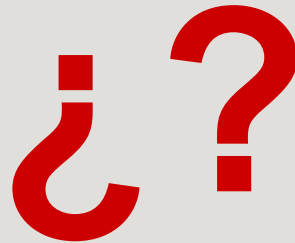
Si **Jon** no se afeita a sí mismo, será una de las personas de Barbilandia que no se afeitan a sí mismas... con lo cual **Jon** debería de afeitarse, siendo por lo tanto una de las personas que se afeitan a sí mismas... no debiendo por tanto afeitarse.

Solución: Russel define su famosa *teoría de tipos*, donde se eliminan los conjuntos auto-contradictorios, así que **Jon**, el barbero de Barbilandia...

¡... no existe!

Formas geométricas...

¿En que aspecto de la vida aparecen representadas más formas geométricas? ¿En arquitectura? ¿Arte?



Formas geométricas...

¿En que aspecto de la vida aparecen representadas más formas geométricas? ¿En arquitectura? ¿Arte?

Parece que no... existen unos **350** tipos diferentes de **pasta**... y aparecen cada día más...

Las siguientes son sólo unas muestras (ordenadas alfabéticamente) disponibles en los supermercados italianos...

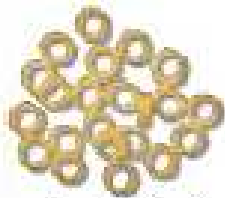


Alfabeto

Abissini
Acini di pepe
Agnoli
Anellini
Anelloni
Anolini



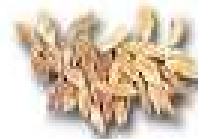
Agnolotti



Anelli lisci



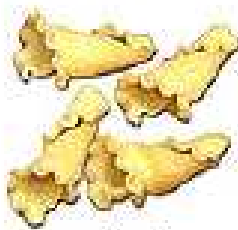
Anelli rigati



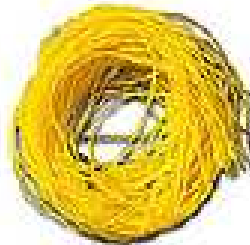
Armелlette



Avemarie



Ballerine



Barbina



Boccolotti (pasta lunga)



Bucatini (pasta lunga)

Bavette
Bombonini
Brichetti



Cappelletti



Cavatappi



Capelli d'angelo



Chifferi



Conchiglie





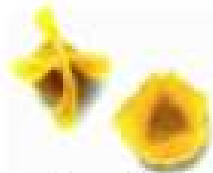
Eliche con spinaci



Eliche tricolori



Elicoidali tricolore



Fagottini



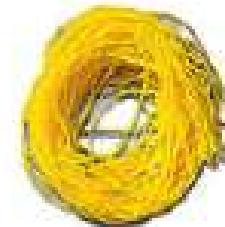
Farfalle



Farfalline



Fusilli



Fidelini



Filini



Fettuccine (pasta lunga)



Fagioloni



Farfalle rotonde



Festonati



Fettucce

Farfalloni
Fischietti
Fili d'angelo
Fiori di sambuco
Gentili rigati



Gnocchetti sardi



Gnocchi di patate



Gomiti



Garganelli



Gnocchi



Gigli



Genovesini rigati



Gemelli



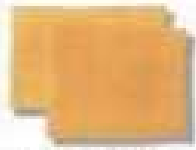
Ghiottole



Gramigna



Gnocchetti di ziti



Lasagne



Lumaconi giganti



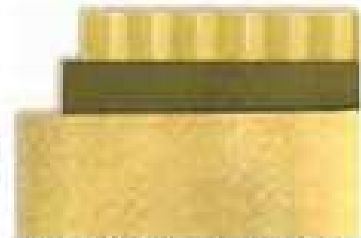
Lumaconi rigati



Linguettine (pasta lunga)

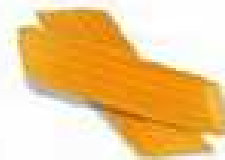


Linguine (pasta lunga)



Lasagne ondulate, con spinaci e normali

Lagane
Lancette
Lentine



Manicotti



Maccheroni rigati



Mezzelune



Mezze penne



Millerighe giganti



Mezzi cocci



Mezzemani (pasta lunga)



Maccheroncini (pasta lunga)





Macaroni (pasta lunga)



Mafalde

Mista

Malfatti
Maltagliati
Mostaccioli



Nidi fettucce



Nidi Pappardelle



Nidi Capellini



Occhi di pernice



Ondine



Orecchiette



Orzo



Orecchiette
tricolori



Lasagne



Linguine



Macaroni



Manicotti

Nocchie
grosse
Occhialini
Occhioni



Panzerotto



Penne lisce



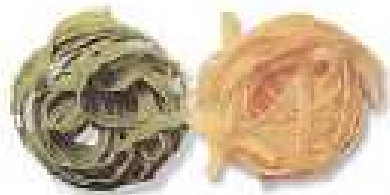
Pennette



Pennette rigate



Pennine lisce



Paglia e fieno



Pennoni rigati



Pepe bucato



Penne zita



Pappardelle



Penne agli spinaci



Perciati

- Papardelle
- Passatelli
- Pater noster
- Peperini
- Perciatelli
- Picagge verdi
- Pipe rigate
- Pisellini
- Pitaloni
- Puntette



Quadrucchi



Piombi



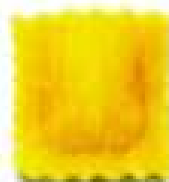
Perline



Penne a candela



Ravioli



Ravioloni



Rigatoni

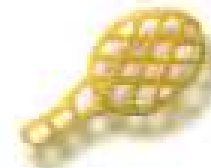


Rocchetti



Regina (pasta lunga)

- Raganelle
- Risetto
- Rosmarino
- Rotelloni



Racchette



Ruote



Radiatori



Risone



Rotini



Sigarette



Spaghetti alla chitarra



Stelline col buco



Strigoli



Strozzapreti



semi di melone



Spaghetti (pasta lunga)



Spaghettoni (pasta lunga)



Stellette



Spirali

- Sedanini
- Scucuzun
- Semi di cicoria
- Semi di grano
- Semi di peperoni
- Sorpresine
- Stelle

- Stivaletti
- Tagliardi
- Tajarin
- Tempesta
- Trebuchi
- Trenette
- Viandina
- Vincisgrassi



Tagliatelle



Tagliolini



Tortellino



Tortiglione



Tagliatelle spianate



Tortiglioni



Trottole



Trucciolini



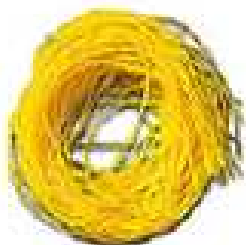
Taglierini al nero di seppia



Trofie



Tubetti



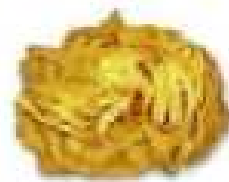
Tagliolini a nido



Tufoli



Tubettini



Tagliatelle zigrinate



Tofe tricolori



Tripoline



Tempestina



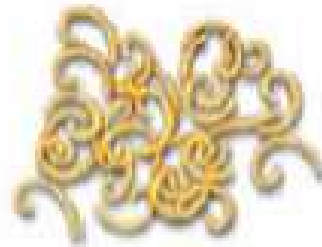
Vermicelli (pasta lunga)



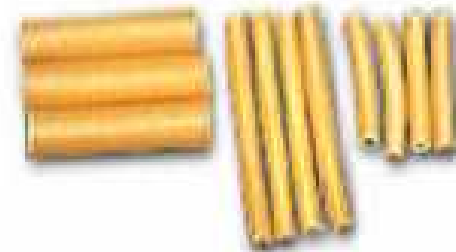
Ziti (pasta lunga)



Zitoni (pasta lunga)



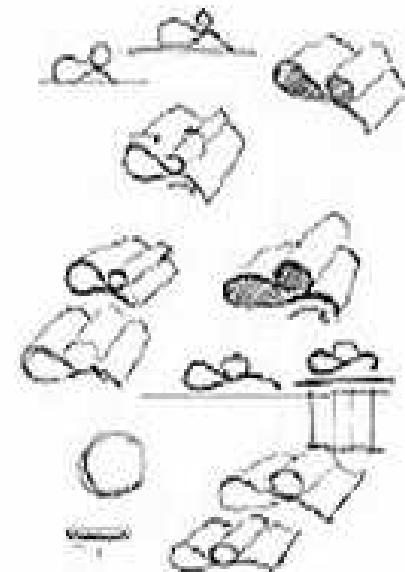
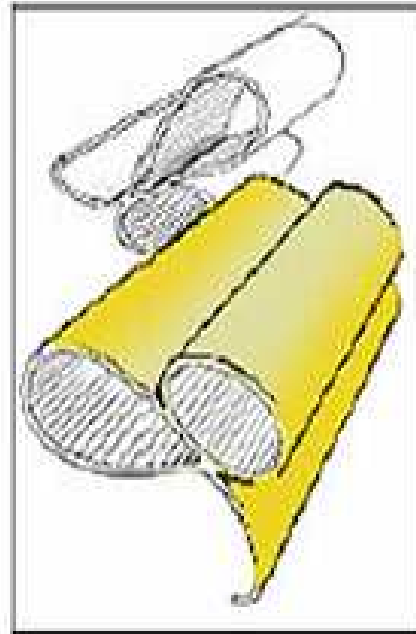
Zitellini



Ziti tagliati

...and to end,
New pasta:
Marille,
designed by
Giorgio Giugiaro

To get more information
about pasta visit also:



La paradoja del condenado

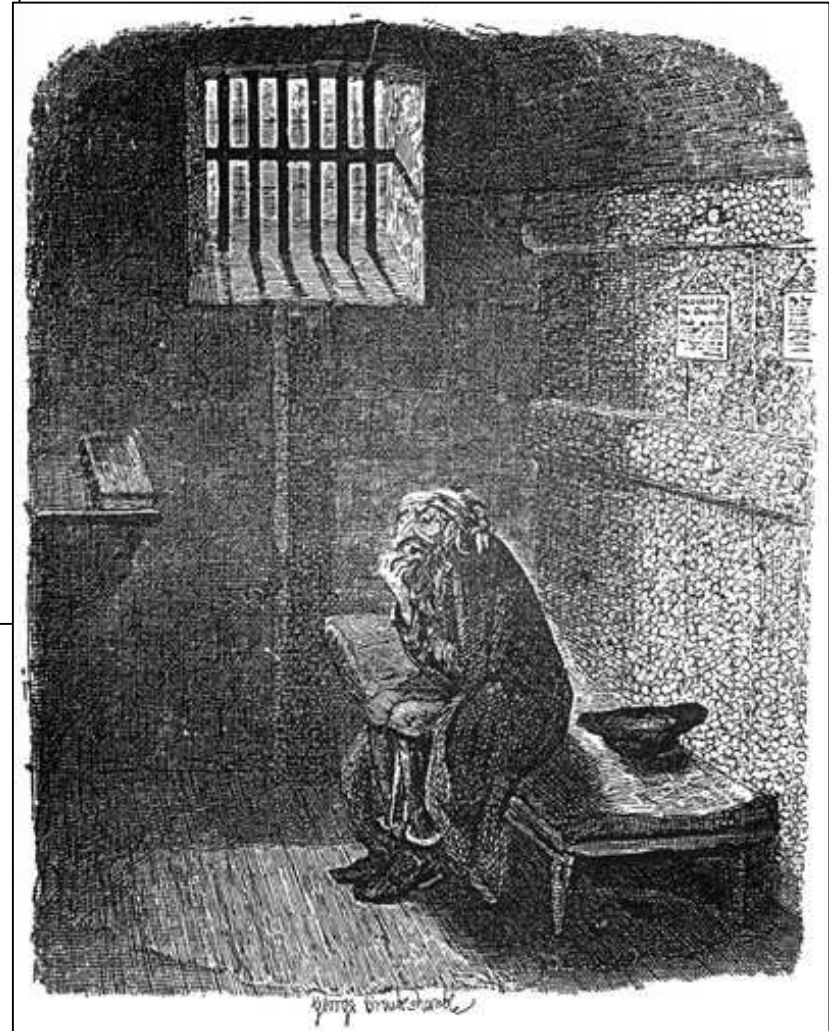
En la Edad Media, un rey de reconocida sinceridad, pronuncia su sentencia:



Una mañana de este mes serás ejecutado, pero no lo sabrás hasta esa misma mañana, de modo que cada noche te acostarás con la duda, que presiento terrible, de si esa será tu última sobre la Tierra...

En la soledad de su celda, el reo argumenta:

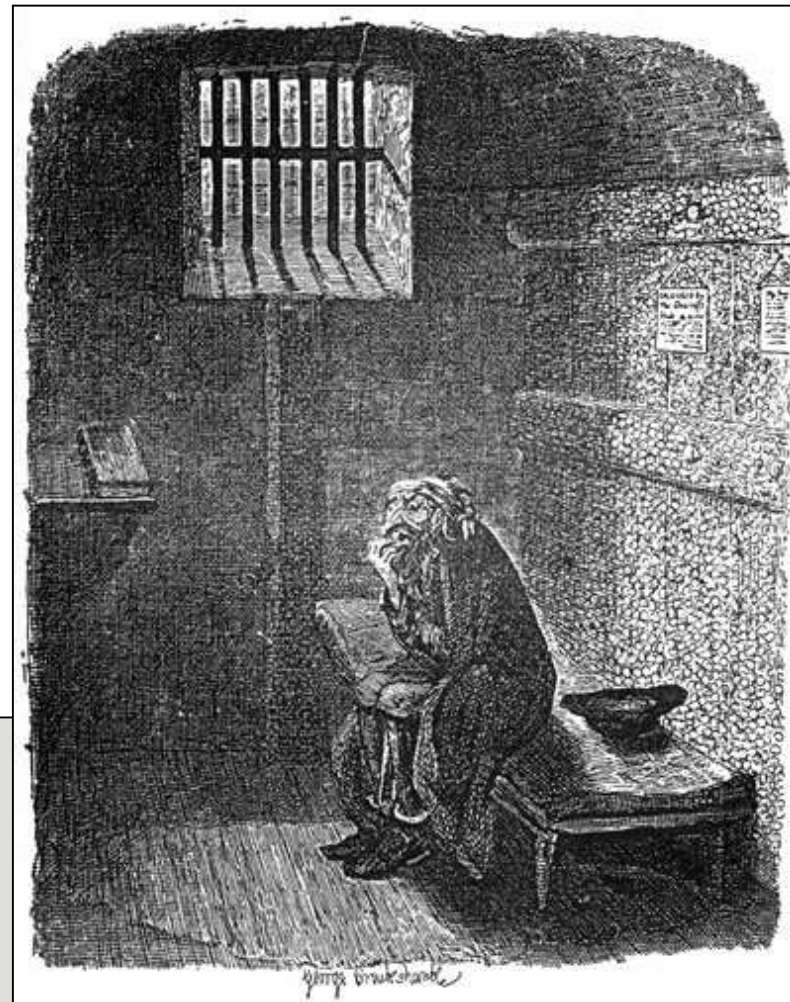
Si el mes tiene 30 días, es evidente que no podré ser ajusticiado el día 30, ya que el 29 por la noche sabría que a la mañana siguiente habría de morir. Así que el último día posible para cumplir la sentencia es el 29. Pero entonces, el 28 por la noche tendré la certeza de que por la mañana seré ejecutado...



En la soledad de su celda, el reo argumenta:

Si el mes tiene 30 días, es evidente que no podré ser ajusticiado el día 30, ya que el 29 por la noche sabría que a la mañana siguiente habría de morir. Así que el último día posible para cumplir la sentencia es el 29. Pero entonces, el 28 por la noche tendré la certeza de que por la mañana seré ejecutado...

Continuando de este modo, el prisionero concluye triunfalmente que la condena es de **ejecución imposible**, y comienza a dormir aliviado, aguardando que transcurra el mes para pedir su libertad...



Sin embargo, sorpresa, un día cualquiera, por ejemplo el fatídico día **13 (era martes)**, el verdugo, con el hacha afilada en la mano, despierta al reo... que instantes más tarde es decapitado.

La sentencia se cumple literalmente.

¿Dónde ha fallado el razonamiento del condenado?



Una solución puede pasar por la noción fundamental de que no es lo mismo el día 30, más el día 29, más el día 28, etc., que **el mes**.

Un conjunto es diferente y contiene cualidades distintas de la mera adición de sus partes.

El análisis individual, día por día, por parte del prisionero es irreprochable... Pero el defecto de su argumento aparece cuando atribuye al conjunto **(este mes)** las mismas y exclusivas cualidades que poseían sus partes **(cada día)**, no advirtiendo que el conjunto **mes** ha incorporado algunas características: entre otras la de contener...

Una solución puede pasar por la noción fundamental de que no es lo mismo el día 30, más el día 29, más el día 28, etc., que **el mes**.

Un conjunto es diferente y contiene cualidades distintas de la mera adición de sus partes.

El análisis individual, día por día, por parte del prisionero es irreprochable... Pero el defecto de su argumento aparece cuando atribuye al conjunto **(este mes)** las mismas y exclusivas cualidades que poseían sus partes **(cada día)**, no advirtiéndole que el conjunto **mes** ha incorporado algunas características: entre otras la de contener...

... días sorpresa.

Hacia el siglo III, el filósofo chino Hui Tzu afirmaba:

Un caballo bayo y una vaca parda son tres: el caballo, la vaca, y el conjunto de caballo y vaca.

El razonamiento no es trivial, y es la esencia de la paradoja del condenado.



+



= ¿?

Hacia el siglo III, el filósofo chino Hui Tzu afirmaba:

Un caballo bayo y una vaca parda son tres: el caballo, la vaca, y el conjunto de caballo y vaca.

El razonamiento no es trivial, y es la esencia de la paradoja del condenado.

!



+



= 3!

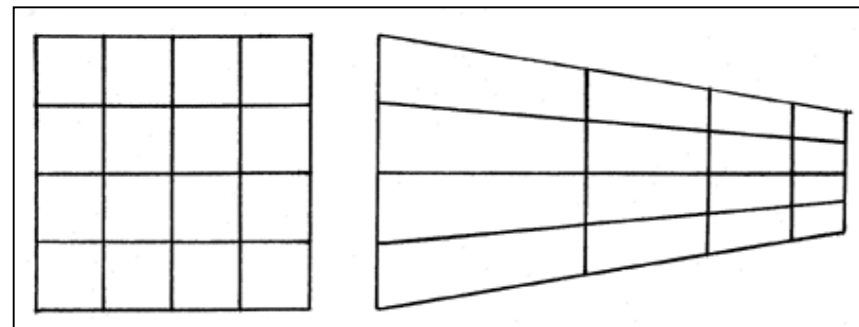
Anamorfosis

Una **anamorfosis** es una deformación reversible de una imagen a través de procedimientos matemáticos u ópticos.

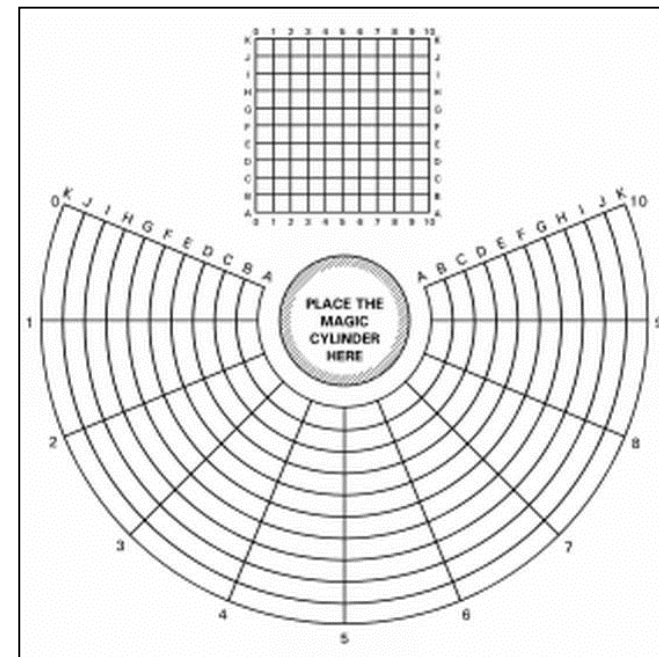
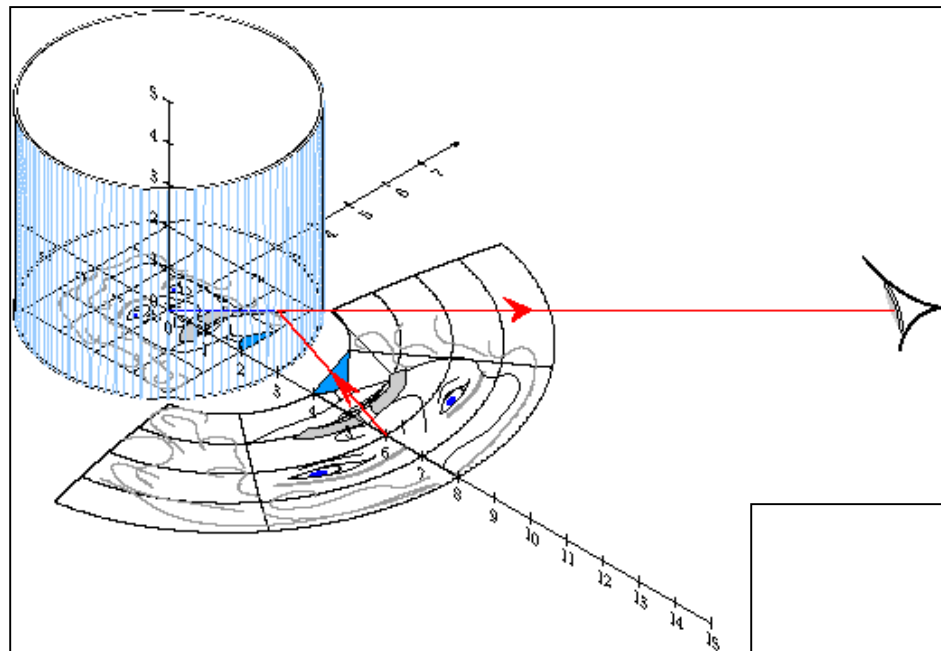


En este grabado de Dürero (velo de Alberti), el artista usa un retículo para guardar las proporciones de la modelo.

¿Y si no se coloca el enrejado de forma perpendicular?

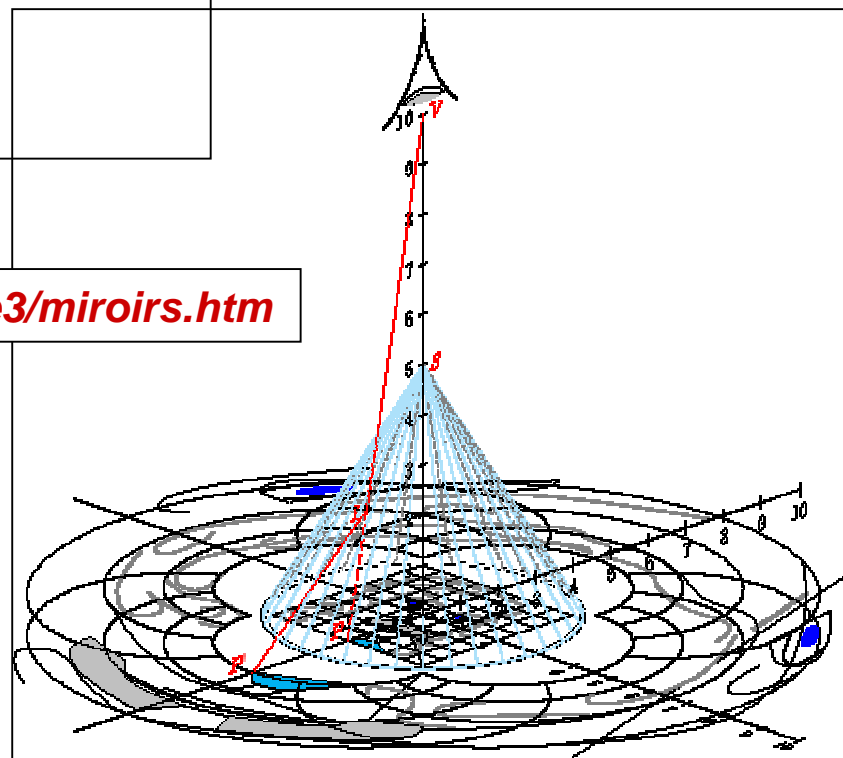


Anamorfofosis cilíndrica



<http://members.aol.com/ManuelLuque3/miroirs.htm>

Anamorfofosis cónica



Anamorfosis cilíndrica

Napoleón



Sancho Panza on His Donkey

*Sancho Panza
y su burro*





István Orosz (1951-)

La isla misteriosa y el retrato de Julio Verne

<http://www.geocities.com/SoHo/Museum/8716/>

Video



Anna

István Orosz

Pie



1997 Orosz



Otra bellísima
anamorfosis
cilíndrica de
Itsván Orosz
(2007) es:

*Edgar Allan
Poe: The
Raven*

en donde tras
un
impresionante
cuervo se
esconde...



El murciélago







Anamorfosis



Los Embajadores
(1533)

por

Holbein el joven
(1497-1543)

<http://www.math.nus.edu.sg/~mathelmr/teaching/holbein.html>

**Jean de Dinteville
(1504-1555),
embajador francés
en Inglaterra.**





**Jean de Dinteville
(1504-1555),
smbajador francés
en Inglaterra.**

**Georges de Selve
(1508-1541) obispo
de Lavour.**



**Jean de Dinteville
(1504-1555),
smbajador francés
en Inglaterra.**

**Georges de Selve
(1508-1541) obispo
de Lavour.**

**Relojes solares, un globo
terráqueo, instrumentos de
navegación y de astronomía,
libro de aritmética,...**



Jean de Dinteville
(1504-1555),
smbajador francés
en Inglaterra.

Georges de Selve
(1508-1541) obispo
de Lavour.

¿Qué es
esto?

Relojes solares, un globo
terráqueo, instrumentos de
navegación y de astronomía,
libro de aritmética,...



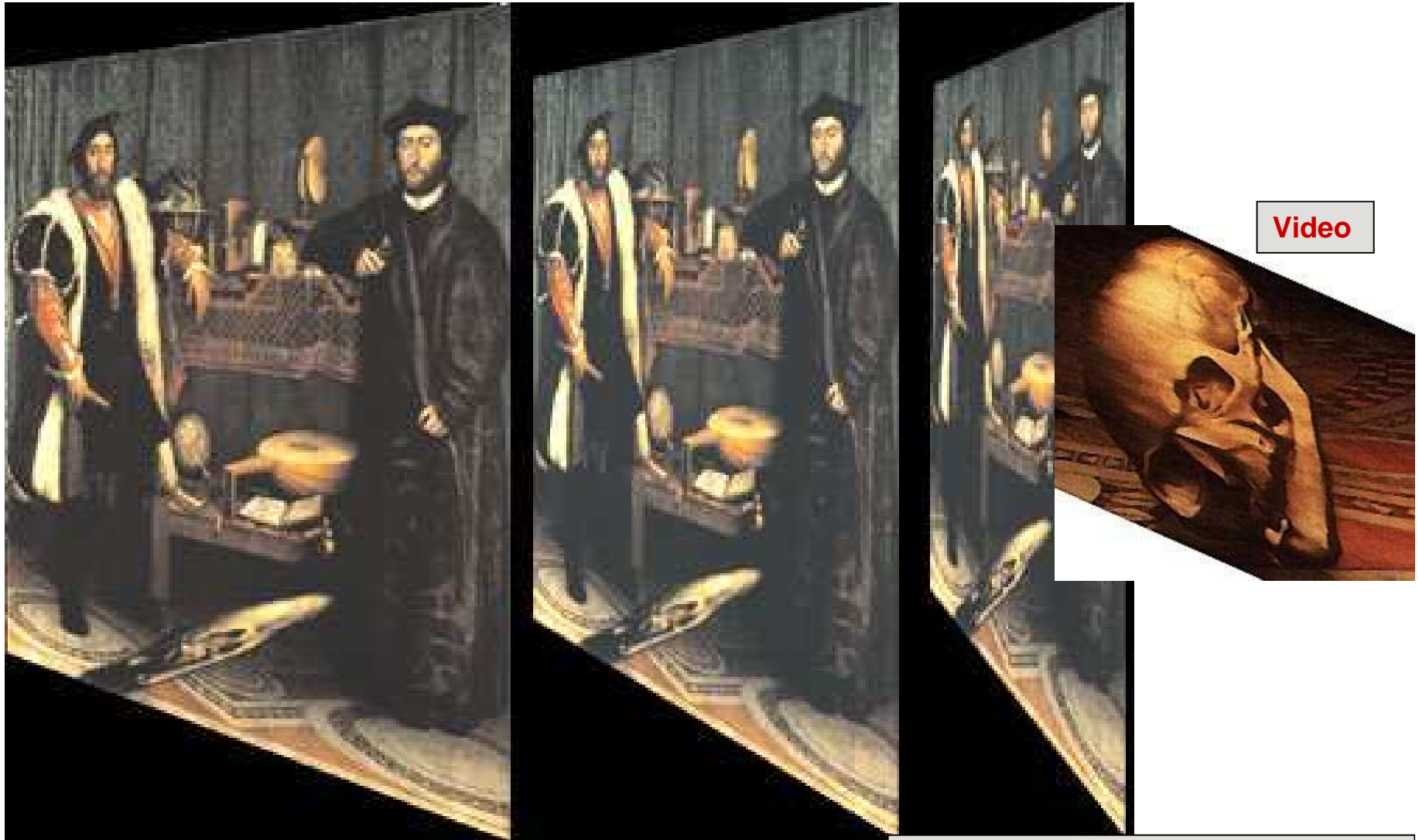
Antes de descubrirlo,... un poco de historia. Fecha: **11 de abril de 1533**.

Poco tiempo antes, **Enrique VIII** solicitaba al papa **Clemente VII** anular su matrimonio con **Catalina de Aragón**, ya que de su unión no había nacido ningún heredero varón. El papa no accede a este favor, lo que no impide al monarca desposar en secreto a **Ana Bolena** el 25 de enero de 1533.

A principios de abril, **Thomas Cranmer**, el arzobispo de Canterbury, anula el matrimonio con Catalina y declara a Ana Bolena Reina de Inglaterra.

El hecho no tiene precedentes, y se envía una embajada francesa para intentar una reconciliación con el papa: dos de estos embajadores están representados en el cuadro.

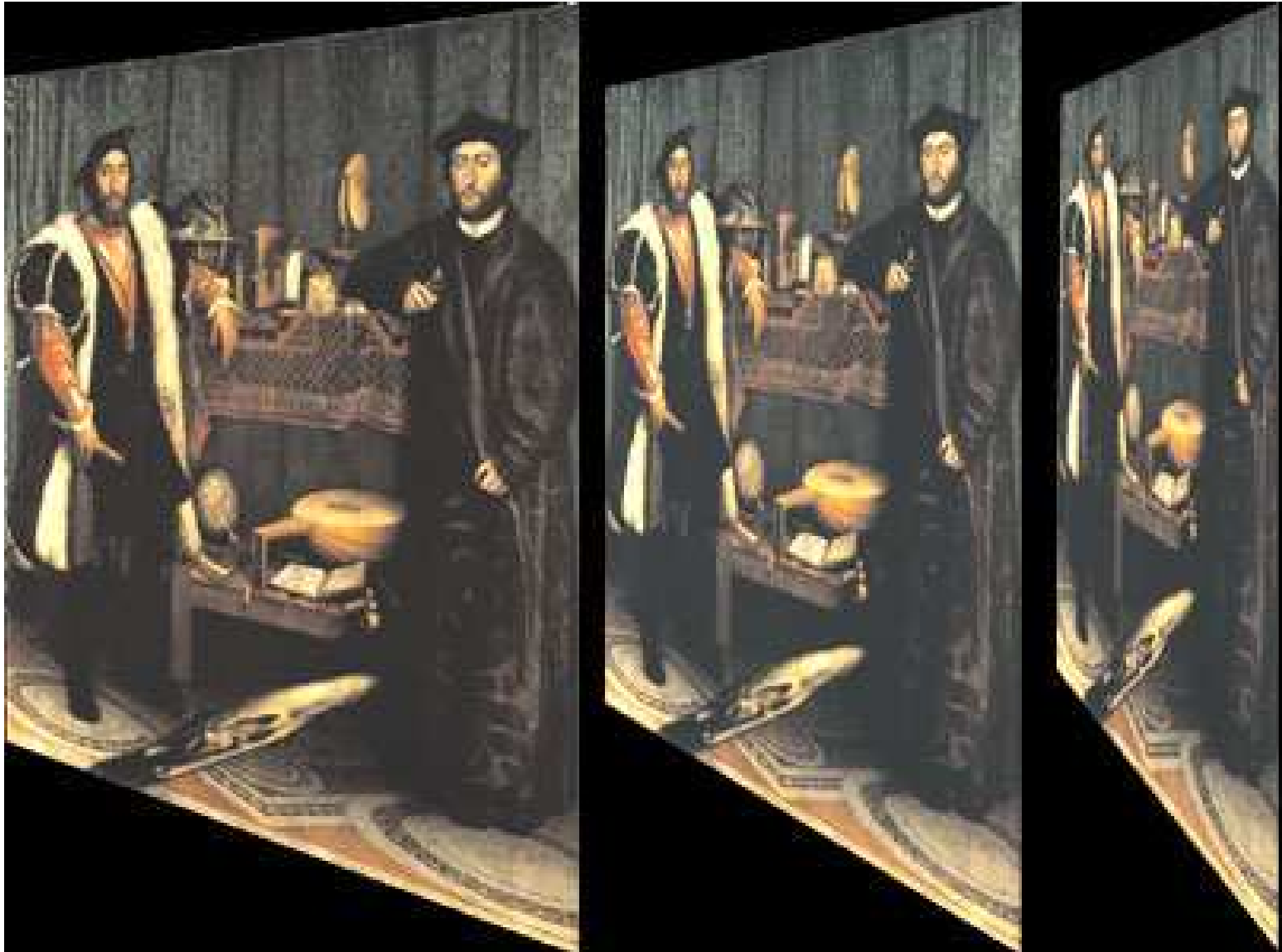
Y, al salir de la sala, al mirar el cuadro desde otro punto de vista, aparece...



Video

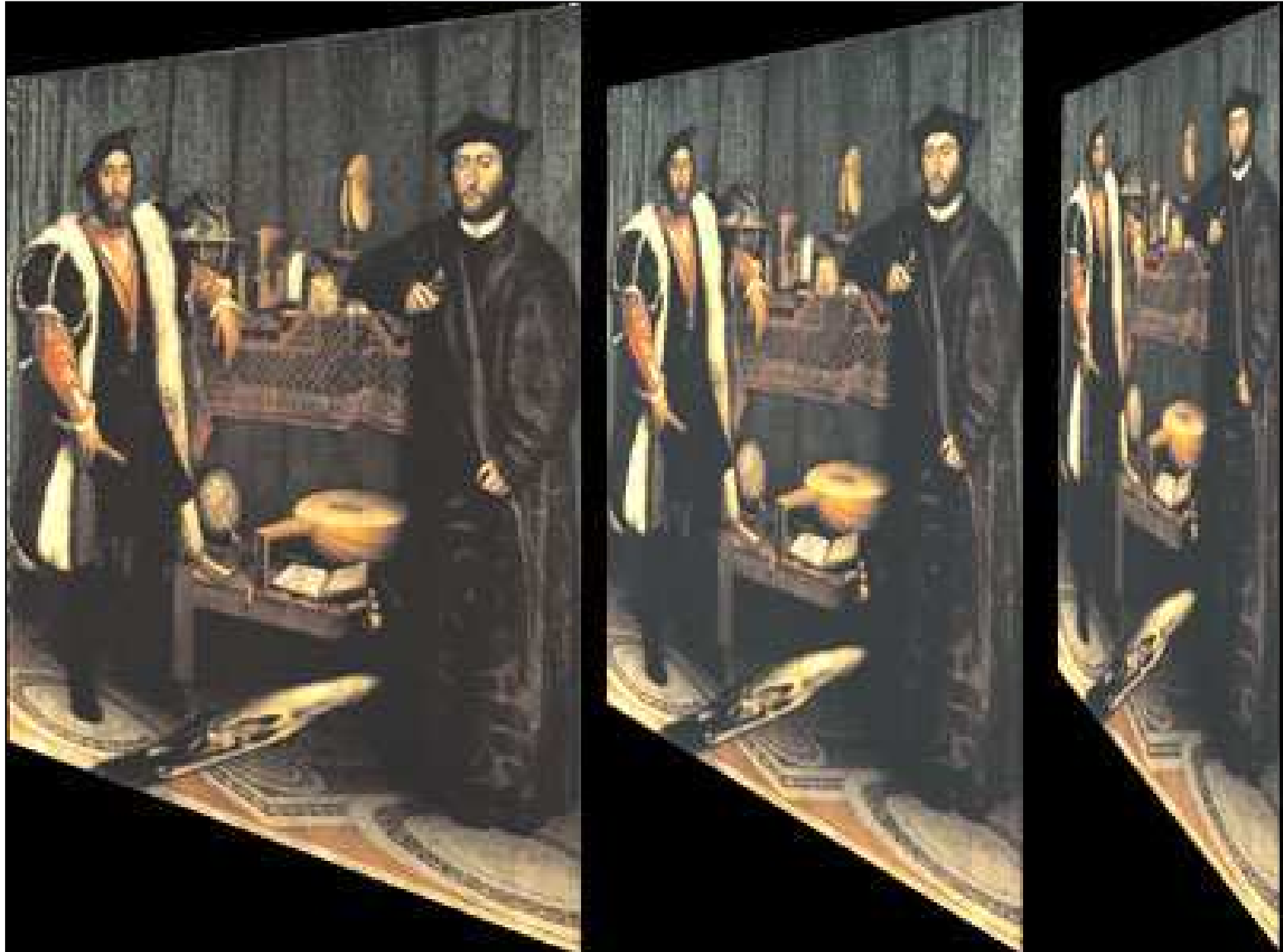
Anamorfosis oblicua

¿Firma del pintor? HOLBEIN = (**bein**) hueso (**hohl**) hueco



¿Firma del pintor? HOLBEIN = (**bein**) hueso (**hohl**) hueco

¿Muerte de la dinastía (Los Tudor)?





Erhard Schön (1491-1542): *Vexierbild*, 1535. Lugares, barcos y ciudades...



Video

Erhard Schön (1491-1542): *Vexierbild*, 1535
Lugares, barcos y ciudades... y
... composición anamórfica de Carlos V, Fernando I, el
papa Pablo III y Francisco I.





Vista desde el suelo, la imagen se ve totalmente deformada...



**Vista desde el suelo, la imagen se ve totalmente deformada.
Desde el segundo piso se observa la imagen real.**

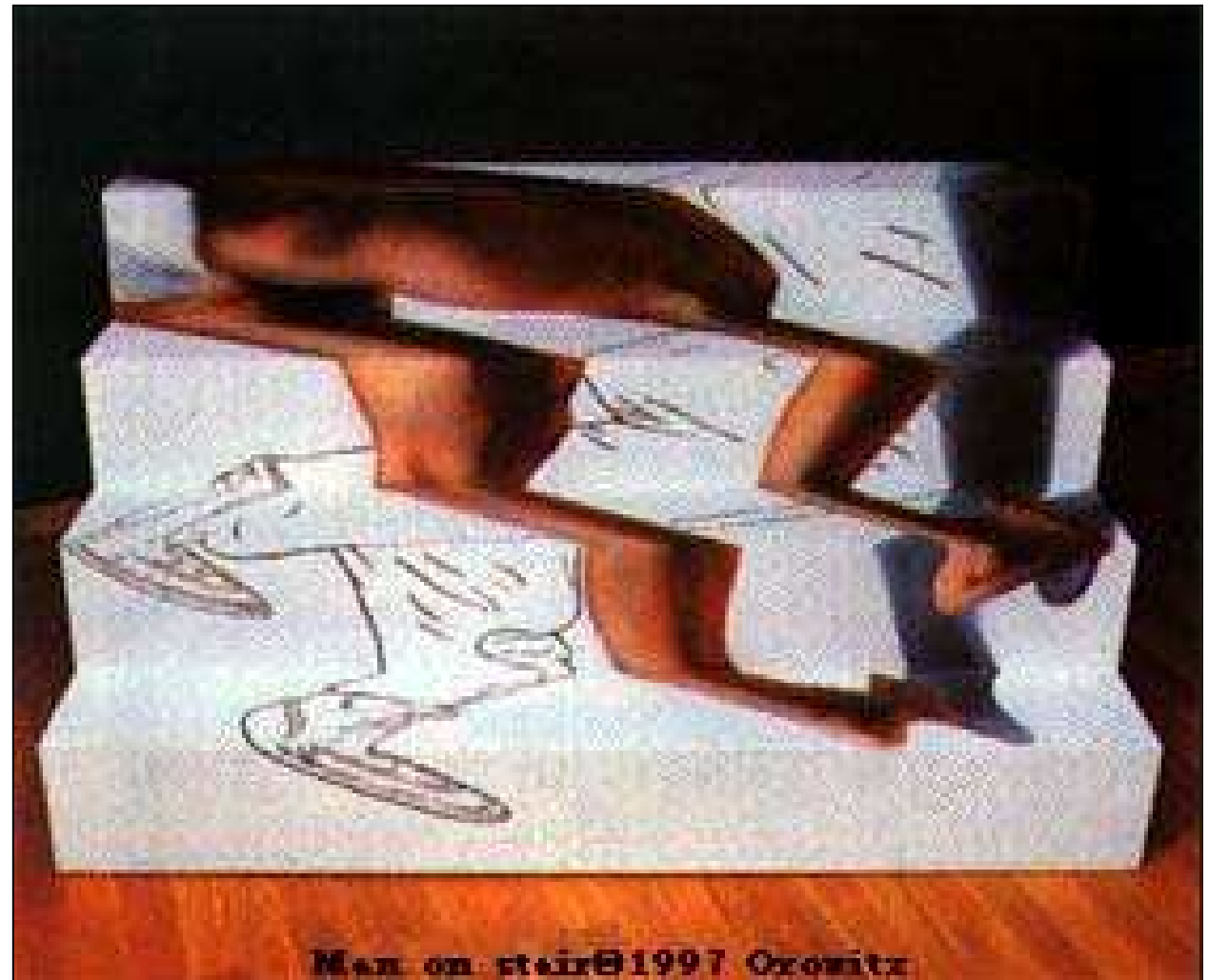
"Robotmur" es un robot capaz de reproducir anamorfosis sobre edificios, etc.

<http://jourdain.ifrance.com>

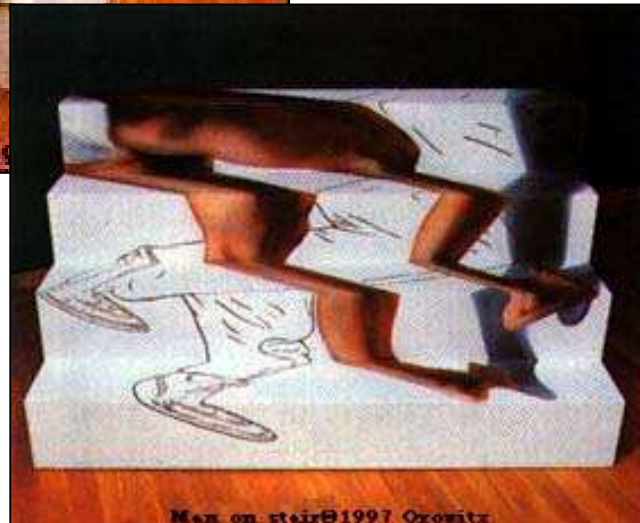


István Orosz

Escalera de dimensión tres, vista desde diferentes ángulos.

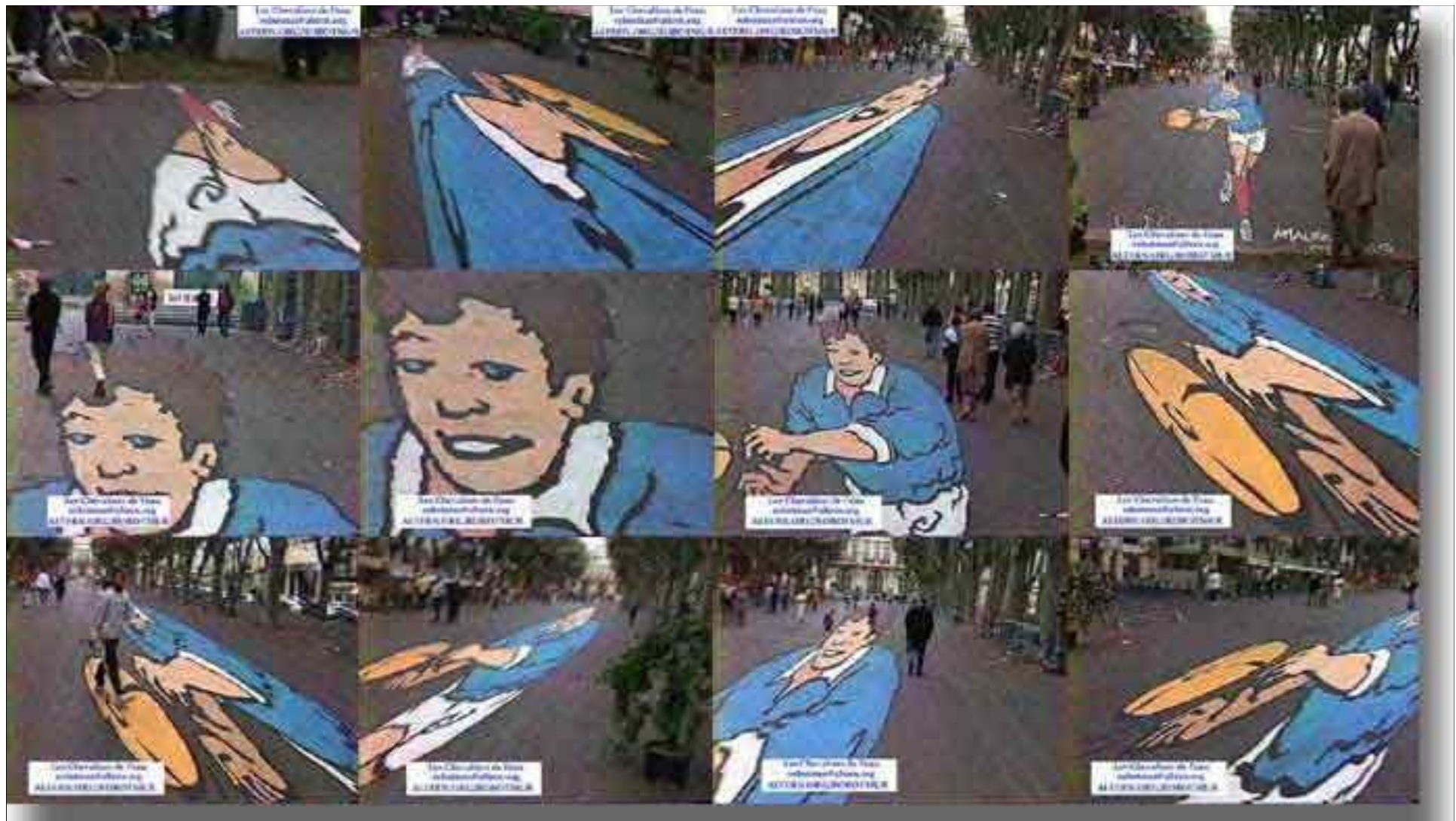


**Escalera de dimensión tres, vista desde diferentes ángulos.
Los dos primeros revelan una figura que camina sobre las escaleras, un tanto distorsionada.**



Escalera de dimensión tres, vista desde diferentes ángulos. Los dos primeros revelan una figura que camina sobre las escaleras, un tanto distorsionada. Sólo la figura final resuelve la anamorfosis.





Les Chevaliers de l'eau (<http://jourdain.ifrance.com/sommaire.htm>)

Jugador de Rugby de 134,20 metros de largo. Beziers, 30 septiembre de 1999 (apertura de la copa del mundo de Rugby): es la mayor anamorfosis del mundo.



Deceptive outward appearance (<http://olemartinlundbo.com/>) de **Ole Martin Lund Bo** (***Apariencia externa engañosa***).







Kurt Wenner



Dies Irae, Italia

<http://www.kurtwenner.com/>

Musas, Suiza



Julian Beever

<http://users.skynet.be/J.Beever/pave.htm>

Make Poverty History

Dibujo encargado para la campaña de presión al G8

Vista de frente



Make Poverty History

Dibujo encargado para la campaña de presión al G8 **Vista de frente**

Edinburgh City Centre

Visto de lado: 13 metros

Julian Beever



Eduardo Relero



Grandes chorizos

Eduardo Relero



Eduardo Relero



Eduardo Relero





Eduardo Relero



Con la ocasión del '*Museumsnacht*' (2004) en Hamburgo, el Museo de Artes y Oficios se presentó a sí mismo con el eslogan *Todos los caminos conducen al Arte.*



Con la ocasión del
'Museumsnacht' (2004) en
Hamburgo, el Museo de Artes
y Oficios se presentó a sí
mismo con el eslogan **Todos
los caminos conducen al Arte.**

**Anamorfosis en un
ángulo de la pared y
el suelo: 1,5 metros**



**Le
Wallandais**

***Habitant
des murs***



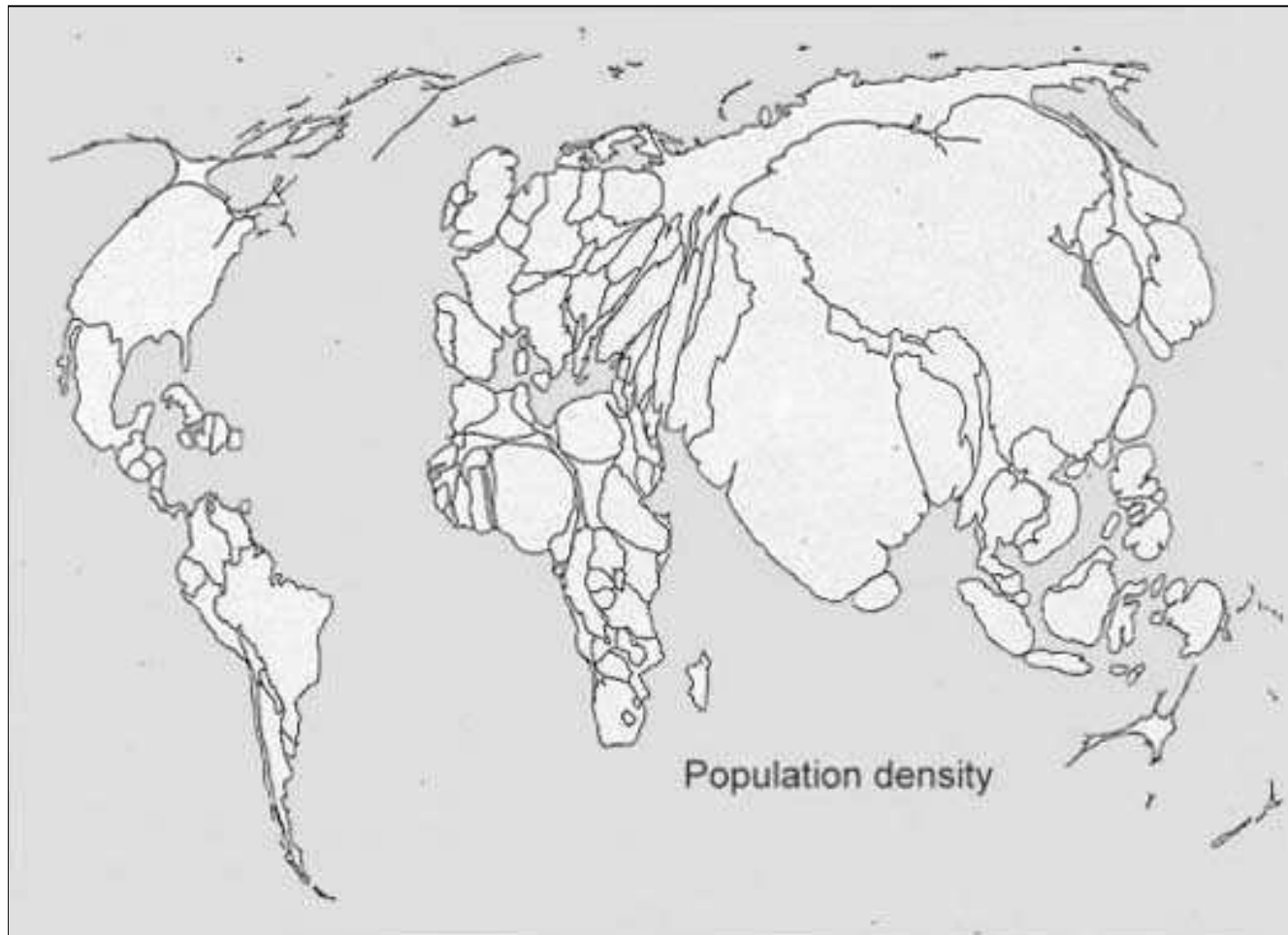
Anamorfosis y señalización



Las anamorfosis se usan a menudo en señales de tráfico, para que las señales sean correctamente interpretadas por los conductores.



Anamorfosis y cartografía estadística



Las anamorfosis se utilizan en cartografía estadística para mostrar la importancia de un fenómeno dado. El mapa ya no representa la realidad geográfica, sino la realidad del fenómeno.

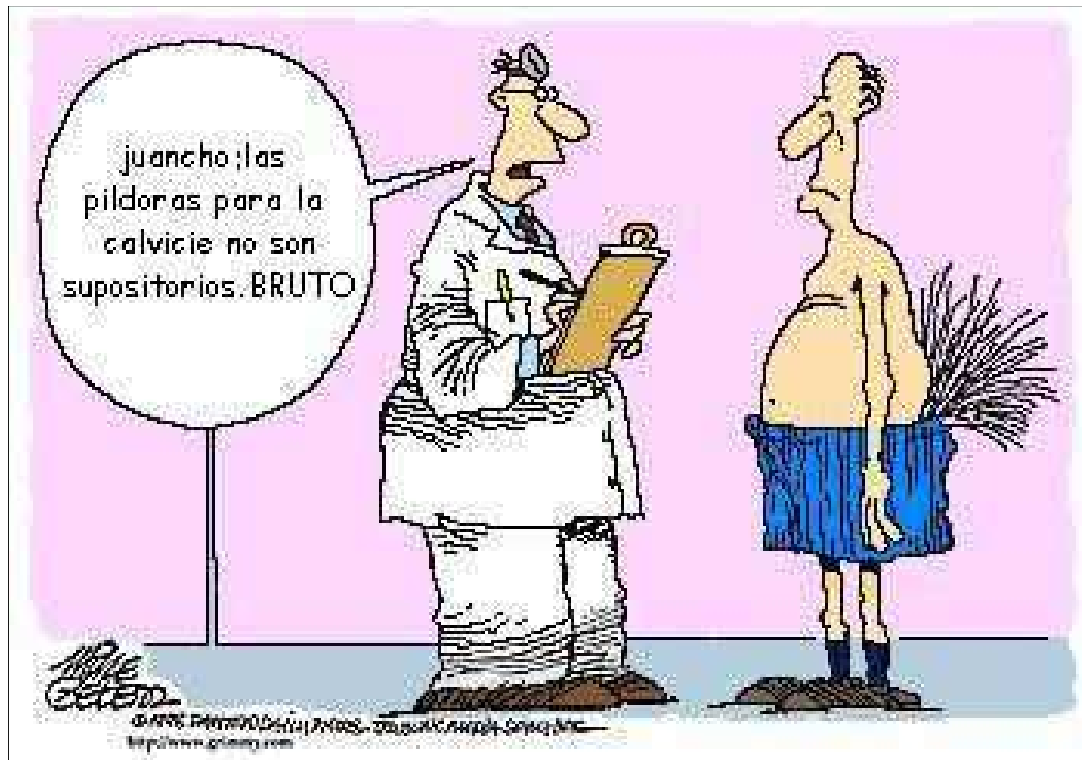
La deformación se realiza usando transformaciones matemáticas.

Paradojas tipo Sorites

“Sorites” es la palabra griega para “montón” o “pila”. “Sorites” es el nombre dado a una clase argumentos paradójicos, que se derivan de los límites indeterminados de aplicación de los predicados envueltos. Se trata de una serie de puzzles atribuidos al lógico Eubulides de Mileto, que incluyen:

1. *el hombre calvo*: ¿describirías a un hombre con un pelo en la cabeza como calvo?





2. Un **grano de arena** **no es un montón**, si 1 grano de arena no es un montón, tampoco 2 granos de arena lo son... Si 9.999 granos de arena no son un montón, tampoco los son 10.000 granos. ¿Cuántos granos tiene un montón?



Algunas respuestas a esta paradoja son:

- el acercamiento a un ***lenguaje ideal***, cuyo atributo clave es su precisión: la vaguedad del lenguaje natural es un defecto a eliminar (Frege y Russell);
- lógicas multivaluadas (no clásicas), como la ***lógica difusa*** de Goguen y Zadeh (1969) que sustituye a la usual (dos-valuada), que reconocen para un objeto “los grados” de verdad;
- aceptar la paradoja: ninguna cantidad de granos de arena hace un montón... o en otra versión...

Algunas respuestas a esta paradoja son:

- el acercamiento a un *lenguaje ideal*, cuyo atributo clave es su precisión: la vaguedad del lenguaje natural es un defecto a eliminar (Frege y Russell);
- lógicas multivaluadas (no clásicas), como la *lógica difusa* de Goguen y Zadeh (1969) que sustituye a la usual (dos-valuada), que reconocen para un objeto “los grados” de verdad;
- aceptar la paradoja: ninguna cantidad de granos de arena hace un montón... o en otra versión...

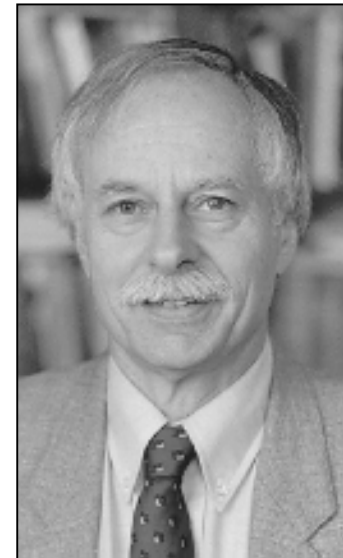
¡no hay gente calva!

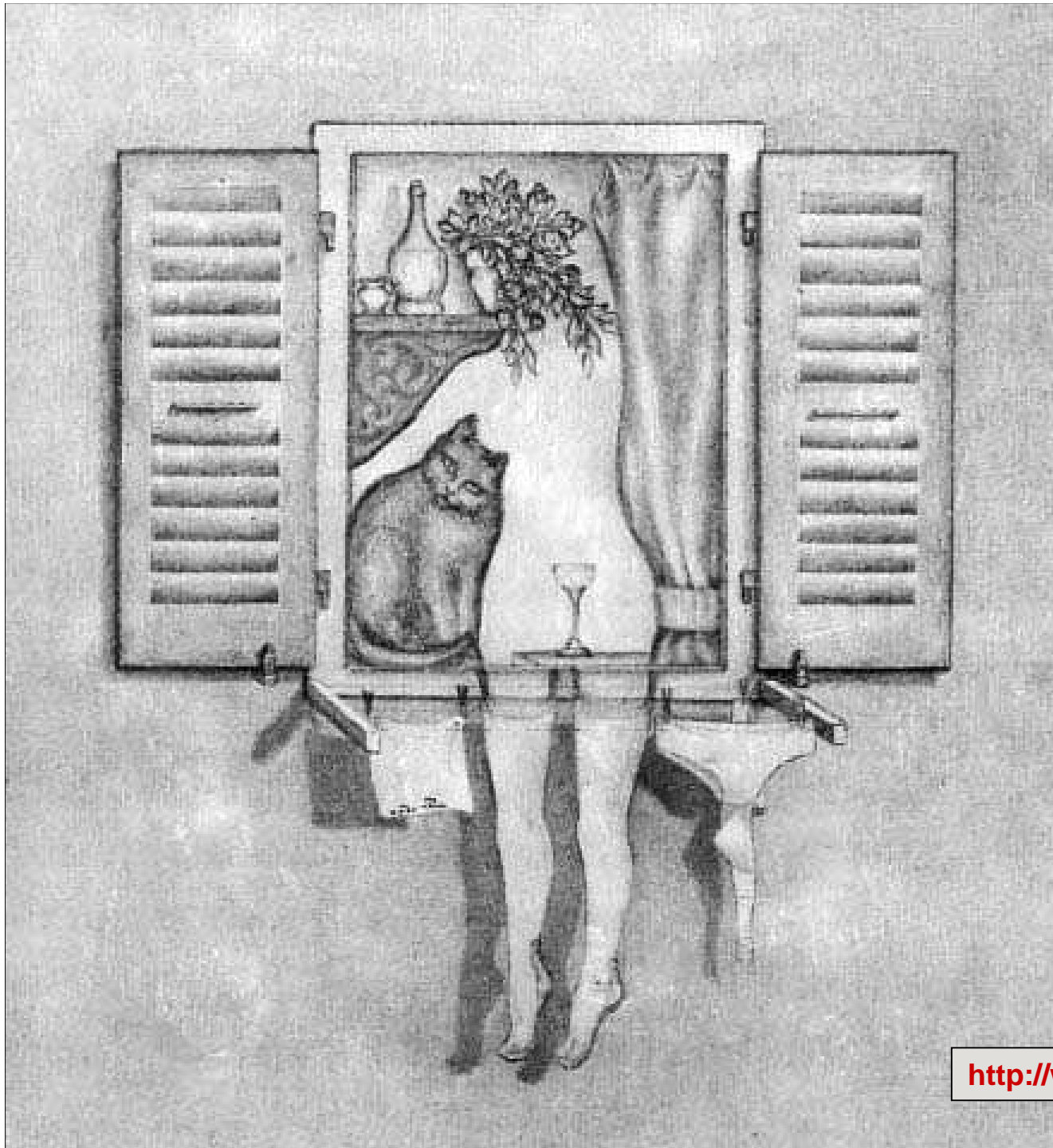
Figuras ambiguas



**Roger N. Shepard
(1929-)**

Sara Nader





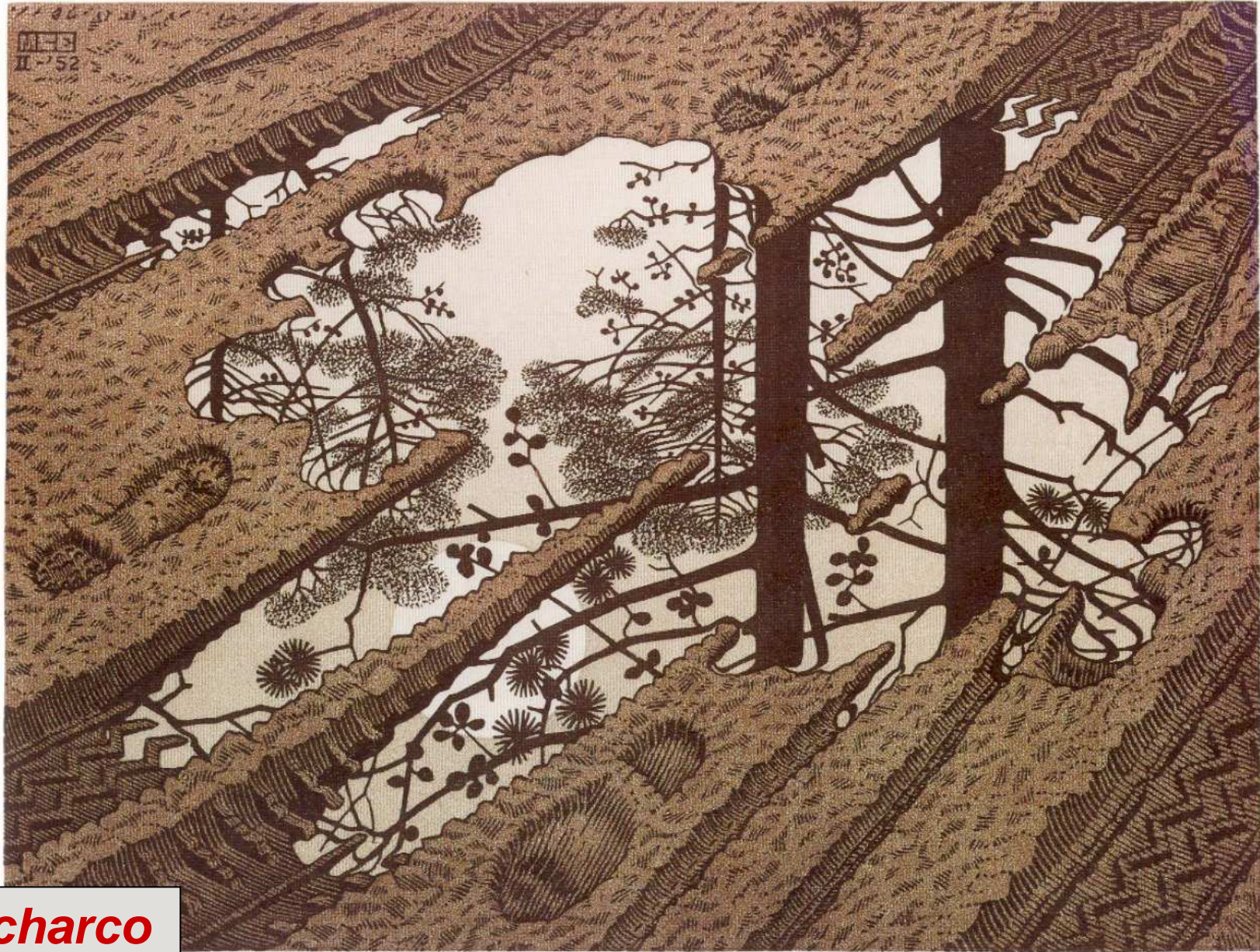
Sandro del Prete

(1937-)

*Todo lo que
vemos
puede ser
visto de
otra manera*



<http://www.del-prete.ch/index.html>



El charco

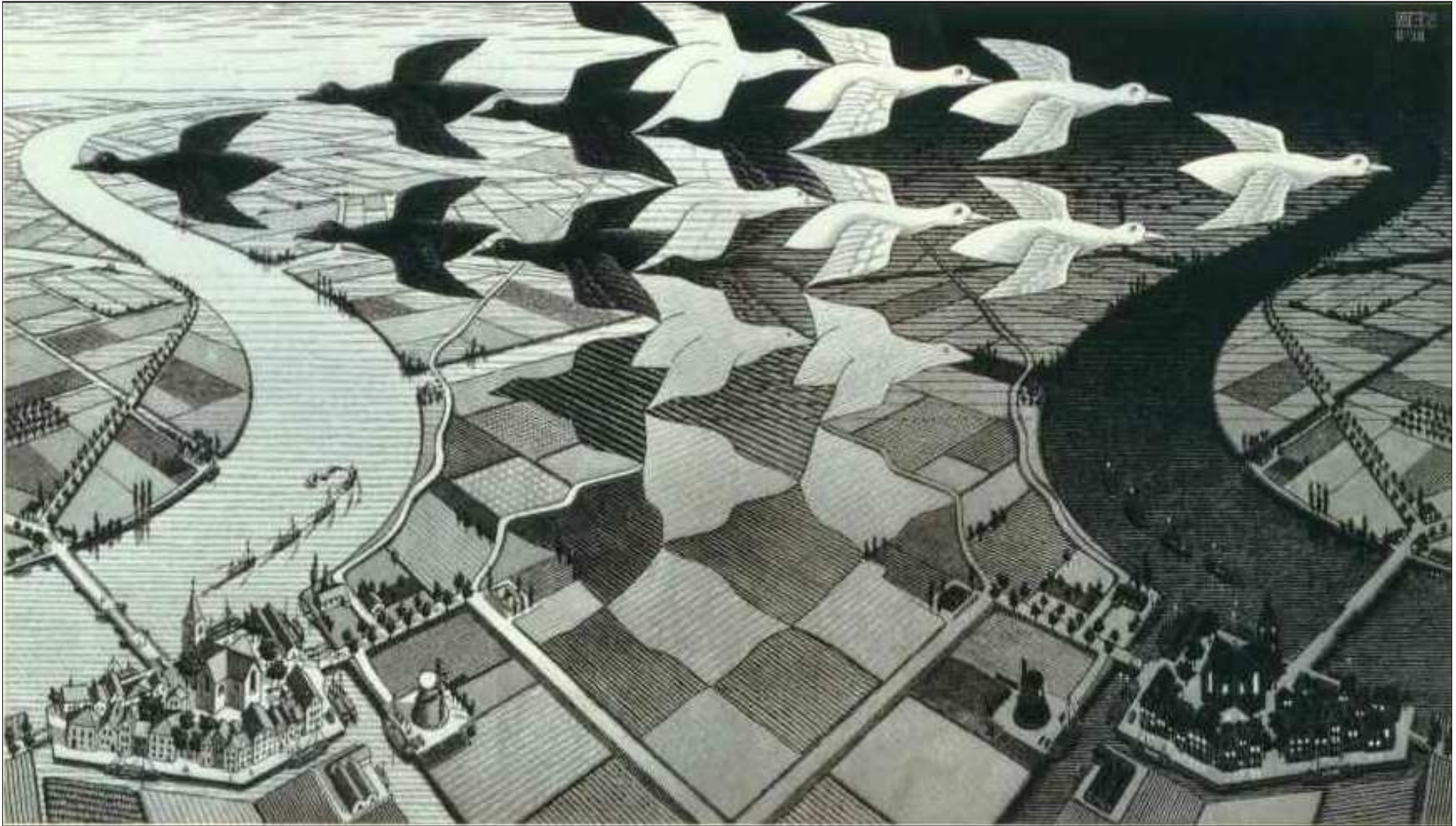
M. Cornelius Escher (1898-1972)

<http://www.mcescher.com>

Tres mundos

M. Cornelius Escher

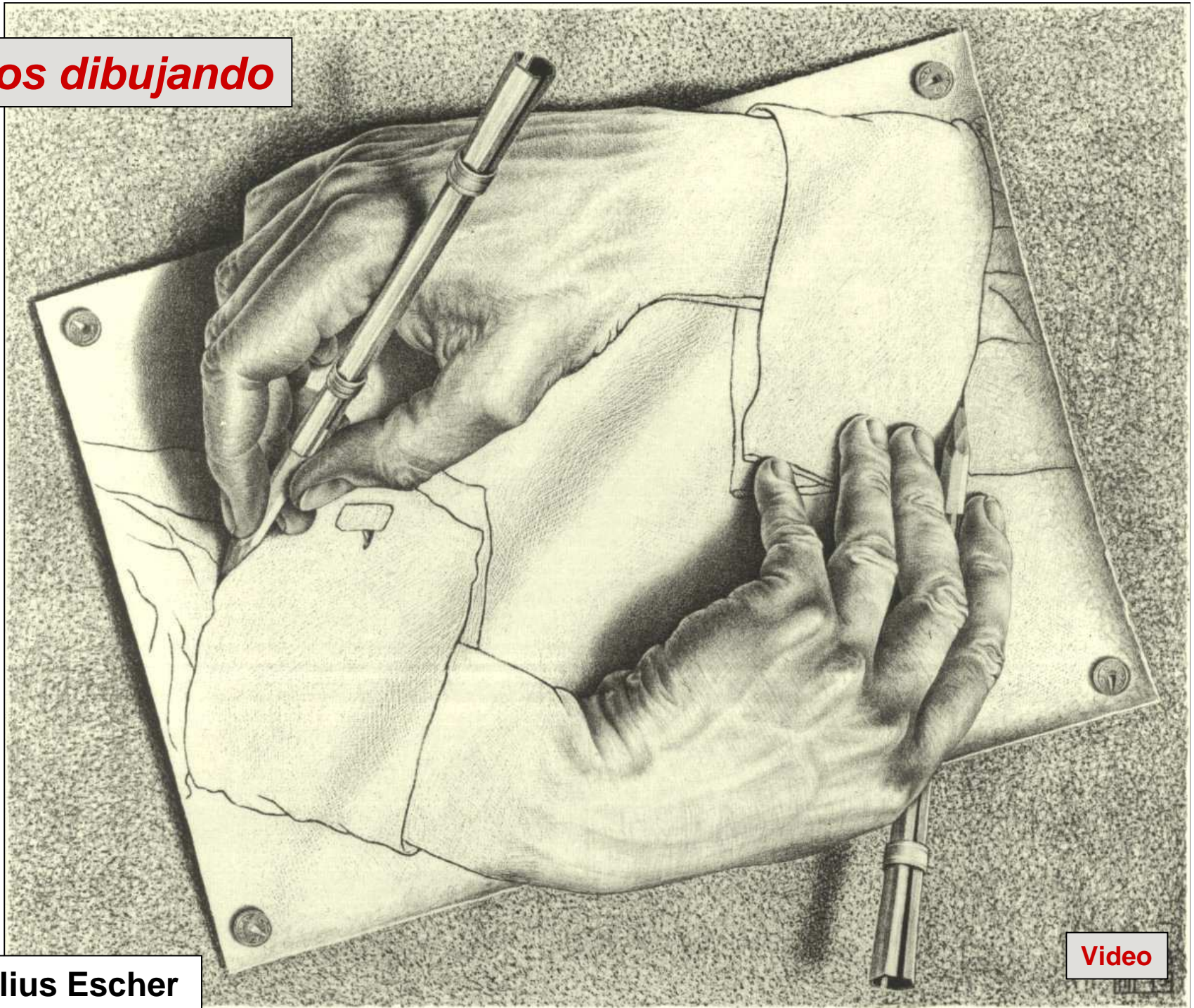




M. Cornelius Escher

Día y noche

Manos dibujando

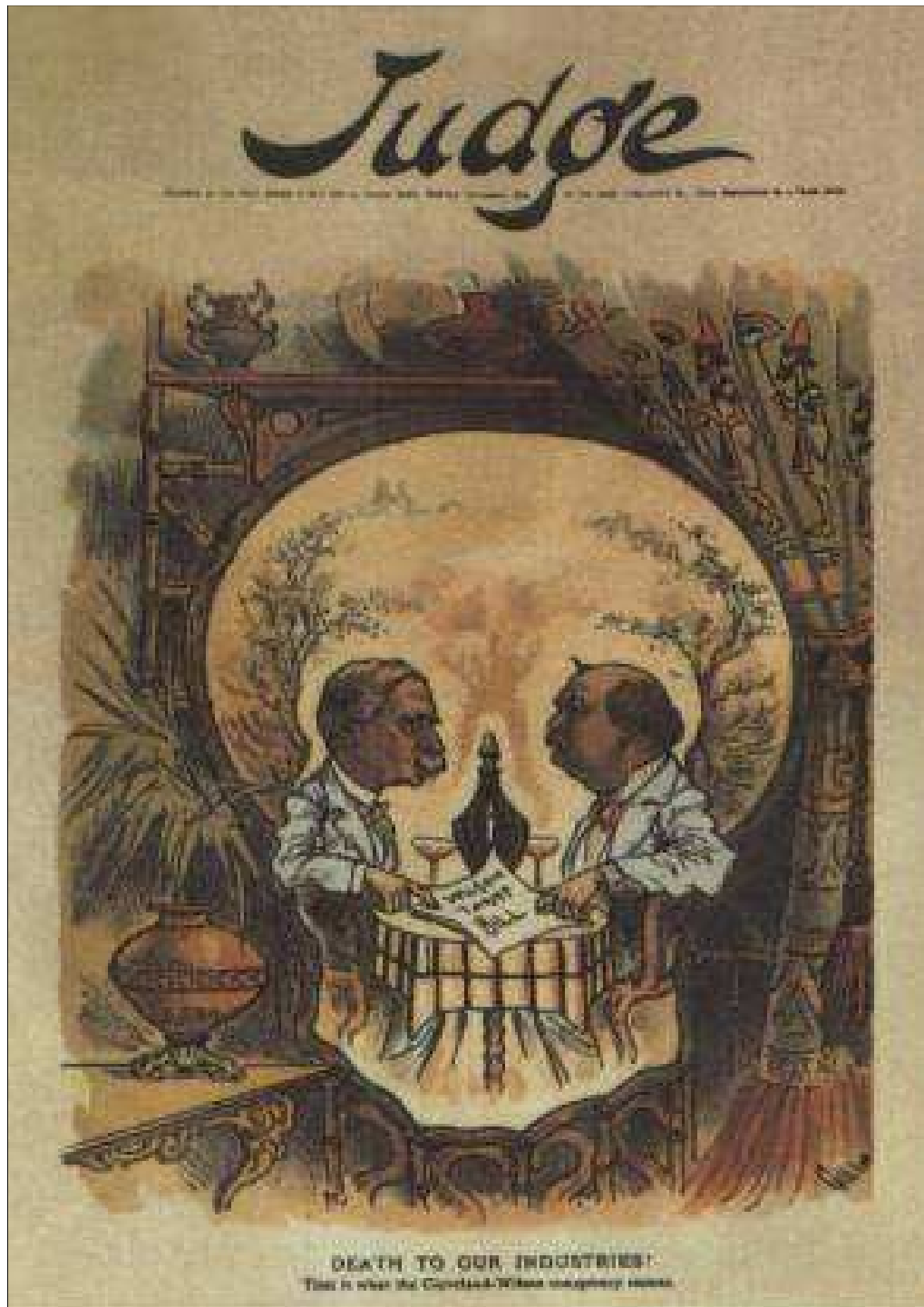


M. Cornelius Escher

Video



**Caja de cerillas: 12 elefantes y sólo 6 cabezas
(aparte del elefante central)**



**Gillam: Cubierta del Magazine
JUDGE 26, 1894
Cartel reivindicativo contra los
aranceles**

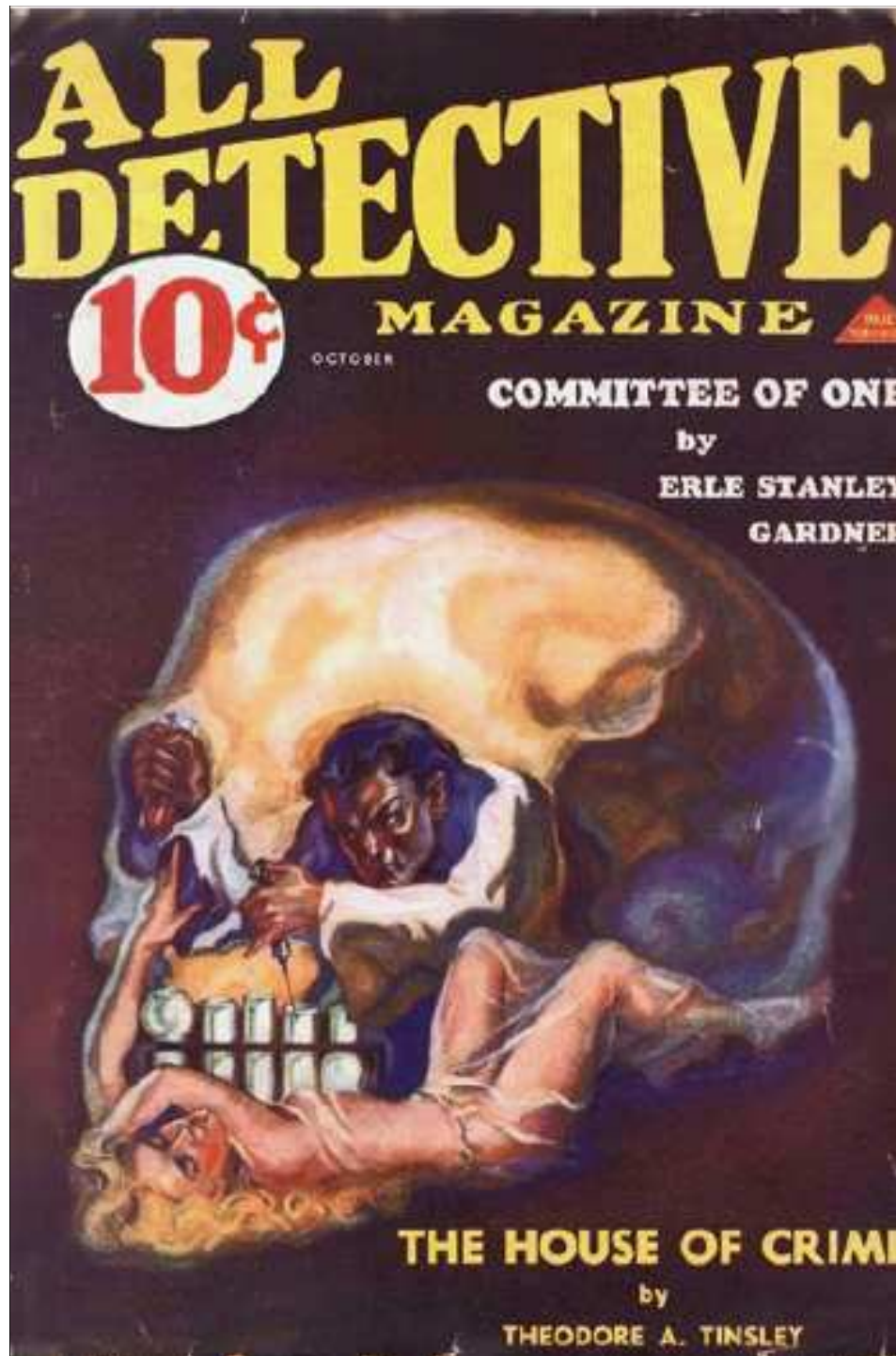
**En el papel del cartel:
*Wilson Tariff Bill***

**Base del cartel:
*Death to our industries.
That is what Cleveland-Wilson
conspiracy means***



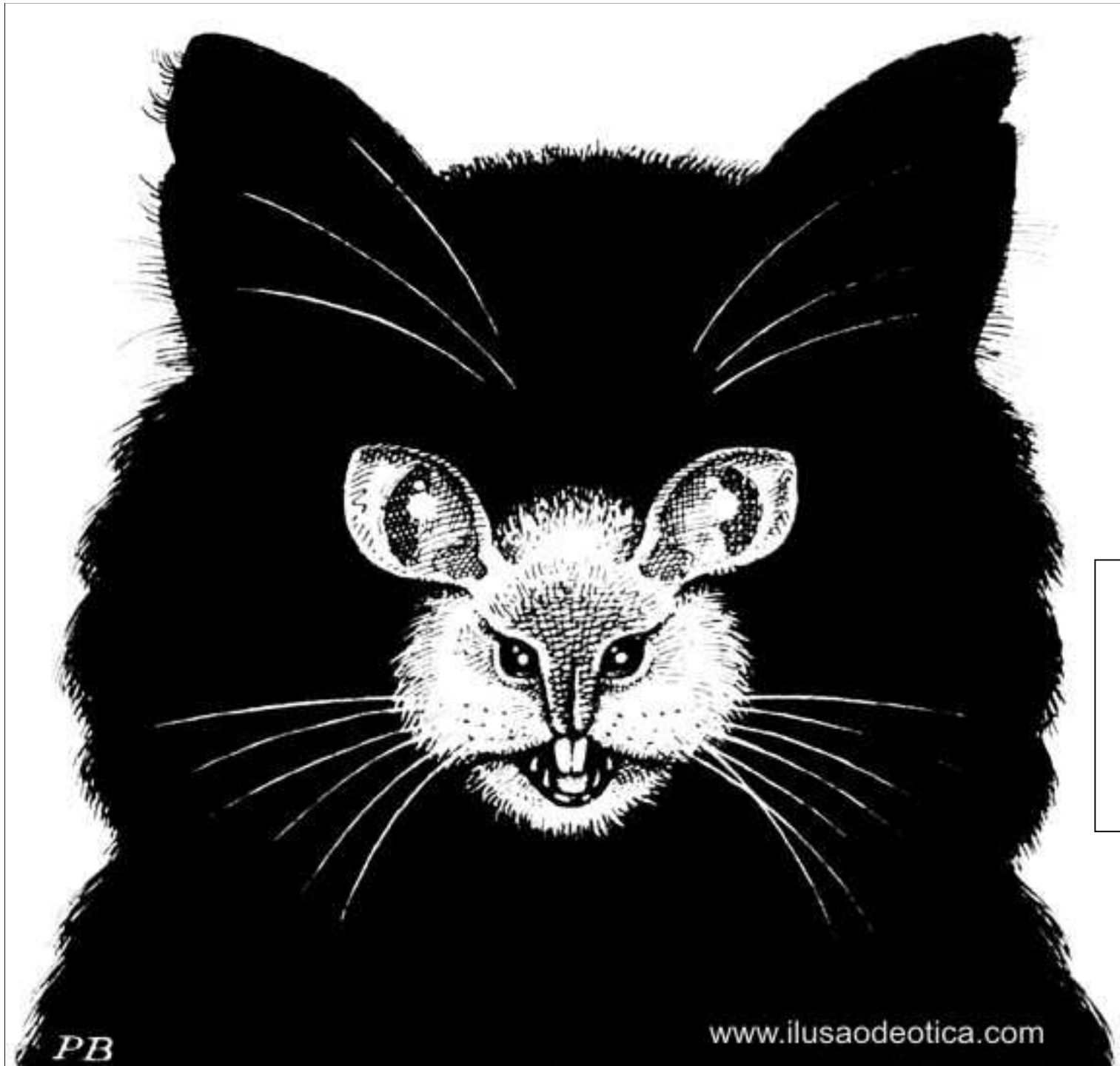
Portada de junio de
1952 de la revista
*Famous Fantastic
Mysteries*

Lawrence Sterne
Stevens



Norman Saunders
All Detective Magazine

Octubre 1933

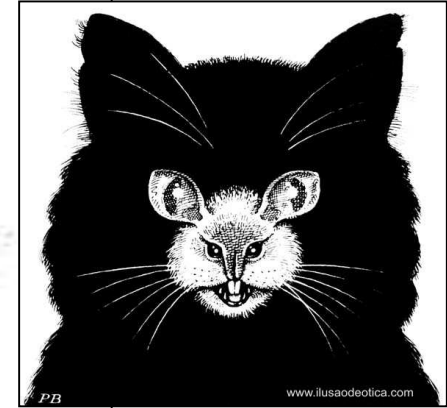


**Peter
Brookes**

**De cerca se
ve el ratón...**

PB

www.ilusaodeotica.com



Peter Brookes

**De cerca se
ve el ratón y
de lejos, el
gato**



**Victor
Molev
(1955-)**

**De cerca se
ven cubos y
formas...**



**Victor
Molev
(1955-)**

**De cerca se
ven cubos y
formas y
de lejos, a
Einstein**

Columbus



Itsván Orosz

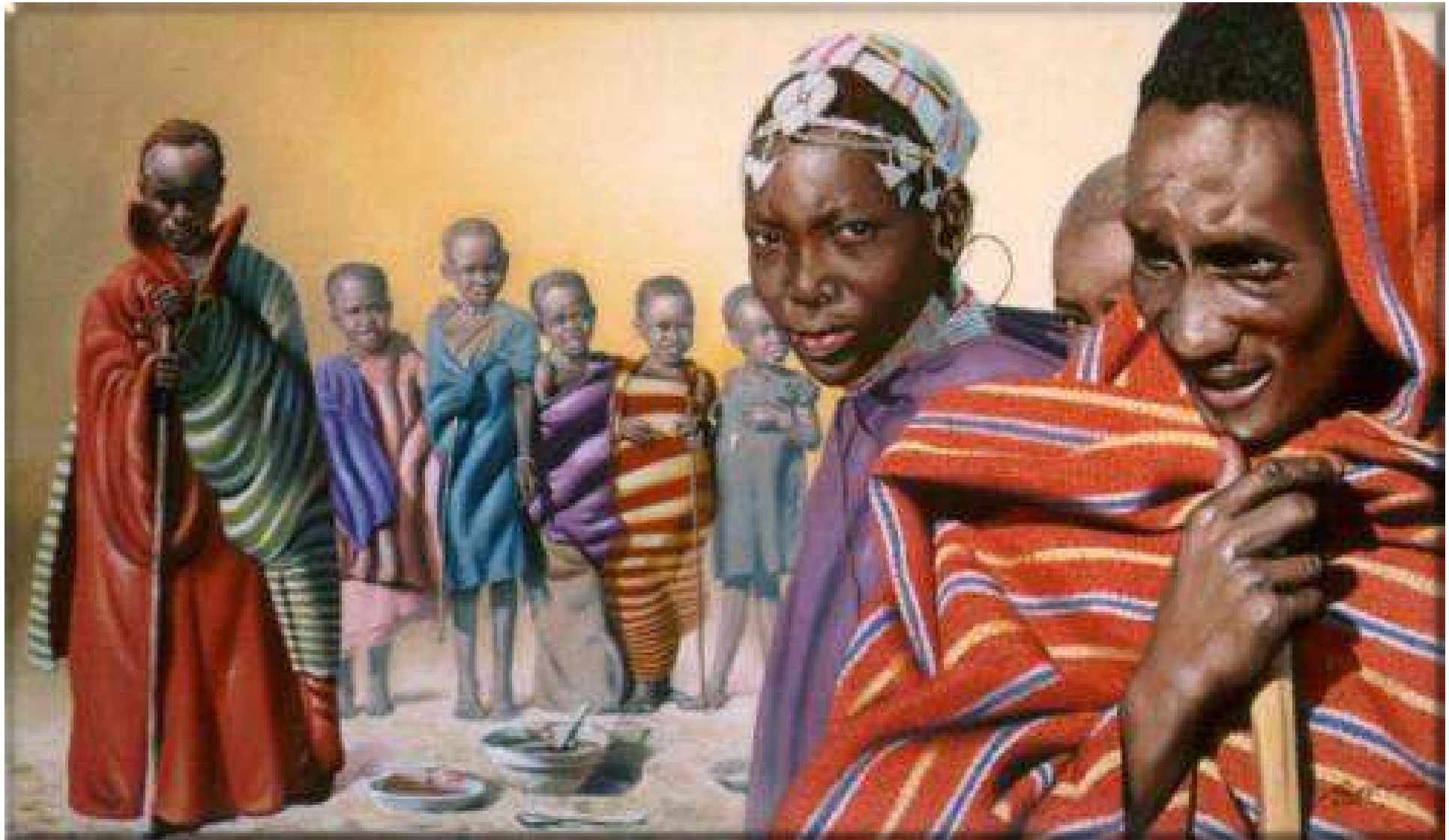
Itsván Orosz

Durero en el bosque



Rusty Rust

10 amigos



Rusty Rust



León escondido



Octavio Ocampo (1943-)

La evolución del hombre



Octavio Ocampo (1943-)

***Las visiones
del Quijote***



Marlena

Octavio Ocampo (1943-)



Octavio Ocampo (1943-)

Se trata de una silla ocupada por tres conejos (uno negro abajo a la izquierda y dos blancos abajo en el centro), un gato está sentado sobre un cojín en el centro y mira al observador.

La silla tiene un respaldo que a primera vista parece la cara de la Mona Lisa, pero si se inspecciona con más cuidado aparecen dos mujeres, un hombre, un ángel,...

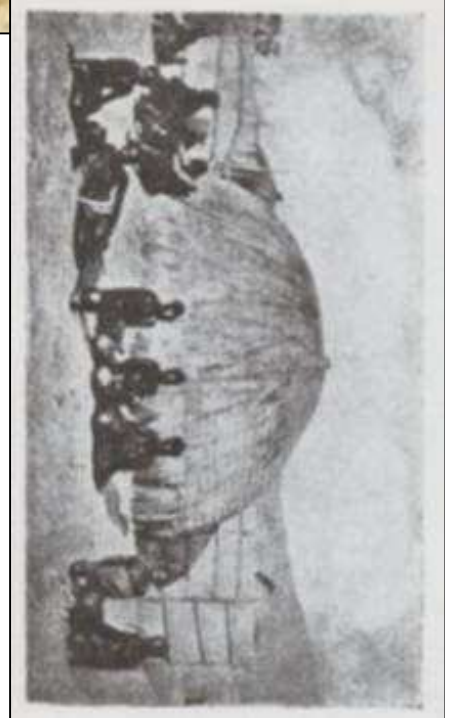
Mona Lisa

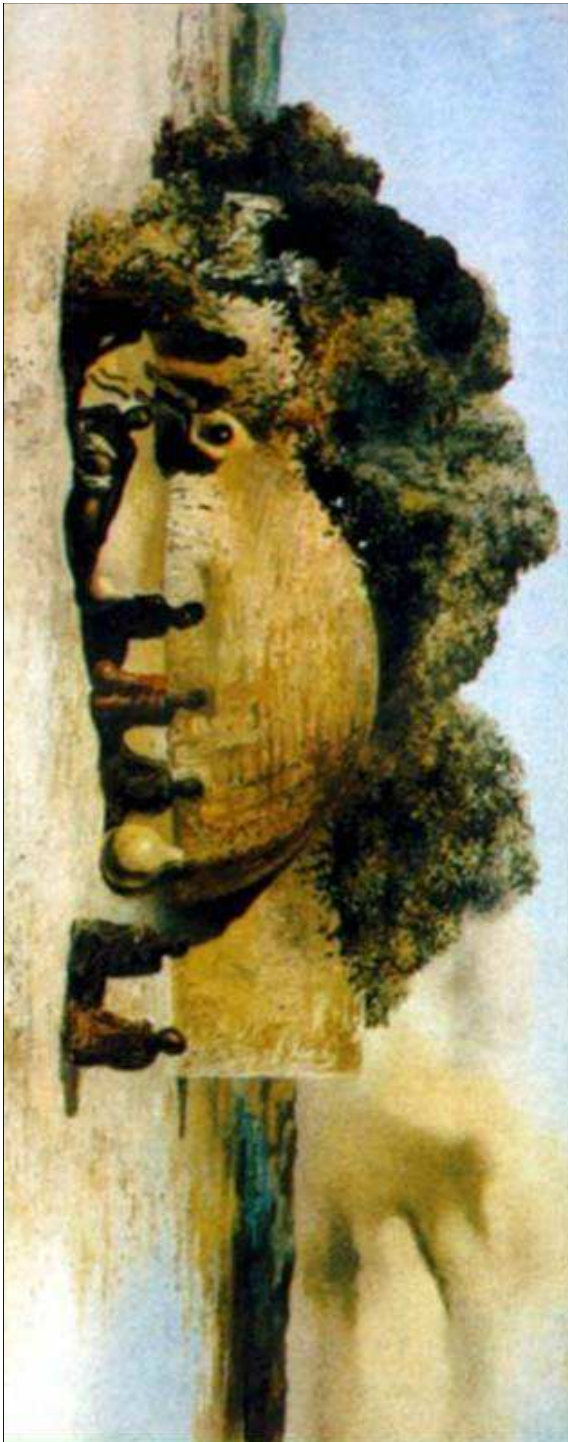


Salvador Dalí (1904-1989)



***Rostro
paranoico: la
tarjeta postal
transformada
en Picasso***





***Rostro
paranoico: la
tarjeta postal
transformada
en Picasso***

Salvador Dalí (1904-1989)

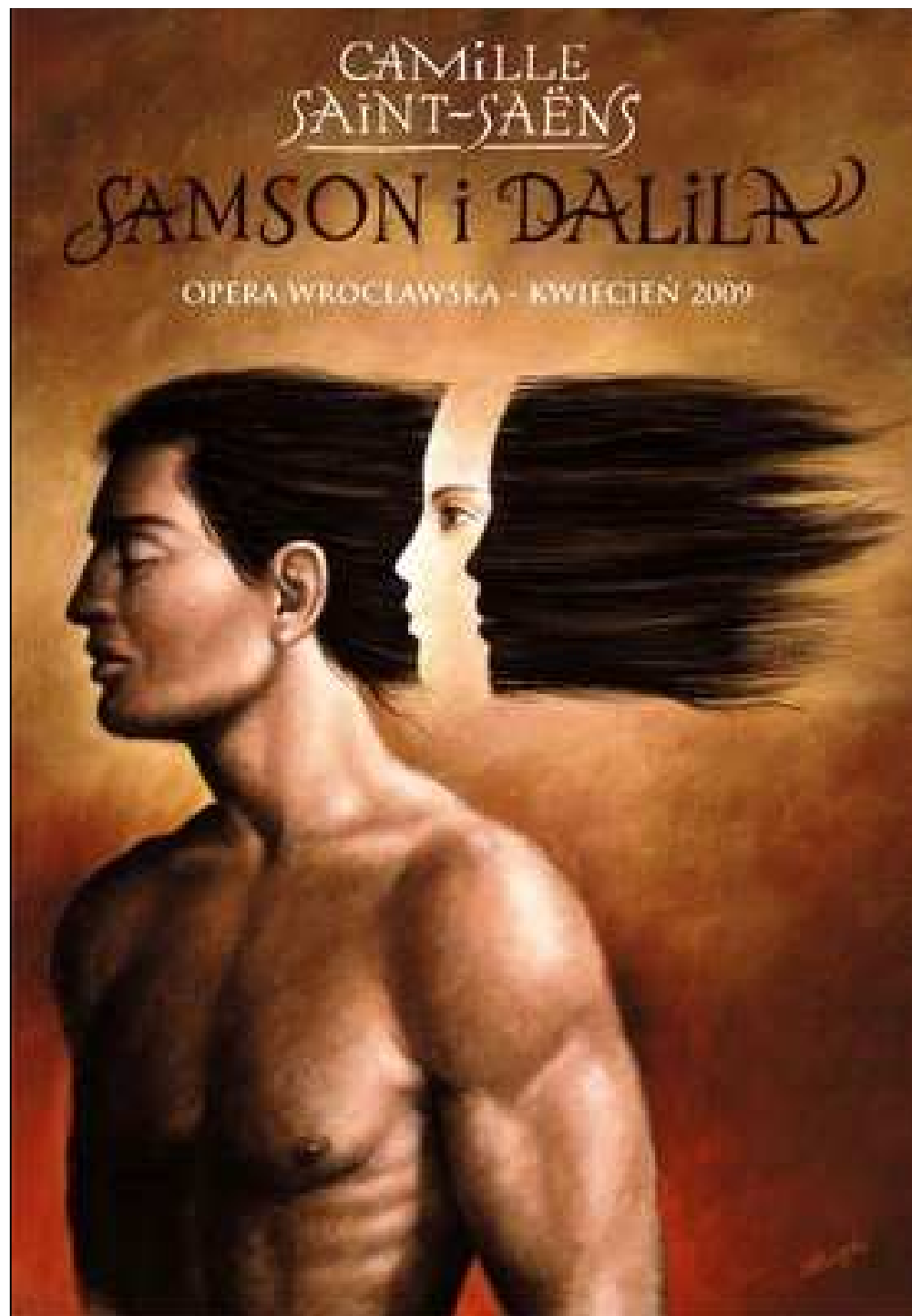


Letters to Europe

Rafal Olbinski

<http://www.patinae.com/olbinski.htm>

Sansón y Dalila



Rafal Olbinski

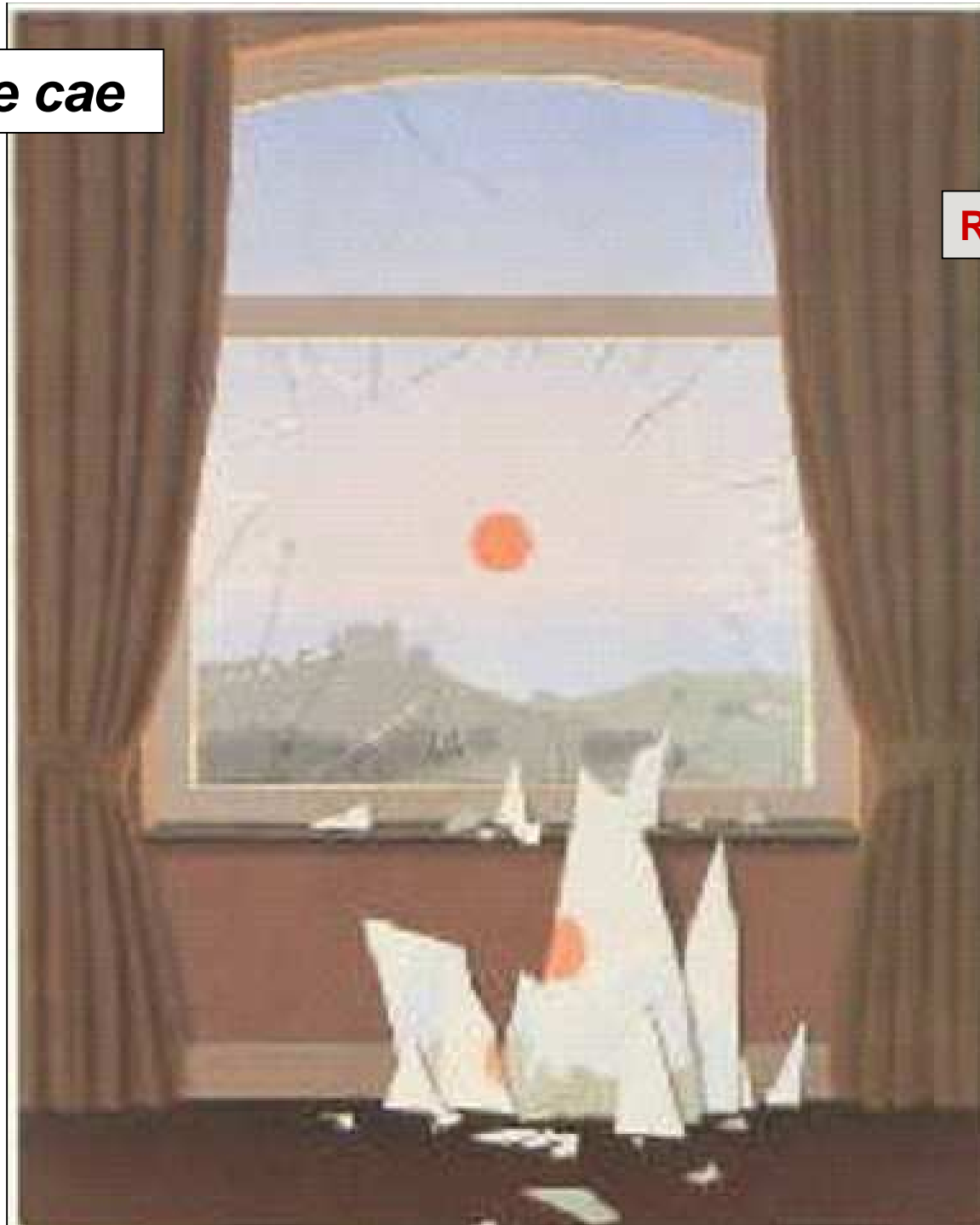


Carte blanche

René Magritte (1898-1967)

La noche que cae

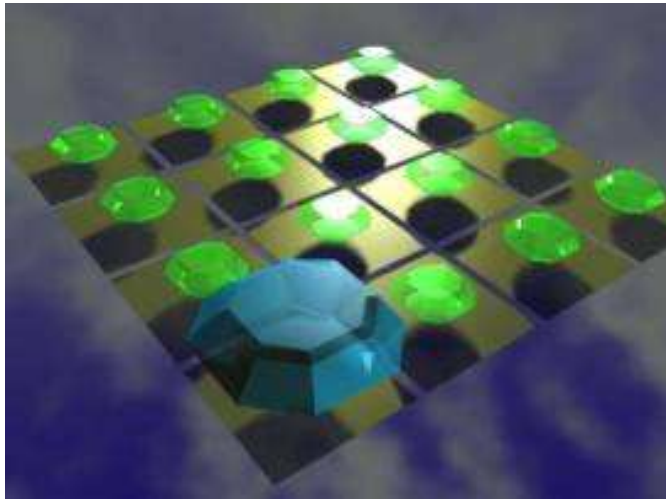
René Magritte



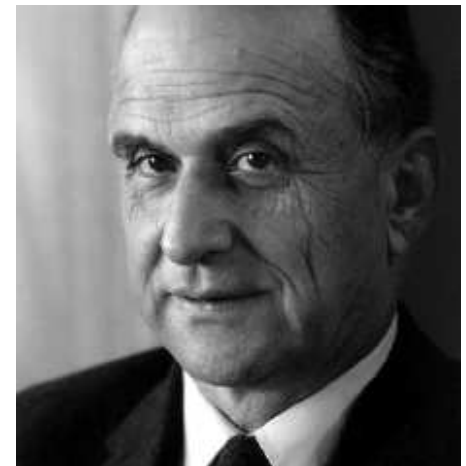
La paradoja de Goodman

Se define un objeto como *verul*, si observado antes del tiempo t es *verde*, y *azul* después de t .

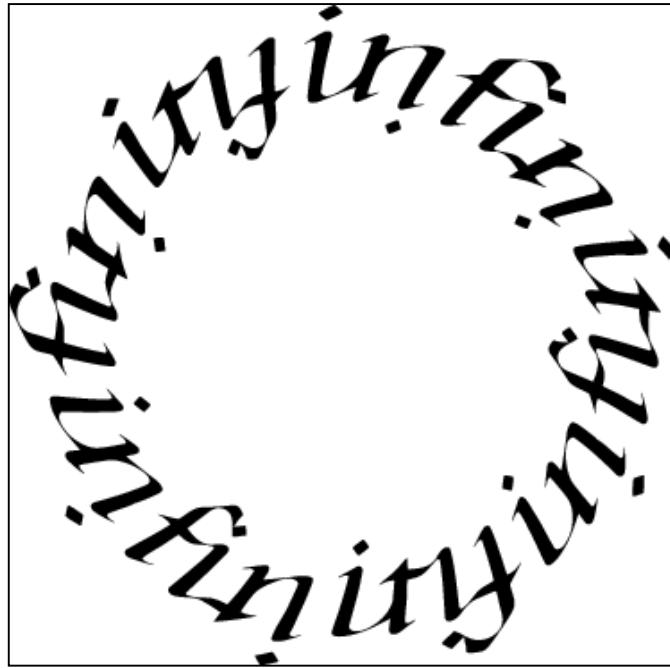
Si $t = 23$ de diciembre de 2012 (¿FIN DEL MUNDO?), Goodman afirma que decir que las esmeraldas son *verdes* o *verules* es igual de consistente... en ambas afirmaciones hay tiempo por medio y ambas se confirman empíricamente...



Nelson Goodman
(1906-1998)



Ambigramas



**Scott
Kim
(1955-)**

<http://www.scottkim.com>



Scott Kim: *Input-Output*



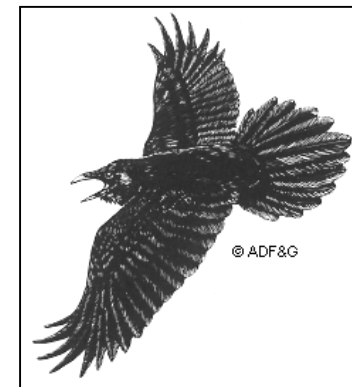
Scott Kim: *Melody-Rhythm*



La paradoja del cuervo

Carl Hempel (1905-1997), inventor de esta paradoja, afirma que la existencia de una **vaca de color violeta** incrementa la probabilidad de que los cuervos sean negros.

¿Por qué?



Para responder, establezcamos la ley: ***Todos los cuervos son negros***, de una manera diferente, pero lógicamente equivalente ***Todos los objetos no-negros no son cuervos***.



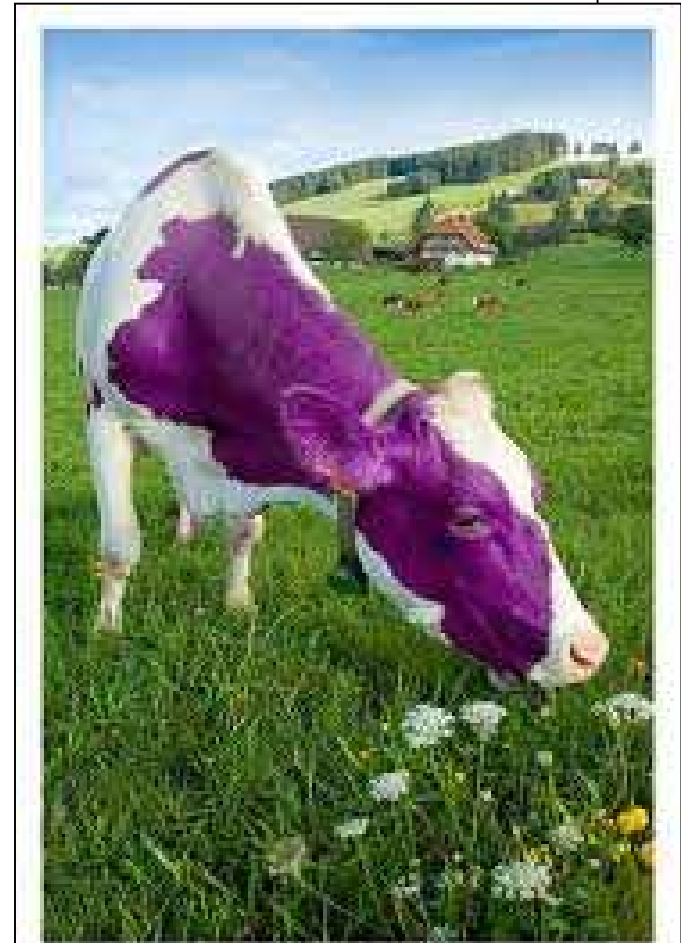
Para responder,
establezcamos la ley:
***Todos los cuervos son
negros,*** de una manera
diferente, pero lógicamente
equivalente ***Todos los
objetos no-negros no son
cuervos.***



Hempel dice: He encontrado un objeto no-negro - una vaca violeta. Esto confirma (débilmente) la ley “Todos los objetos no-negros no son cuervos”. Y así, también confirma la ley equivalente “Todos los cuervos son negros”.

Es fácil encontrar miles de objetos no-negros que no son cuervos, confirmando así de manera más fuerte la ley. El problema es que observando objetos no-negros se confirma la ley
“Todos los cuervos son negros”
pero sólo a un nivel “infinitesimal”.

La clase de objetos que no son cuervos, es tan enormemente grande comparada con las que son cuervos que el grado con el cual un no-cuervo que es no negro confirma la hipótesis es despreciable...



Es fácil encontrar miles de objetos no-negros que no son cuervos, confirmando así de manera más fuerte la ley. El problema es que observando objetos no-negros se confirma la ley

“Todos los cuervos son negros”

pero sólo a un nivel “infinitesimal”.

La clase de objetos que no son cuervos, es tan enormemente grande comparada con las que son cuervos que el grado con el cual un no-cuervo que es no negro confirma la hipótesis es despreciable...

Los detractores de Hempel opinan que la existencia de una **vaca de color violeta** confirma del mismo modo el enunciado

“Todos los cuervos son blancos”...



Ilusión fotográfica



¿Hacia que lado mira el caballo? **Jerry Downs**



Hay 4 posibilidades...



Esta foto fue tomada a los camellos en el desierto. Es justamente, considerada una de las mejores del año 2005 y fue publicada por National Geographic. **Los camellos son las líneas blancas, la forma negra que vemos es la sombra... absolutamente espectacular.**



Fotoğraf: George Steinmetz

Dev Develer

© 2005 National Geographic Society. Her hakkı saklıdır.

National Geographic Türkiye, Şubat 2005



Este castillo francés parece hundirse en el césped: sólo es una foto, que no ha sido manipulada ni retocada. La segunda imagen es del mismo edificio, pero tomada desde otro punto de vista.

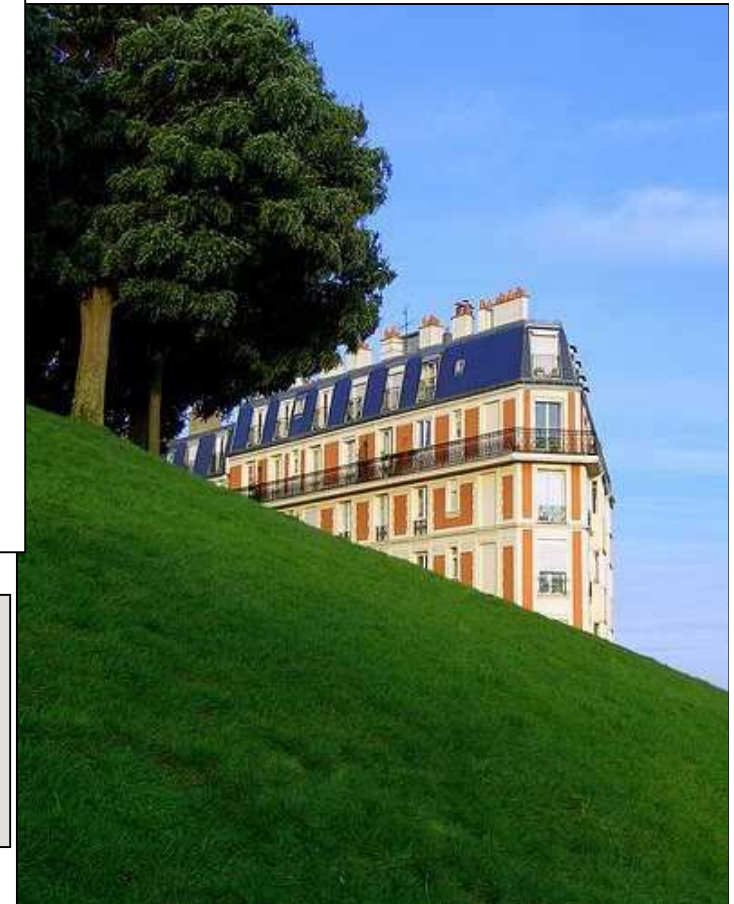
En la primera imagen se ha inclinado la cámara, y se ha tenido cuidado de incluir parte del árbol, pero no el tronco. Nuestra mente interpreta que la hierba marca la línea del horizonte...

Este castillo francés parece hundirse en el césped: sólo es una foto, que no ha sido manipulada ni retocada. La segunda imagen es del mismo edificio, pero tomada desde otro punto de vista.



En la primera imagen se ha inclinado la cámara, y se ha tenido cuidado de incluir parte del árbol, pero no el tronco. Nuestra mente interpreta que la hierba marca la línea del horizonte...

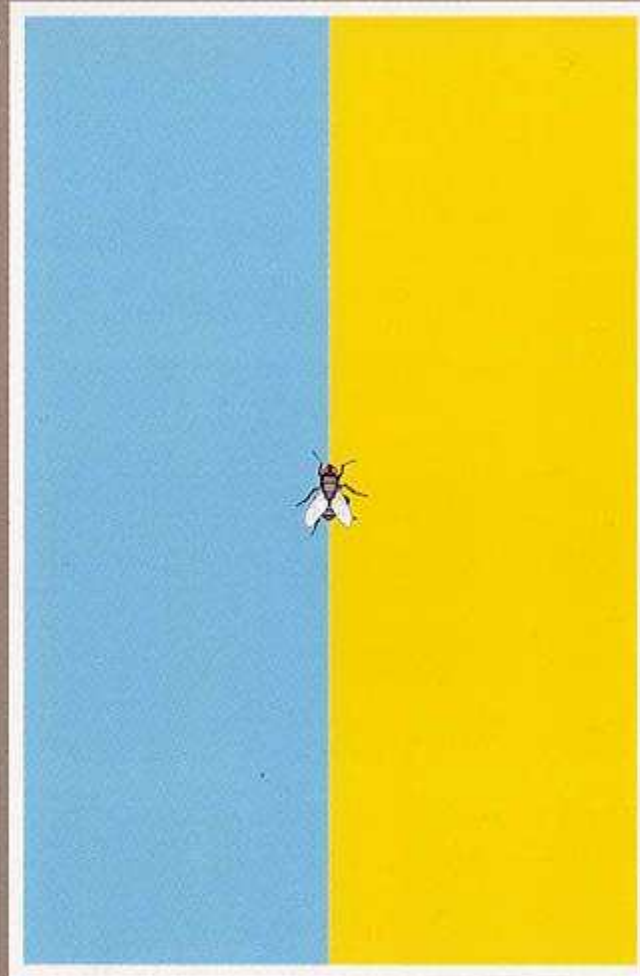
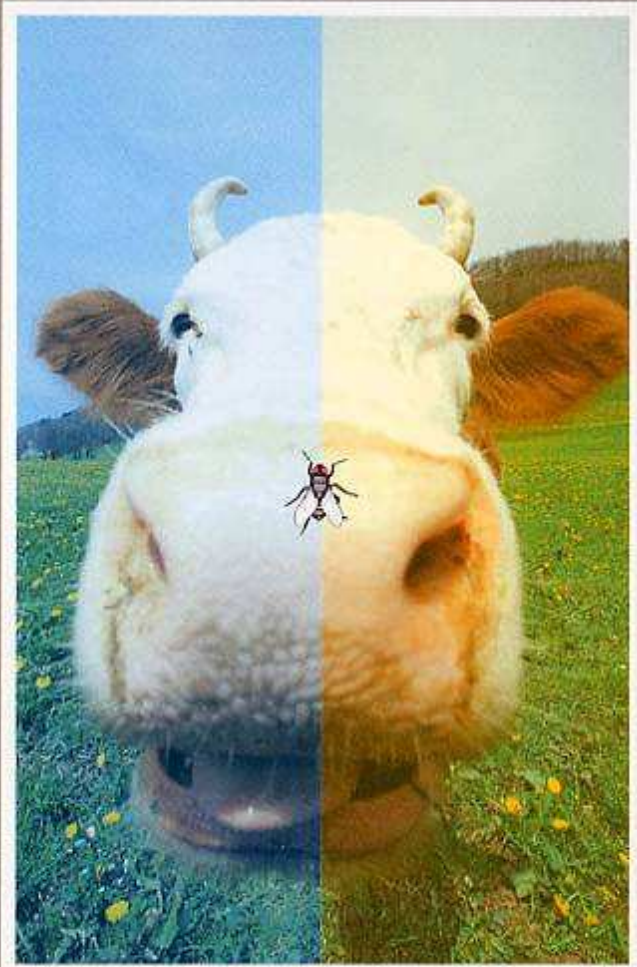
... en la imagen le indica lo contrario. La segunda figura muestra que hay una inclinación en el césped, y que el edificio no está hundiéndose. La vista del tronco ratifica la realidad de la imagen.



Ilusión óptica



http://www.archimedes-lab.org/Gallery/new_optical_illusions/index.html

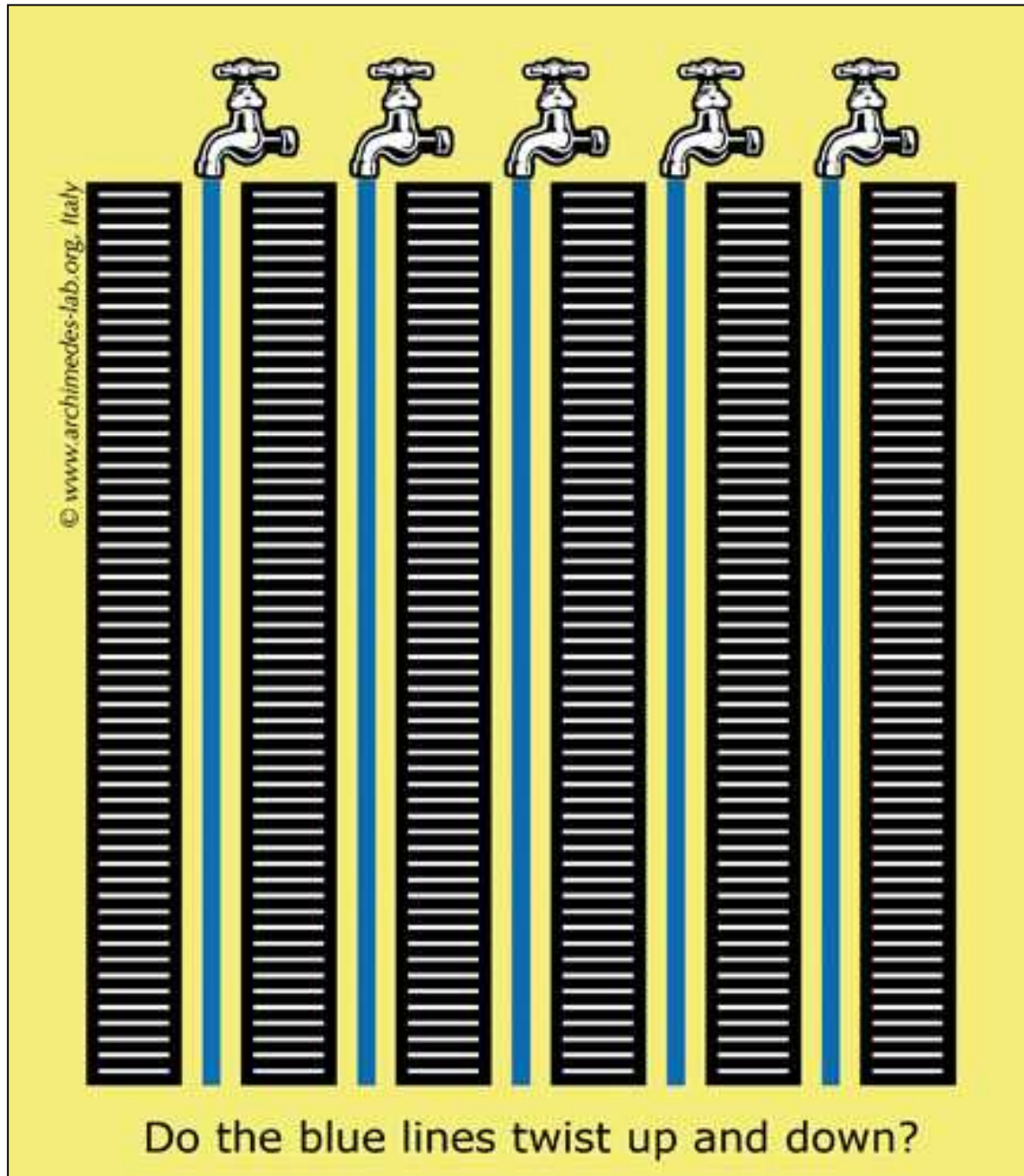


©1998, Gianni A. Sarcone, www.archimedes-lab.org

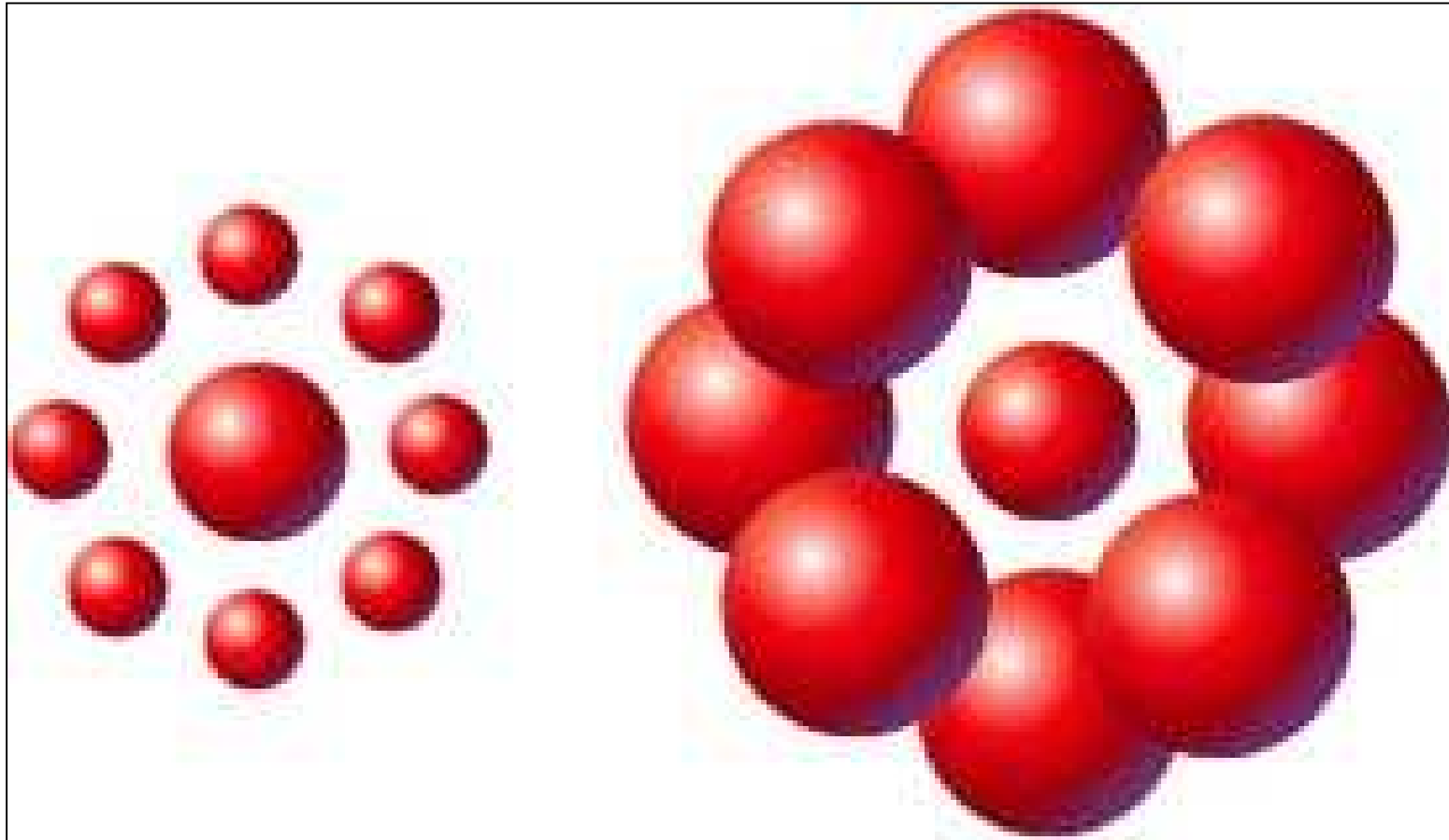
El color en esta foto de una vaca no está bien equilibrado; el lado izquierdo es menos amarillo que el derecho...

Para restaurar el color, mira la mosca del segundo diagrama durante 30 segundos y después mira a la vaca de nuevo...

http://www.archimedes-lab.org/Gallery/new_optical_illusions/index.html

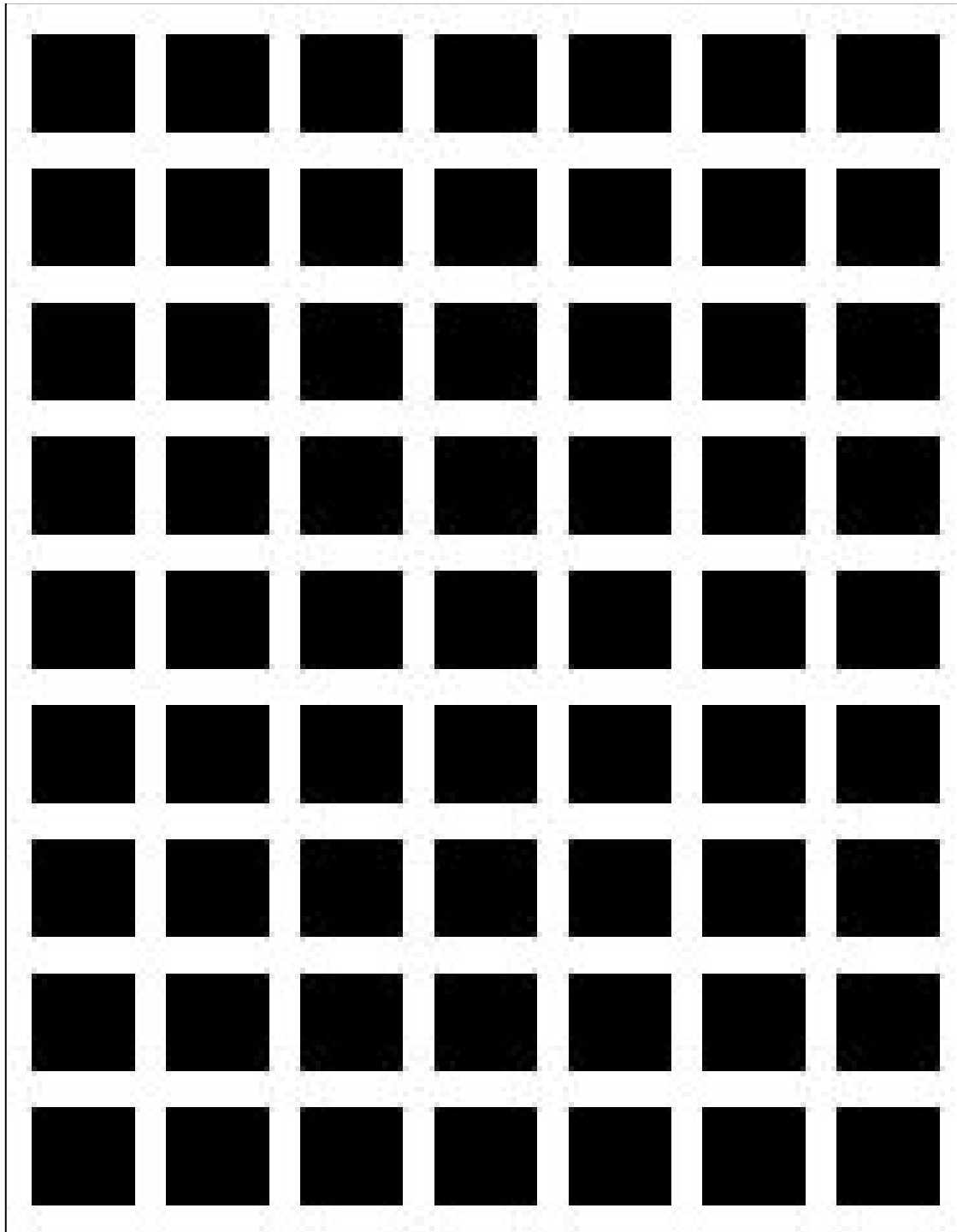


**Moción aparente:
parece que el agua
fluye... es una ilusión
óptica debida a la
“inhibición lateral”.**

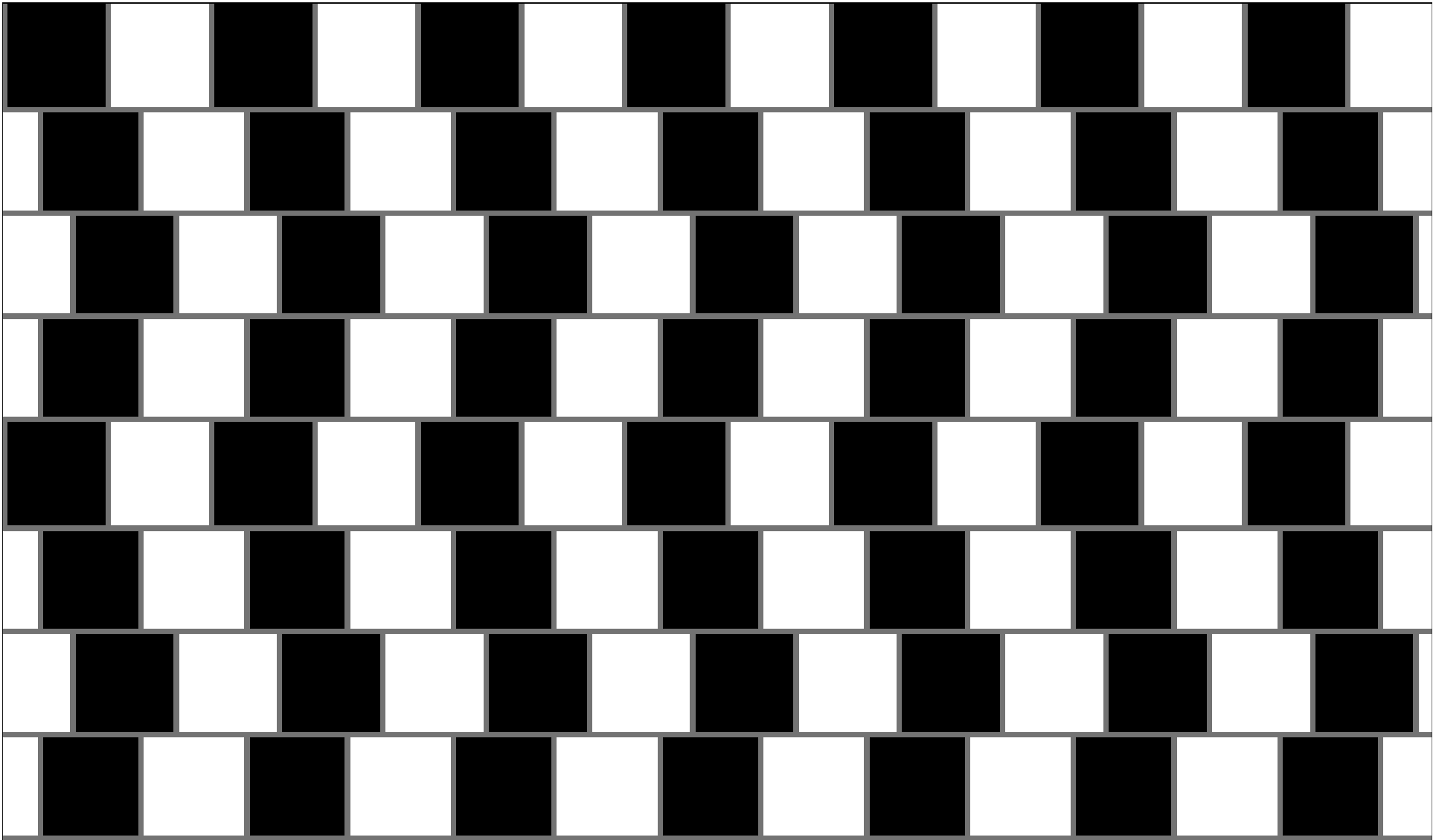


Titchener y Delboeuf

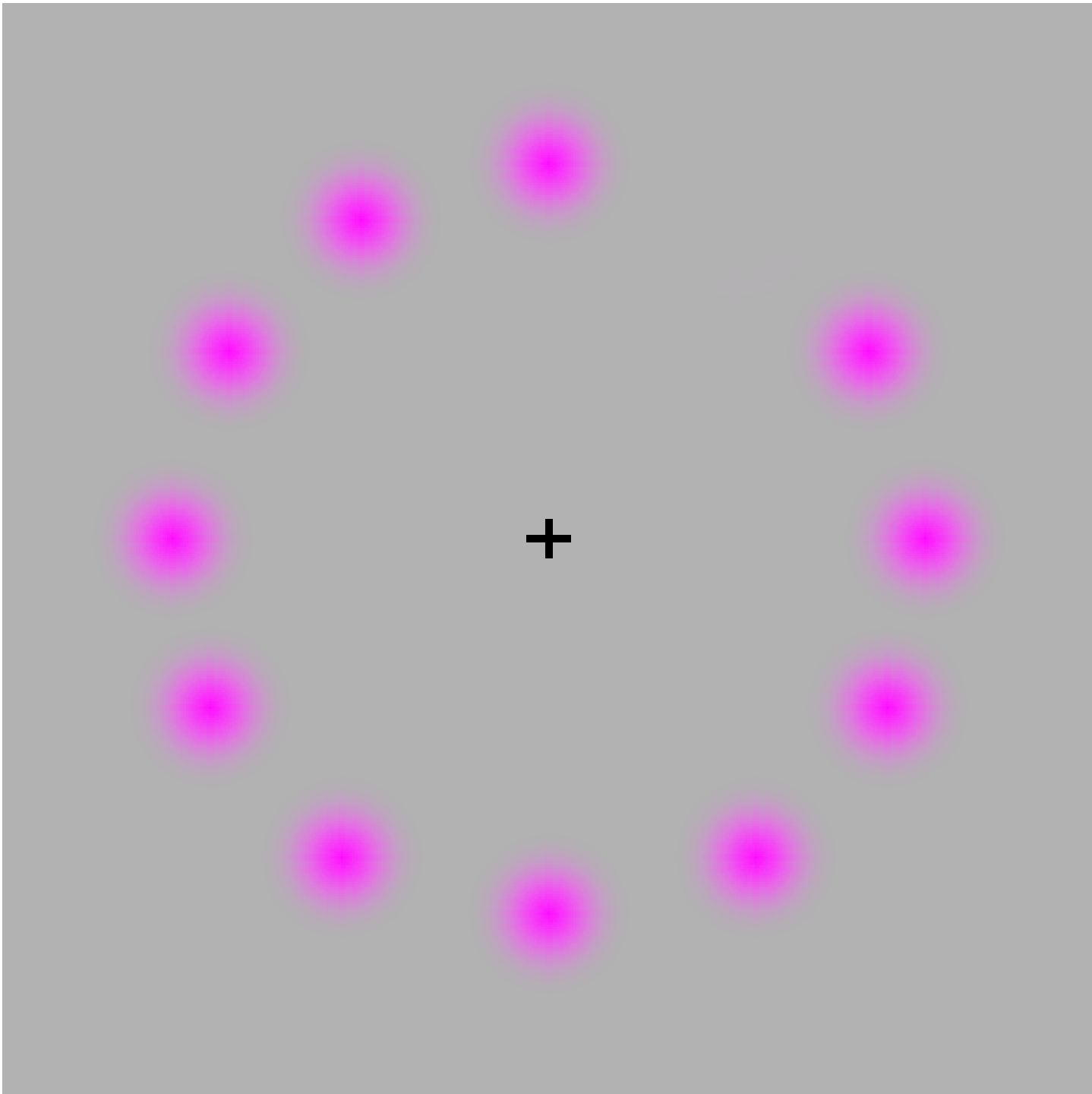
¿Cuál de los dos círculos centrales es de mayor tamaño?



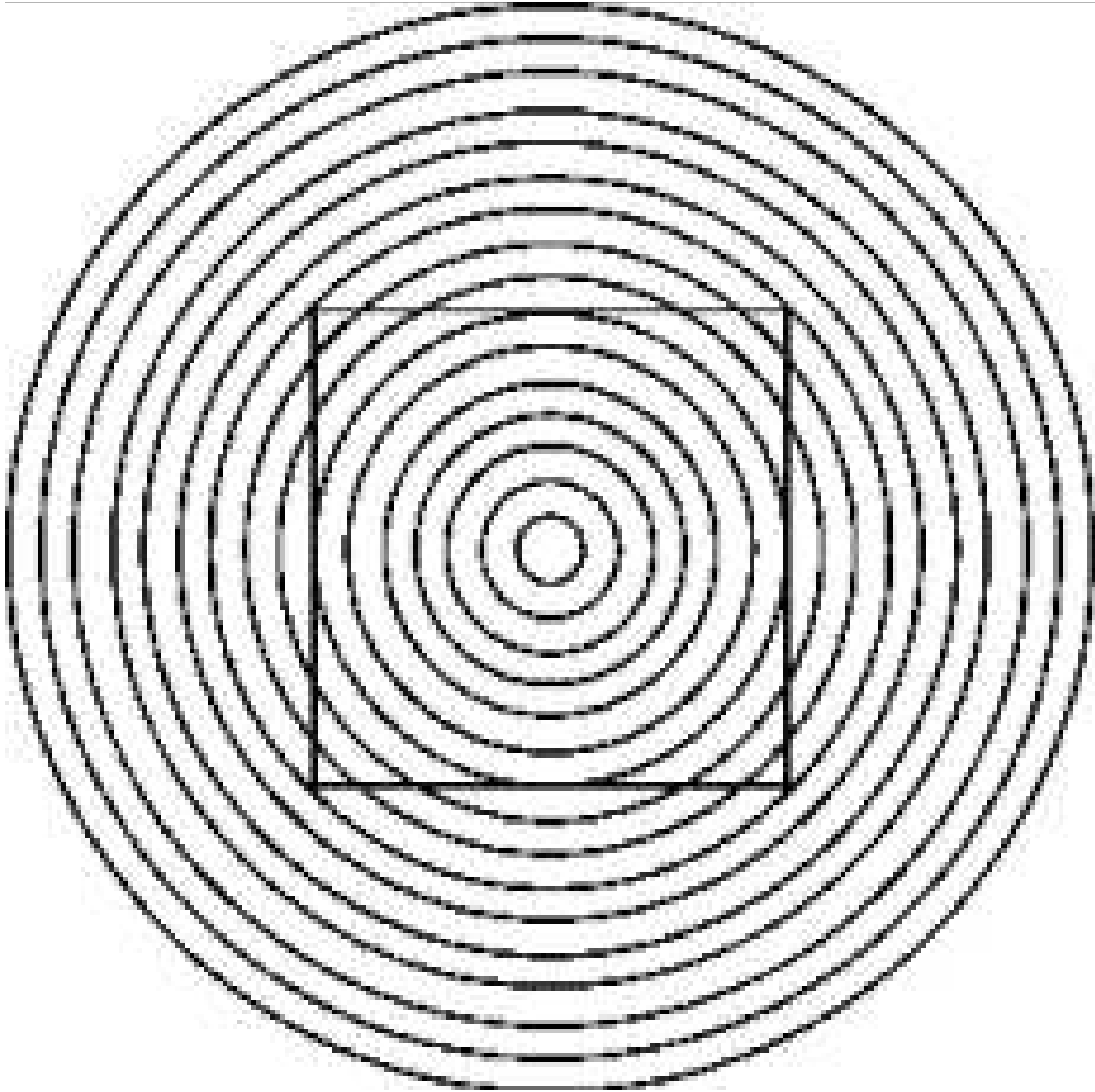
**Ilusión del enrejado
por contraste de
colores**



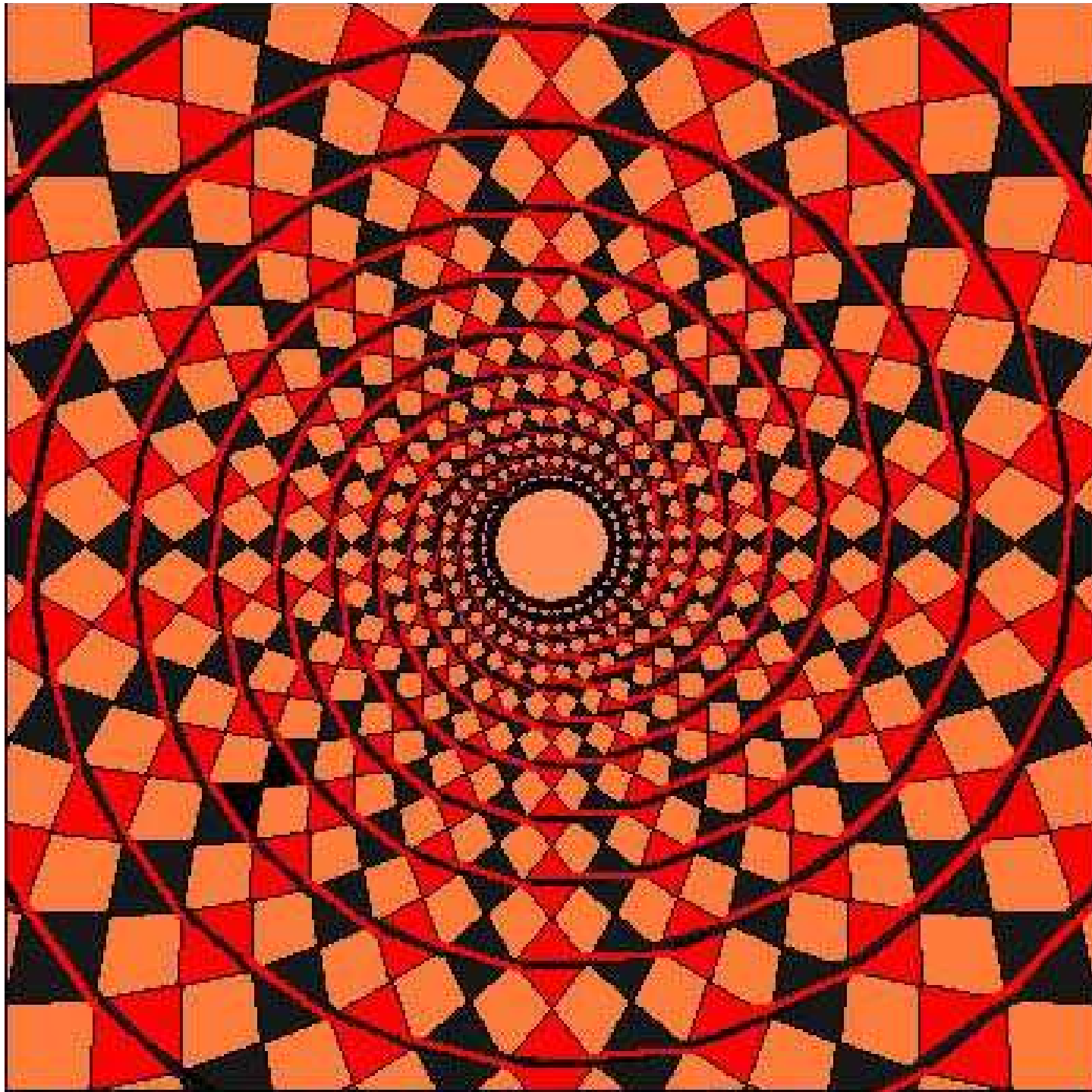
¿Son paralelas las líneas?



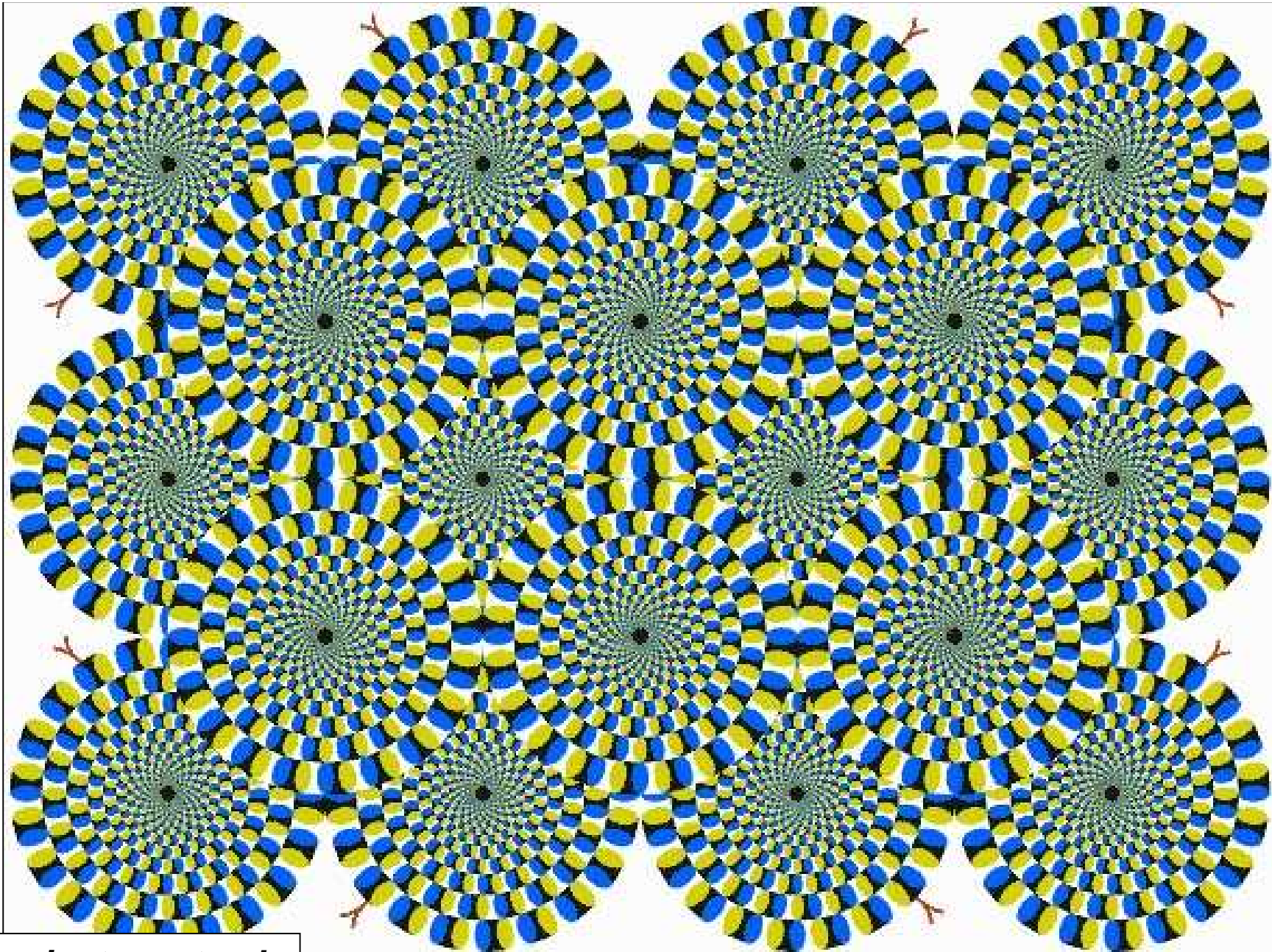
Si tus ojos siguen el movimiento del punto rotativo rosado, sólo verás un color: rosa. Si tu mirada se detiene en la cruz negra del centro, el punto rotativo se vuelve verde. Ahora, concéntrate en la cruz central. Después de un breve periodo de tiempo, todos los puntos rosas desaparecerán y sólo verás un único punto verde girando... En realidad no hay ningún punto verde, y los puntos rosas no desaparecen.



**¿Qué es
la figura
central?**



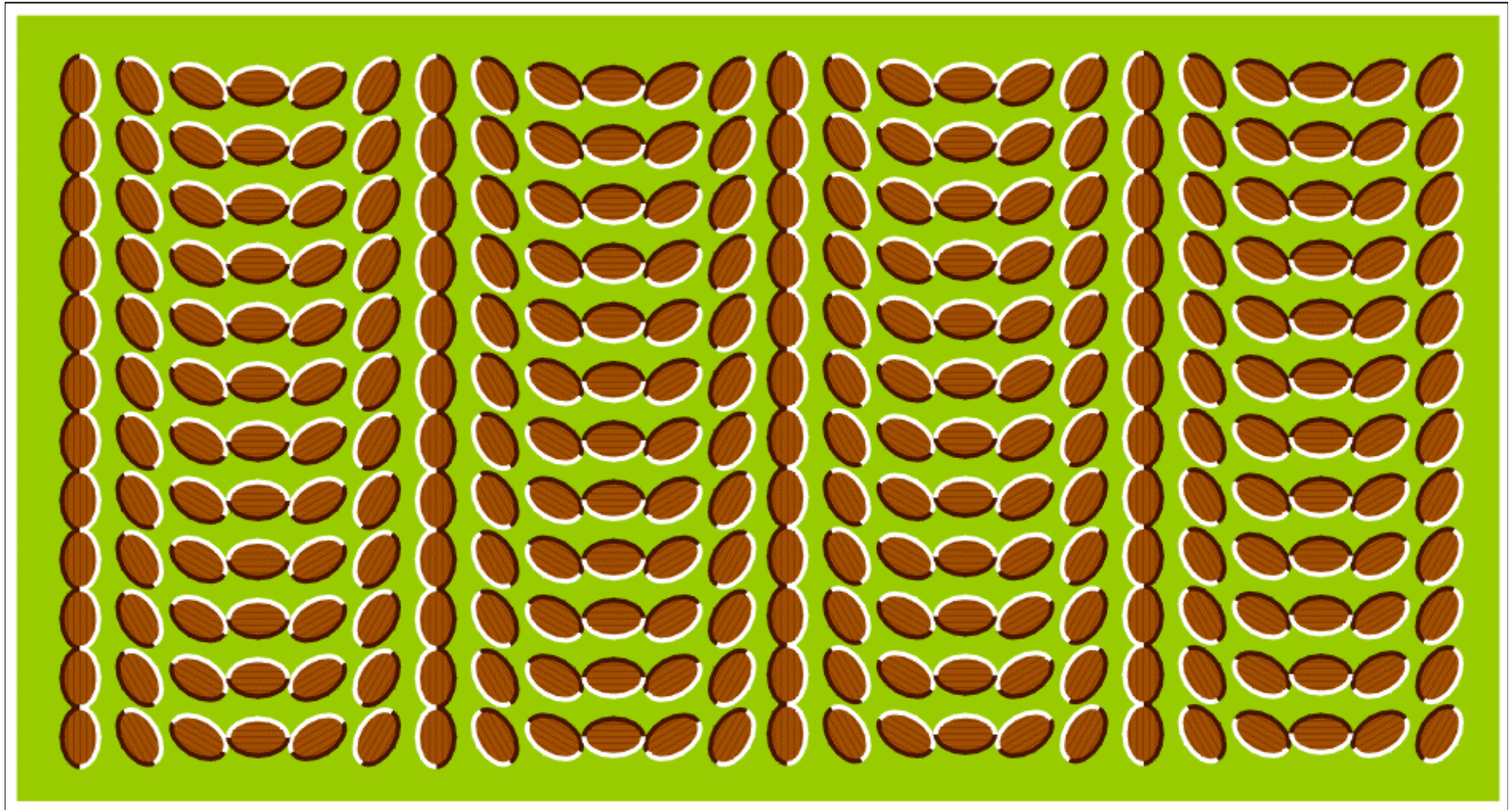
**Ilusión de
las cuerdas
de Frazier**



Serpientes rotando

<http://www.ritsumei.ac.jp/~akitaoka/index-e.html>

Akiyoshi Kitaoka



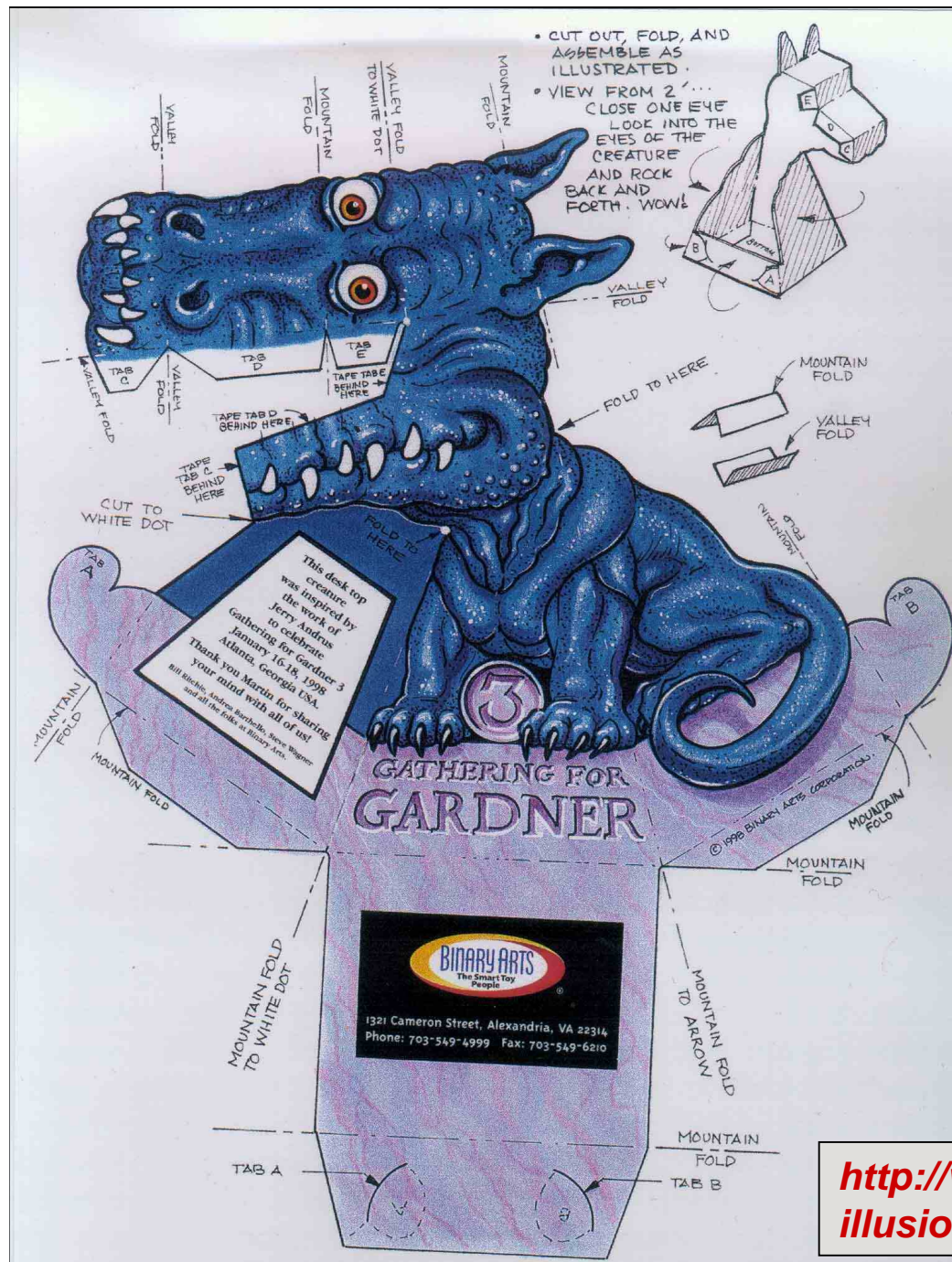
Doncurtain

<http://www.ritsumeai.ac.jp/~akitaoka/index-e.html>

Akiyoshi Kitaoka

Ilusión óptica en 3D





Si te mueves alrededor de este dragón de papel, parece que te sigue a lo largo de la habitación.

¿Qué sucede? Cuando te mueves alrededor de un objeto sólido, tu cerebro sabe como se comporta. Pero este dragón nos da “falsas pistas”... interpretamos que la nariz del dragón apunta hacia nosotros, cuando de hecho su cara es cóncava...

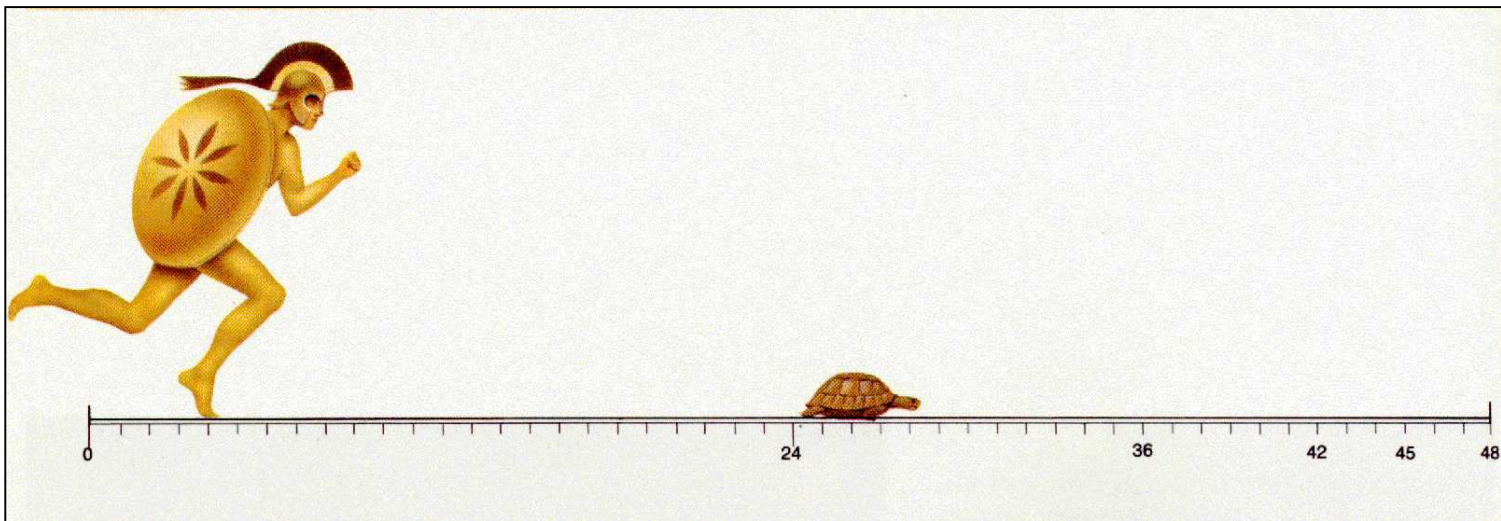
http://www.grand-illusions.com/opticalillusions/dragon_illusion/



© www.grand-illusions.com

Aquiles y la tortuga (Zenón)

Se arregla una carrera entre Aquiles y la tortuga. Como Aquiles es mucho más veloz que la tortuga, el héroe permite una cierta ventaja al “lentísimo” animal.



Paradoja: Aquiles no puede **nunca** alcanzar a la tortuga, independientemente de lo rápido que corra y de lo larga que sea la carrera: cada vez que el perseguidor alcanza un lugar donde ha estado la perseguida, la tortuga se adelanta un poco...

Algo debe ser falso en el argumento... la falacia que surge es la noción equivocada de que cualquier sucesión infinita de intervalos de tiempo debe sumar toda la eternidad...



Solución (física):

Si el espacio y el tiempo son indefinidamente divisibles, el movimiento sería imposible.

Algo debe ser falso en el argumento... la falacia que surge es la noción equivocada de que cualquier sucesión infinita de intervalos de tiempo debe sumar toda la eternidad...



Solución (física): Si el espacio y el tiempo son indefinidamente divisibles, el movimiento sería imposible.

Solución (matemática): convergencia de la serie
 $1/2 + 1/4 + 1/8 + \dots + 1/2^n + \dots = 1$

Figuras imposibles



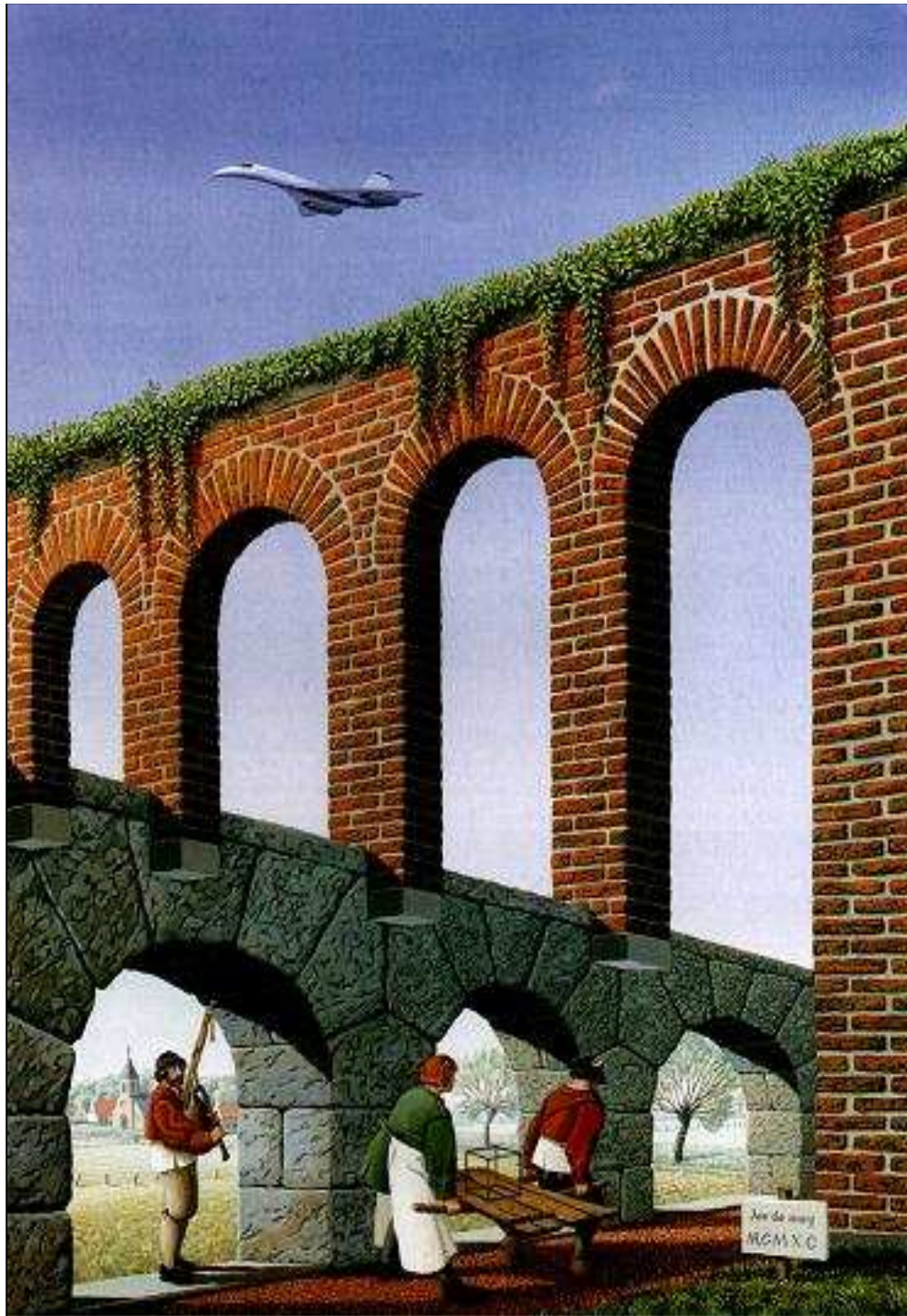
Guido Moretti (1947-)

http://www.guidomoretti.it/S_terzavia.htm



Anillo y Paralelepipedos imposibles

Video + video Haemakers



Aquaviaduct

Jos de Mey (1928-)

***Un personaje de
Magritte con
objetos de
Escher, 1996***



Jos de Mey

La paradoja de Condorcet

Tres votantes V_1 , V_2 y V_3 eligen entre tres alternativas **A** (Alicia), **B** (Benito), **C** (Cecilia), como sigue:

$$V_1 = \{ \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \}, V_2 = \{ \mathbf{C}, \mathbf{A}, \mathbf{B} \}, V_3 = \{ \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{A} \}$$

A es preferida a **B** por dos a uno, **B** preferido a **C** por dos a uno y **C** a **A** por dos a uno también.

La paradoja de Condorcet

Tres votantes V_1 , V_2 y V_3 eligen entre tres alternativas **A** (Alicia), **B** (Benito), **C** (Cecilia), como sigue:

$$V_1 = \{ A, B, C \}, V_2 = \{ C, A, B \}, V_3 = \{ B, C, A \}$$

A es preferida a **B** por dos a uno, **B** preferido a **C** por dos a uno y **C** a **A** por dos a uno también.

Una simple comprobación por pares no determina una alternativa preferida entre las tres. Se trata de una situación de *ausencia de ganador o paradoja de Condorcet*, al existir una *mayoría cíclica*.

El procedimiento de elección más usual es la regla de la ***mayoría simple***, donde cada votante elige un candidato, y el que reciba más de la mitad de los votos es el ganador.

Esta regla es válida cuando sólo se tienen dos candidatos, ya que gana el que tiene más votos.

El procedimiento de elección más usual es la regla de la ***mayoría simple***, donde cada votante elige un candidato, y el que reciba más de la mitad de los votos es el ganador.

Esta regla es válida cuando sólo se tienen dos candidatos, ya que gana el que tiene más votos.

Cuando hay más de dos, puede ser que el candidato con mayor número de votos no tenga la mayoría absoluta de todos los votos emitidos.

La solución más frecuente es recurrir a la regla de la ***pluralidad o mayoría relativa***, por la que se elige al candidato que queda situado en primer lugar por el mayor número de votantes.

Otra solución es aplicar el ***criterio de Condorcet*** o de comparación por parejas, por el que se elige el candidato que derrota a todos los demás en elecciones entre pares de candidatos, usando la regla de mayoría. Por este método se puede producir una relación no transitiva, la paradoja de Condorcet.



Otra solución es aplicar el ***criterio de Condorcet*** o de comparación por parejas, por el que se elige el candidato que derrota a todos los demás en elecciones entre pares de candidatos, usando la regla de mayoría. Por este método se puede producir una relación no transitiva, la paradoja de Condorcet.



El problema generado por la posibilidad de mayorías cíclicas está directamente relacionada con la probabilidad de un tal suceso: se puede probar que la probabilidad de una mayoría cíclica se incrementa cuando el número de opciones aumenta, y decrece cuando el número de votantes aumenta.

Figuras reversibles



¿El
granjero
inglés...?



¿El
granjero
inglés o
el asno?





Sergio Buratto

¿sapo o...?



Sergio Buratto
¿sapo o caballo?





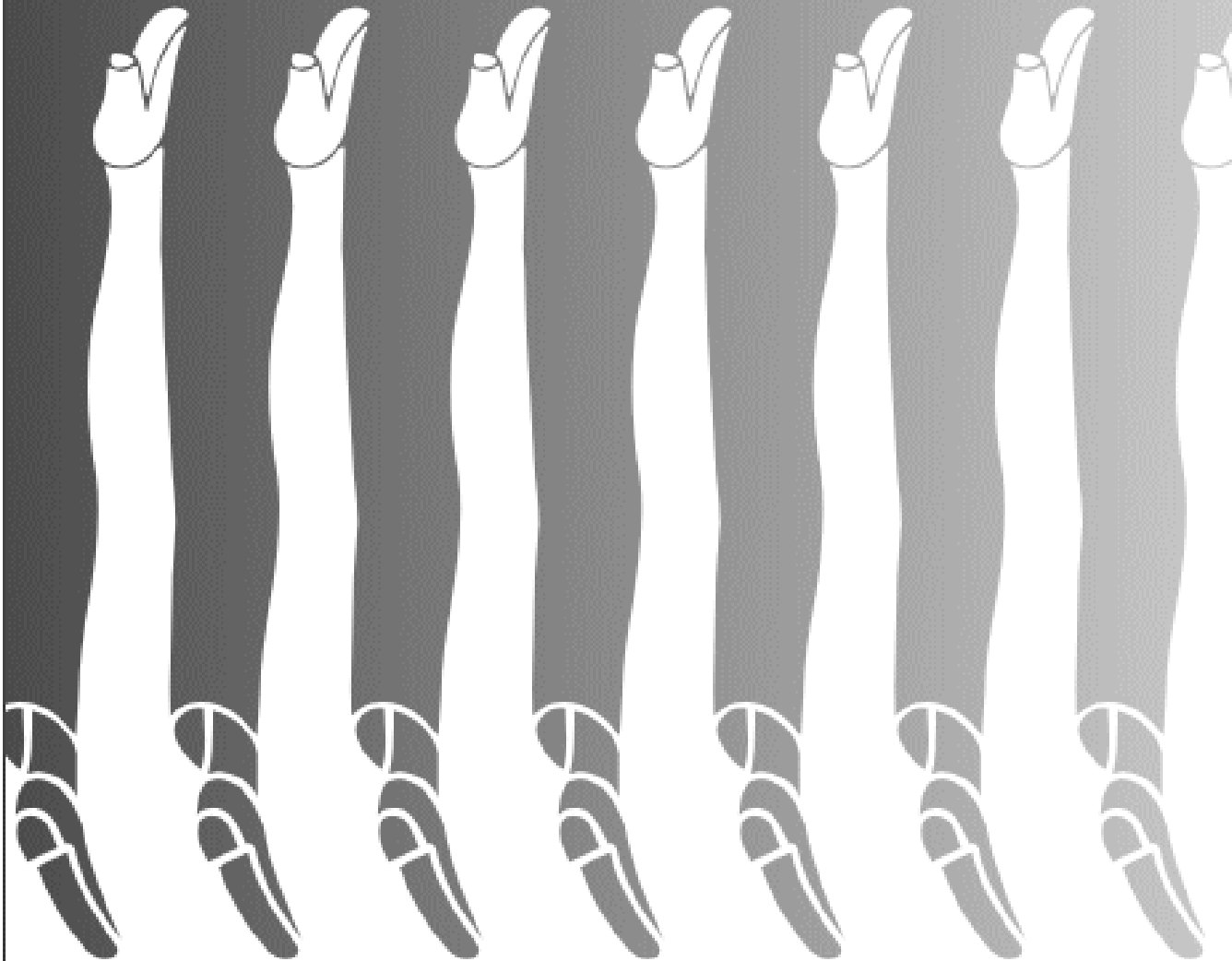
Encore, escultura
en madera



**Shigeo
Fukuda
(1932-)**

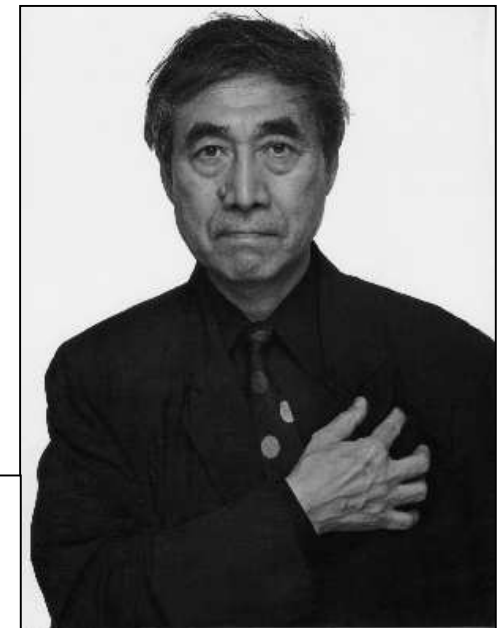
Video + Fukuda clamps

www.ilusaodeotica.com



***Piernas de
dos géneros
diferentes
(1975)***

**Shigeo
Fukuda**



http://psylux.psych.tu-dresden.de/i1/kaw/diverses%20Material/www.illusionworks.com/html/art_of_shigeo_fukuda.html



Peter Newell
(1862-1924)
Caballero y elfo

<http://wwar.com/masters/n/newell-peter.html>

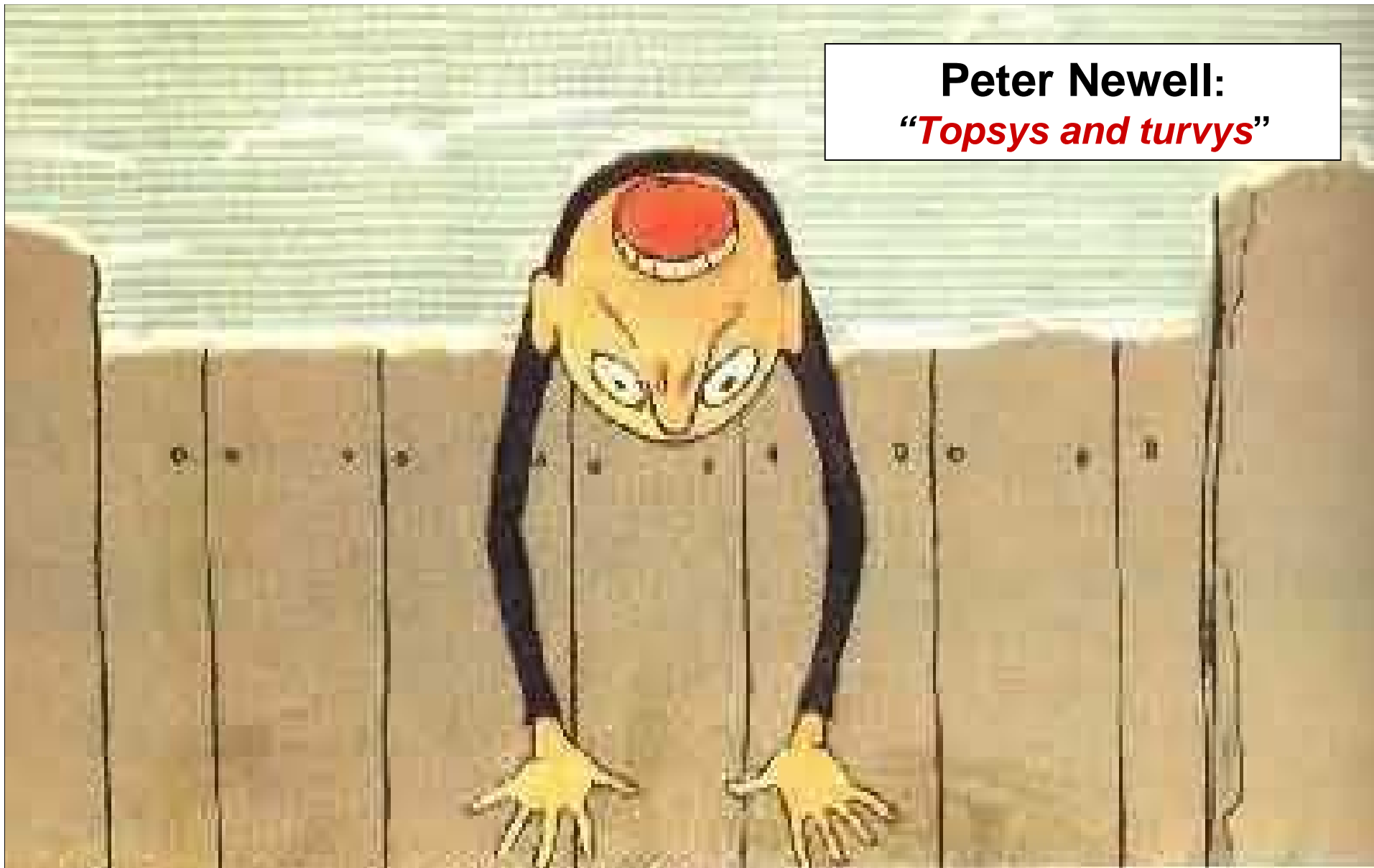
Un hombre sobre
un caballo ataca a
un pobre elfo....



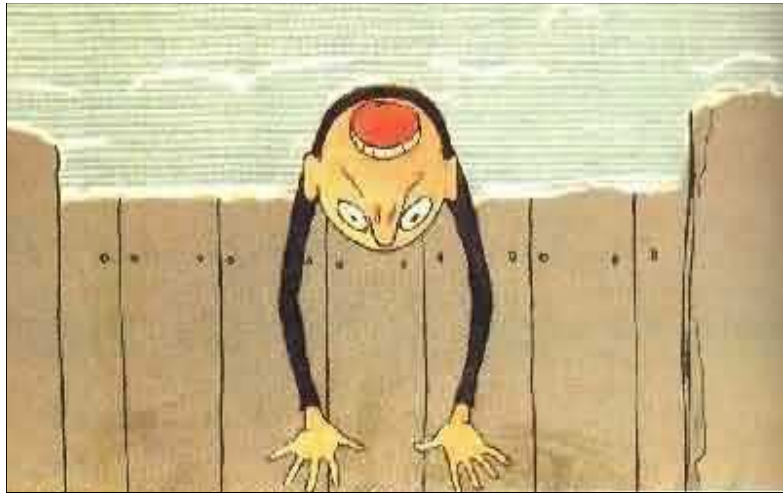
Un hombre sobre un caballo ataca a un pobre elfo... que sabe defenderse.



Peter Newell:
“Topsys and turvys”



Hombre saliendo del agua...



**Hombre saliendo del agua...
o ahogándose.**

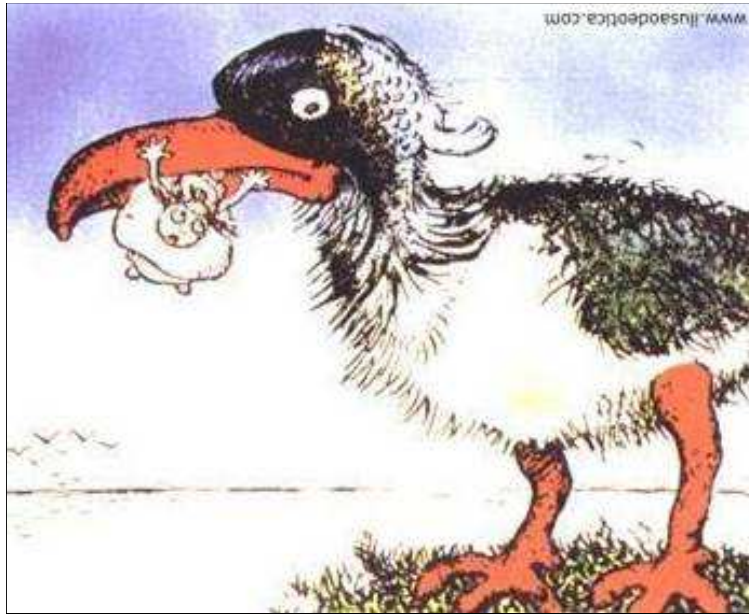


Gustave Verbeek
(1867-1937) "*A fish story*"



El mayor de los pájaros la
coge por su vestido...

Gustave Verbeek (1867-1937)
“A fish story”



El mayor de los pájaros la
coge por su vestido...



... Justo cuando llega cerca de la isla, otro pez le ataca, golpeándole furiosamente con su cola...

THE UPSIDE-DOWNS OF LITTLE LADY LOVEKINS AND OLD MAN MUFFAROO THE THRILLING ADVENTURE OF THE DRAGON



12. Then he gets Lovekins, and homeward they go, talking about their exciting ride.

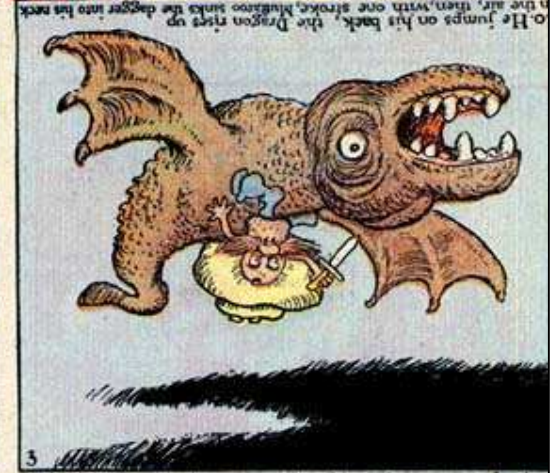
(COPYRIGHT 1904, BY THE NEW YORK HERALD CO.)

Lovekins and Muffaroo are startled by a loud roar and a sound of whirring wings.



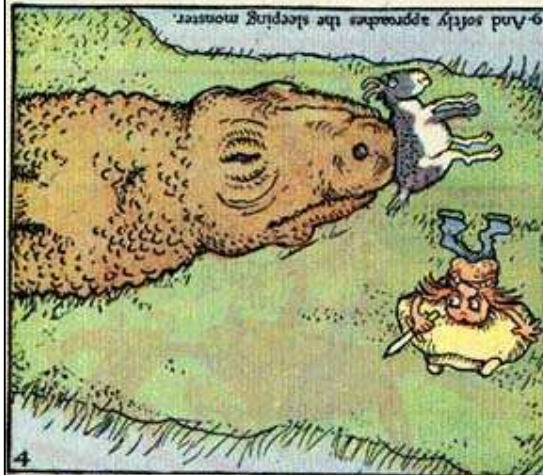
11. The Dragon falls dead, and Muffaroo cokes down on the soft marshes, unhurt.

It is a terrible Dragon that comes swooping down on them. Muffaroo escapes, but little Lady Lovekins gets caught.



10. He jumps on his back, the Dragon rises up in the air, then, with one stroke, Muffaroo sinks the dagger into his neck.

She tries to stab the monster, but his scales are very hard, as he just flies along without feeling the knife at all. For two days and two nights they travel thus, until at last the Dragon begins to feel hungry!



9. And softly approaches the sleeping monster.

So he kills some goats that are grazing in a field, and eats them, watching Lovekins all the while. But he eats too much and with one goat still in his mouth he falls asleep.



8. So taking Lovekins knife she creeps through the woods.

Then Lovekins steals quietly away and hides herself in some woods. Suddenly she hears something tramping over the leaves toward her.

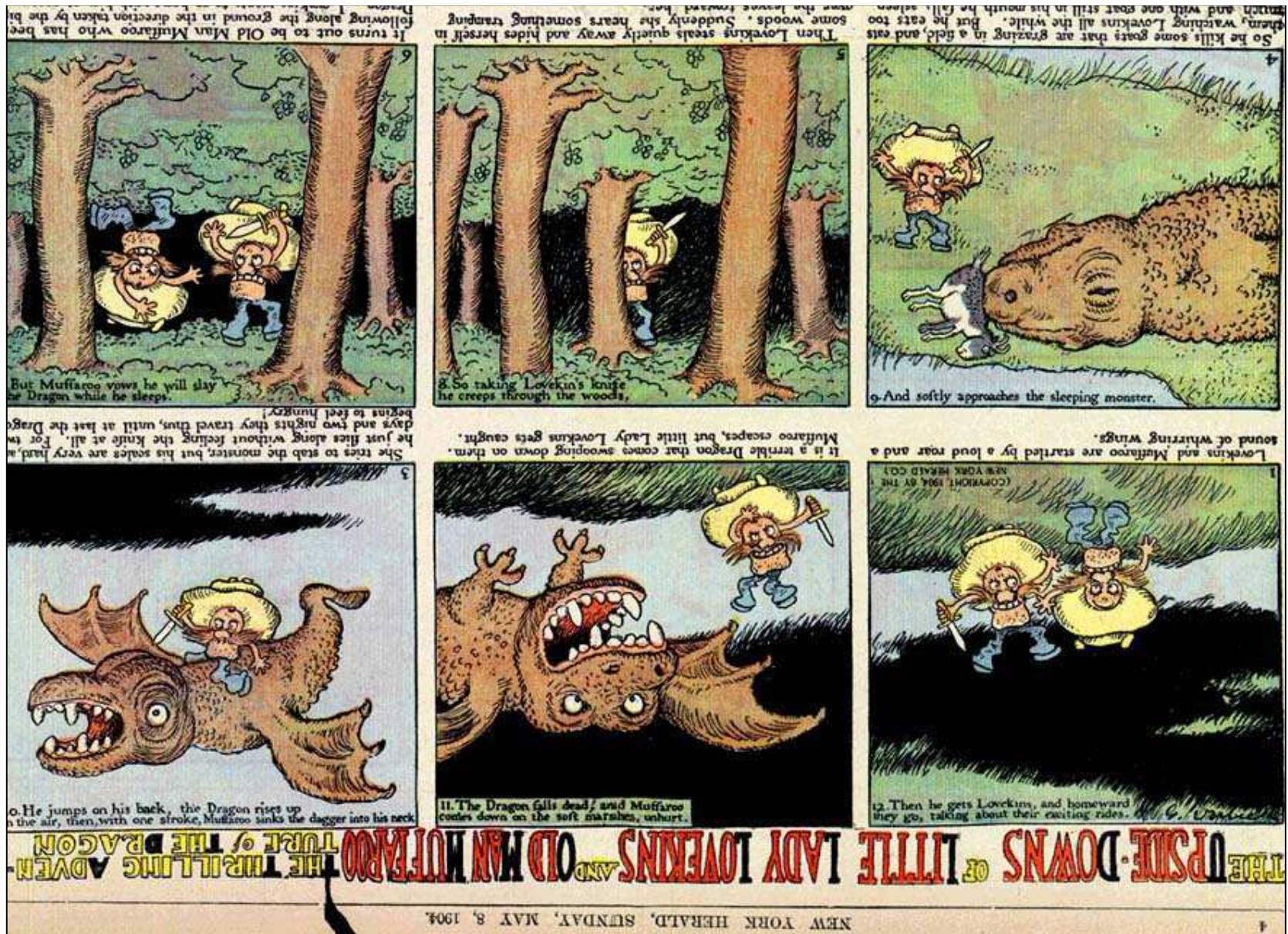


7. But Muffaroo vows he will stay by the Dragon while he sleeps.

It turns out to be Old Man Muffaroo who has been following along the ground in the direction taken by the big Dragon. Lovekins is not at all surprised.

Gustave Verbeck *Little lady Lovekins and Old man Muffaroo:* the Thrilling Adventure of the Dragon

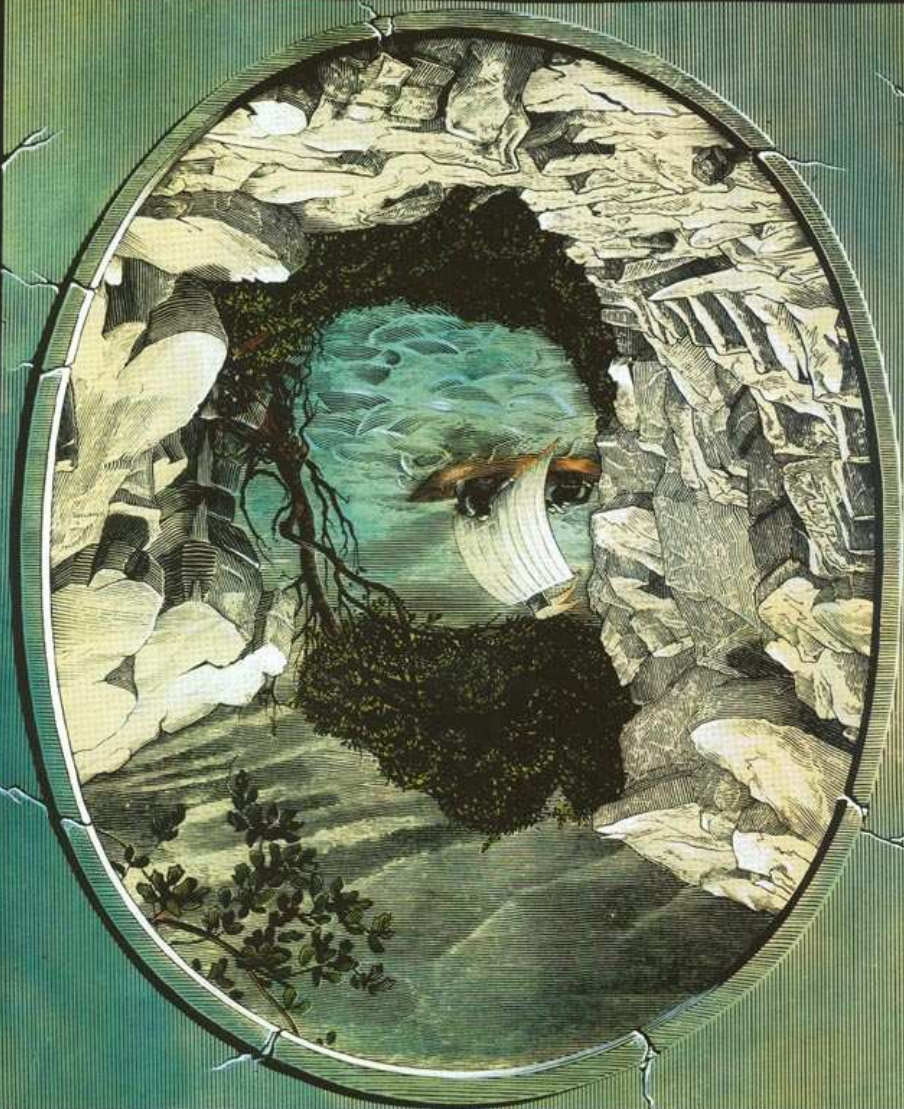
<http://www.lambiek.net/verbeck.htm>



Gustave Verbeck *Little lady Lovekins and Old man Muffaroo:*
 the Thrilling Adventure of the Dragon

<http://www.lambiek.net/verbeck.htm>

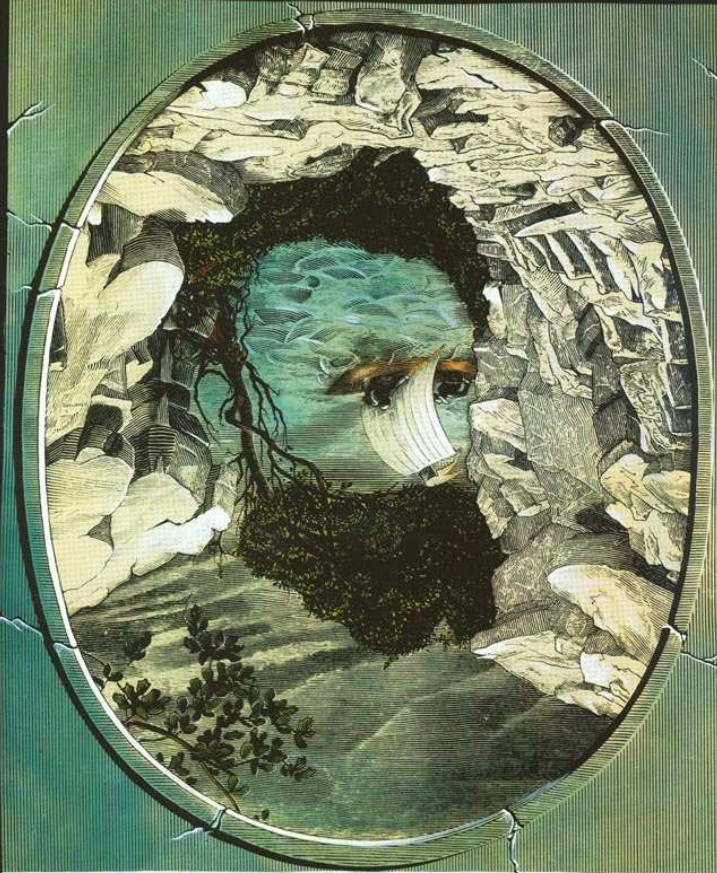
L'île mystérieuse



JULES VERNE

Itsván Orosz

L'île mystérieuse



JULES VERNE

JULES VERNE



L'île mystérieuse



**Rex
Whistler
(1905-1944)**
*¿Sherlock
Holmes o ...?*

<http://wwar.com/masters/w/whistler-rex.html>



***¿Sherlock
Holmes o
Robin Hood?***



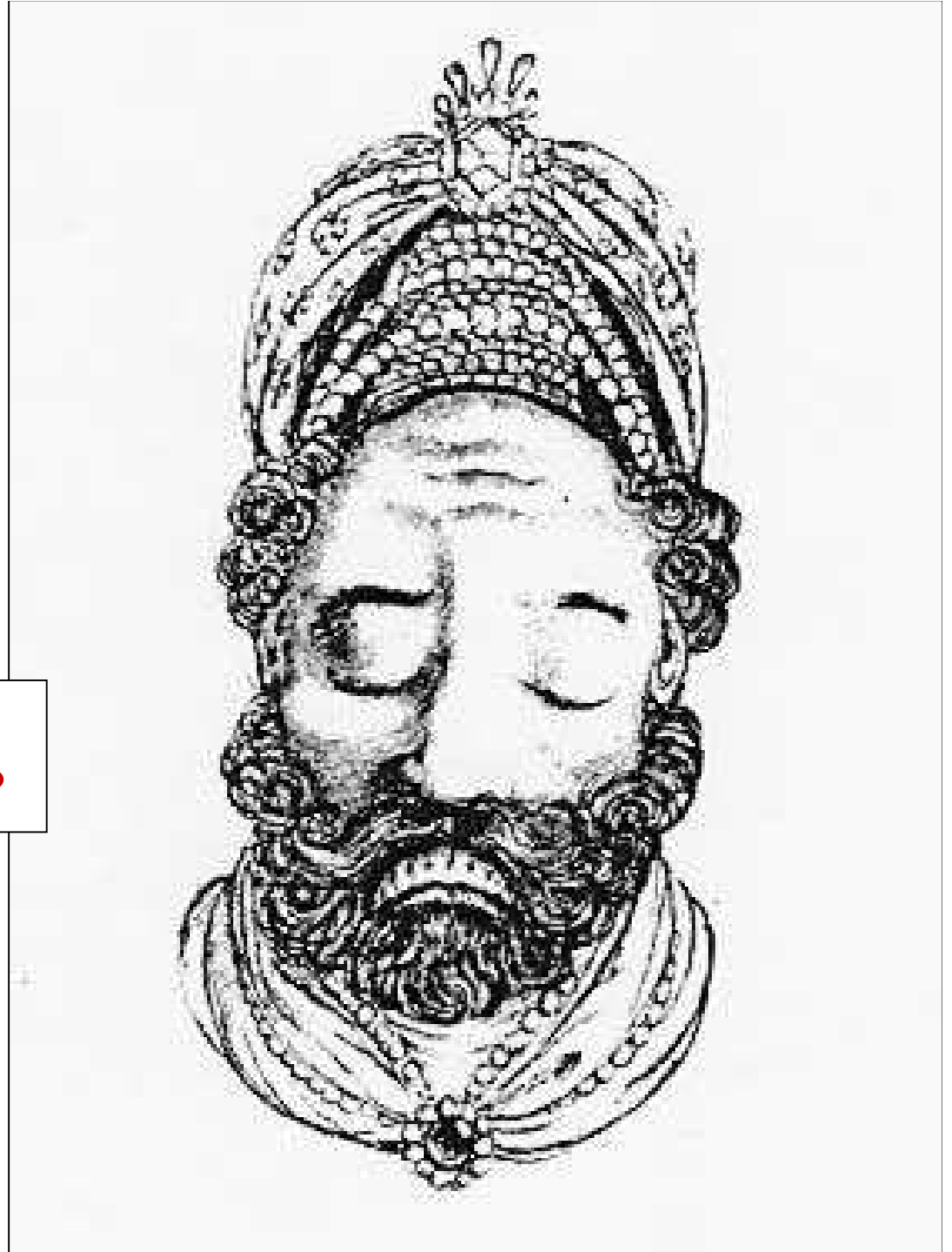


Rex Whistler
¿Sherezade o ...?

<http://wwar.com/masters/w/whistler-rex.html>



Rex Whistler
¿Sherezade o el sultán?



Saber sin estudiar

***Admiróse un portugués
de ver que en su tierna infancia
todos los niños en Francia
supiesen hablar francés.***

***«Arte diabólica es»,
dijo, torciendo el mostacho,
«que para hablar en gabacho
un fidalgo en Portugal
llega a viejo, y lo habla mal;
y aquí lo parla un muchacho».***

Nicolás Fernández de Moratín (1737-1780)

Saber sin estudiar

***Admiróse un portugués
de ver que en su tierna infancia
todos los niños en Francia
supiesen hablar francés.***

***«Arte diabólica es»,
dijo, torciendo el mostacho,
«que para hablar en gabacho
un fidalgo en Portugal
llega a viejo, y lo habla mal;
y aquí lo parla un muchacho».***

Nicolás Fernández de Moratín (1737-1780)

***¿Crees en brujas, Garai?
Le dije a mi viejo criado.
No señor, porque es pecado;
Pero haberlas sí las hay.***

Benjamín Pereira Gamba

Saber sin estudiar

***Admiróse un portugués
de ver que en su tierna infancia
todos los niños en Francia
supiesen hablar francés.***

***«Arte diabólica es»,
dijo, torciendo el mostacho,
«que para hablar en gabacho
un fidalgo en Portugal
llega a viejo, y lo habla mal;
y aquí lo parla un muchacho».***

Nicolás Fernández de Moratín (1737-1780)

GRACIAS



***¿Crees en brujas, Garai?
Le dije a mi viejo criado.
No señor, porque es pecado;
Pero haberlas sí las hay.***

Benjamín Pereira Gamba