Estudio dinámico de grafos y mosaicos*

Uno de los primeros objetivos de la **Teoría de Foliaciones** es el de estudiar la influencia de la topología de la variedad ambiente sobre la topología y la dinámica transversa de las hojas.

Actualmente, esta cuestión se aborda estudiando propiedades topológicas, métricas o dinámicas de un conjunto residual de hojas, llamadas *hojas genéricas en sentido topológico*, o bien de un conjunto de hojas con medida total, llamadas *hojas genéricas en sentido medible* (se suele considerar entonces una *medida invariante por holonomía*).

Desde el punto de vista de la *dinámica topológica*, el estudio de las foliaciones puede reducirse al caso de las *foliaciones minimales* (por hojas densas). Pero, este proceso provoca la desaparición de la "regularidad transversa" impuesta a cualquier foliación, y surge de manera natural la noción de **laminación**, al sustituir la variedad ambiente por un espacio métrico compacto (aunque las hojas siguen siendo variedades). Esta "falta de regularidad" del espacio ambiente permite una dinámica mucho más rica, impensable en el caso de foliaciones minimales. Los grafos y mosaicos proporcionan ejemplos de tales laminaciones.

*** En este póster, presentamos el Proyecto de Tesis Doctoral de Ainhoa Berciano Alcaraz, que realizará bajo la supervisión de Fernando Alcalde Cuesta y Marta Macho Stadler.**

Un **mosaico** del plano es una descomposición del plano en polígonos (las *teselas*), obtenidos por traslación (o mediante un subgrupo de movimientos rígidos conteniendo a las traslaciones) a partir de un número finito de teselas “modelo”. Se dota al conjunto de los mosaicos del plano (copiando la construcción realizada en el caso de grafos) de la topología de Hausdorff-Gromov: dos mosaicos serán “próximos” si coinciden sobre una “gran bola” centrada en el origen, salvo pequeñas traslaciones. Identificando dos mosaicos con las mismas teselas, se obtiene un espacio métrico compacto, dotado de una laminación definida por la acción natural del grupo de traslaciones (ver [C], [Gh], [R] y [S]).

Los mosaicos periódicos dan lugar a hojas compactas, pero los mosaicos aperiódicos con la propiedad de “isomorfismo local” definen laminaciones minimales. Un ejemplo típico es el *mosaico de Penrose* construido a partir de dos teselas modelo (ver [P], [C] y [R]):

Existen una infinidad no numerable de teselaciones de Penrose distintas, que presentan una simetría pentagonal. El espacio de los universos de Penrose es el resultado de identificar cada mosaico de Penrose con cualquiera de sus trasladados, es decir, el espacio de las hojas de la laminación correspondiente.

El espacio de los universos de Penrose es un espacio no conmutativo muy interesante (ver [C]), pese a que su topología es trivial. El álgebra de funciones no contiene información alguna, pero su versión no conmutativa, la C^*-*álgebra* de la laminación (a través de su grupo de K-teoría), guarda información sobre la frecuencia de aparición de ciertos motivos (que resulta ser un elemento del grupo $\mathbf{Z} + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\mathbf{Z}$).

El propósito global de la Tesis es avanzar en la comprensión de las laminaciones definidas por grafos y mosaicos desde el punto de vista de la dinámica topológica y la teoría ergódica, y proporcionar una descripción precisa de los espacios no conmutativos asociados a esos objetos. En concreto, algunos de los puntos a estudiar serán:

- la obtención de una descripción precisa de la estructura geométrica de las laminaciones definidas por grafos y mosaicos, por medio del proceso clásico de suspensión;
- desde el punto de vista de la teoría ergódica, las laminaciones minimales por mosaicos admiten medidas transversas invariantes (ver

[S]). Ciertos ejemplos de laminaciones minimales definidas por grafos sugieren un método de construcción explícita de tales medidas. Se trataría además de determinar en ambos casos cuándo la medida es únicamente ergódica;

- cabe plantear además el estudio de ciertas propiedades de las hojas como el crecimiento, el número de finales o las propiedades de Følner y Liouville;
- sería interesante abordar el estudio de los espacios no conmutativos asociados a las laminaciones definidas por grafos y mosaicos desde una doble perspectiva topológica (estudio de las C^*-álgebras y de su K-teoría) y medible (estudio de las álgebras de Von Neumann).

Bibliografía

[C] A. Connes, *Non commutative geometry*, Academic Press, 1994.

[Gh] E. Ghys, *Laminations par surfaces de Riemann*, Panoramas et Synthèses **8**, 49-95, 1999.

[P] R. Penrose, *The role of aesthetics in pure and applied mathematical research*, Bull. Inst. Math. Appl. **10**, 266-271, 1974

[R] E. A. Robinson Jr., *The dynamical properties of Penrose tilings*, Trans. Amer. Math. Soc. **348**, 4447-4464, 1996.

[S] B. Solomyak, *Dynamics of self-similar tilings*, Ergod. Th. and Dynam. Systems **17**, 695-738, 1997.

Fernando Alcalde Cuesta
Universidade de Santiago de Compostela

Ainhoa Berciano Alcaraz y Marta Macho Stadler
Universidad del País Vasco-Euskal Herriko Unibertsitatea