CORRESPONDENCIAS DE GRUPOIDES*

Marta MACHO STADLER
Universidad del País Vasco

A. Connes introduce en [C] la noción de correspondencia en el contexto de la teoría de álgebras de Von Neumann. Se trata de un concepto de morfismo, que da lugar a la conocida noción de correspondencia entre C*-álgebras. En [MRW], P.S. Mulhy, J.N. Renault y D. Williams definen las *equivalencias* entre grupoides y prueban que si dos grupoides son equivalentes, sus C*-álgebras asociadas lo son, en el sentido de Morita. Pero esta noción es demasiado fuerte; aquí damos una definición de *correspondencia entre grupoides*, debilitando las condiciones de equivalencia de [MRW], y probamos que una tal correspondencia induce otra (en el sentido de A. Connes) entre las C*-álgebras reducidas asociadas. Demostramos que un homomorfismo entre grupoides satisfaciendo determinadas condiciones, puede pensarse como una correspondencia entre ellos, y da lugar a un elemento de Kasparov entre las C*-álgebras asociadas. Nuestro interés fundamental es el de aplicar estos resultados al estudio de foliaciones, donde aparecen en muchos casos los homomorfismos entre los grupoides de holonomía (ver [M]).

1. CORRESPONDENCIAS DE GRUPOIDES

Sean G_i $(i = 1, 2)$ grupoides Hausdorff, segundo numerables y localmente compactos. Sea $G_i^{(0)}$ el espacio de unidades y $s_i, r_i \colon G_i \longrightarrow G_i^{(0)}$ las aplicaciones origen y extremo (que no son necesariamente abiertas). Sea $G_{i,x} = s_i^{-1}(x)$, para $x \in G_i^{(0)}$.

Sea Z un espacio localmente compacto, segundo numerable y de Hausdorff, $\rho\colon Z \longrightarrow G_1^{(0)}$ una aplicación continua y sobreyectiva y $G_1 * Z = \{(\gamma_1, z) \in G_1 \times Z : s_1(\gamma_1) = \rho(z)\}$.

Definición 1.1.- Una *acción a la izquierda* de G_1 sobre Z es una aplicación continua de $G_1 * Z$ sobre Z (si $(\gamma_1, z) \in G_1 * Z$, se denota por $\gamma_1.z$), con las siguientes propiedades:

(1) $\rho(\gamma_1.z) = r_1(\gamma_1)$, si $(\gamma_1, z) \in G_1 * Z$,

(2) $\gamma_1'.(\gamma_1.z) = (\gamma_1'\gamma_1).z$, si ambos lados de la igualdad estan definidos,

(3) $\rho(z).z = z$, para cada $z \in Z$,

y se dice entonces que Z es un G_1-*espacio a la izquierda.* Z se llama *propio*, si la aplicación $\Phi_1\colon G_1 * Z \longrightarrow Z \times Z$ definida por $\Phi_1(\gamma_1, z) = (\gamma_1.z, z)$, es propia.

---

* Realizado en colaboración con el Prof. Moto O'uchi de la Osaka Women's University.

Análogamente, queda definida una G_2-acción a la derecha sobre Z, tomando la aplicación continua y sobreyectiva $\sigma\colon Z \longrightarrow G_2^{(0)}$ y $Z * G_2 = \{(z, \gamma_2) \in Z \times G_2 : r_2(\gamma_2) = \sigma(z)\}$.

Definición 1.2.- Con las notaciones anteriores, Z es una *correspondencia* de G_1 en G_2, si:

(1) existe una G_1-acción a la izquierda propia sobre Z y una G_2-acción a la derecha propia sobre Z, y ambas acciones conmutan,

(2) $\rho\colon Z \longrightarrow G_1^{(0)}$ es abierta e induce una biyección de Z/G_2 sobre $G_1^{(0)}$.

La diferencia con la definición de equivalencia de [MRW], es que aquí no se supone que las acciones sean libres, que σ sea abierta, ni que induzca una biyección de $G_1\backslash Z$ sobre $G_2^{(0)}$.

Si $V \subset Z$, $Sat_2(V) = \{z.\gamma_2 \in Z : z \in V \text{ y } (z, \gamma_2) \in Z * G_2\}$ es su saturación respecto a la G_2-acción y (2) de la Definición 1.2 se cumple, entonces $Sat_2(V) = \rho^{-1}\rho(V)$ y la aplicación cociente $Z \to Z/G_2$ es abierta. Además, si la G_2-acción es propia, entonces Z/G_2 es un espacio localmente compacto y Hausdorff.

Definición 1.3.- Si A y B son C*-álgebras, el par (E, ϕ) es una *correspondencia de A en B*, si satisface las siguientes propiedades:

(1) E es un B-módulo de Hilbert a la derecha,

(2) ϕ es un $*$-homomorfismo de A en $\mathcal{L}_B(E)$.

Si $\phi(A) \subset \mathcal{K}_B(E)$, entonces $(E, \phi, 0)$ es un módulo de Kasparov para C*-álgebras trivialmente graduadas (A, B) y da lugar a un elemento $[E] \in KK(A, B)$. Todo $*$-homomorfismo entre C*-álgebras induce una correspondencia entre ellas!

Para $i \in \{1, 2\}$, sea λ^i un sistema de Haar a la derecha de G_i. Sea $C_c(G_i)$ la $*$-álgebra de las funciones continuas con soporte compacto, donde el producto y la involución están dados por:

$$(ab)(\gamma_i) = \int_{G_i} a(\gamma_i {\gamma_i'}^{-1}) b(\gamma_i') d\lambda^i_{s_i(\gamma_i)}(\gamma_i') \qquad \text{y} \qquad a^*(\gamma_i) = \overline{a(\gamma_i^{-1})},$$

para $a, b \in C_c(G_i)$ y $\gamma_i \in G_i$. Para $x \in G_i^{(0)}$, se define una representación $\pi_{i,x}$ de $C_c(G_i)$ sobre $L^2(G_{i,x}, \lambda^i_x)$ por:

$$(\pi_{i,x}(a)\zeta)(\gamma_i) = \int_{G_i} a(\gamma_i {\gamma_i'}^{-1}) \zeta(\gamma_i') d\lambda^i_x(\gamma_i')$$

para $a \in C_c(G_i)$, $\zeta \in L^2(G_{i,x}, \lambda^i_x)$ y $\gamma_i \in G_{i,x}$. Se define la norma reducida por

$$\|a\| = \sup_{x \in G_i^{(0)}} \|\pi_{i,x}(a)\|,$$

y la C*-álgebra reducida, $C_r^*(G_i)$, del grupoide G_i es la compleción de $C_c(G_i)$ con respecto a esta norma reducida.

Teorema 1.4.- *En las condiciones anteriores, si Z es una correspondencia de G_1 en G_2, existe una correspondencia de $C_r^*(G_2)$ en $C_r^*(G_1)$.*

2. HOMOMORFISMOS DE GRUPOIDES

Sean los grupoides G_i como arriba y f un homomorfismo continuo de G_1 en G_2. Denotamos por $f^{(0)}$ la restricción de f a $G_1^{(0)}$, que es una aplicación sobre $G_2^{(0)}$. El núcleo de f, $H = \{\gamma_1 \in G_1 : f(\gamma_1) \in G_2^{(0)}\}$, es un subgrupoide cerrado de G_1 y $H^{(0)} = G_1^{(0)}$. Existe una acción natural a la derecha de H sobre G_1, que es propia al ser H cerrado. Se define la aplicación $(r,s)_H\colon H \longrightarrow H^{(0)} \times H^{(0)}$ por $(r,s)_H(\gamma) = (r_H(\gamma), s_H(\gamma))$, para $\gamma \in H$, donde r_H y s_H son las aplicaciones extremo y origen de H, respectivamente. Entonces,

Teorema 2.1.- *En las condiciones anteriores, si se verifican las propiedades:*

(C1) *la aplicación cociente $q_H\colon G_1 \longrightarrow G_1/H$ es abierta,*

(C2) *$r_1\colon G_1 \longrightarrow G_1^{(0)}$ es abierta,*

(C3) *$(r,s)_H\colon H \longrightarrow H^{(0)} \times H^{(0)}$ es propia,*

(C4) *para cada $x \in G_1^{(0)}$, $f(G_{1,x}) = G_{2,f(x)}$,*

(C5) *$f\colon G_1 \longrightarrow G_2$ es abierta,*

(C6) *$f^0\colon G_1^{(0)} \longrightarrow G_2^{(0)}$ es localmente uno a uno,*

entonces G_1/H es una correspondencia de G_1 en G_2.

La acción de G_2 sobre Z es libre (si $z.\gamma_2 = z$, entonces $\gamma_2 = \sigma(z)$). Así, $\rho\colon Z \longrightarrow G_1^{(0)}$ es un fibrado principal con grupo de estructura G_2.

Un homomorfismo entre grupoides no induce, en general, un homomorfismo entre las C*-álgebras asociadas, pero se verifica el siguiente resultado:

Teorema 2.2.- *En las condiciones anteriores, si el homomorfismo $f\colon G_1 \longrightarrow G_2$ verifica* (C1) *a* (C6), *y la propiedad adicional*

(C7) *$f^0\colon G_1^{(0)} \longrightarrow G_2^{(0)}$ es propia,*

entonces existe una correspondencia (E,ϕ) de $C_r^*(G_2)$ en $C_r^*(G_1)$, tal que el rango de ϕ está contenido en $\mathcal{K}_{C_r^*(G_1)}(E)$. Por lo tanto, $(E,\phi,0)$ es un módulo de Kasparov para $(C_r^*(G_2), C_r^*(G_1))$ y da lugar a un elemento de $KK(C_r^*(G_2), C_r^*(G_1))$.

3. EJEMPLOS

Con las notaciones anteriores, se tiene:

Espacios topológicos: Sea X_i un espacio topológico y tomemos el grupoide trivial $G_i = X_i$. Entonces, $f\colon X_1 \longrightarrow X_2$ es continua y sobreyectiva y $C^*_r(G_i)$ es la C*-álgebra $C_0(X_i)$ de las funciones continuas de X_i nulas en el infinito. Notemos que $f^{(0)} = f$, $H = X_1$ y $X_1/H = X_1$. Tenemos $E = C_0(X_1)$ y entonces, ϕ es el $*$-homomorfismo $\phi\colon C_0(X_2) \longrightarrow M(C_0(X_1))$ ($M(C_0(X_1))$ es el álgebra de los multiplicadores de $C_0(X_1)$), definido por $\phi(b) = b(f(x_1))$, para $b \in C_0(X_2)$ y $x_1 \in X_1$. Si se cumple (C7), entonces f es propia y $\phi(C_0(X_2)) \subset C_0(X_1)$.

Grupos topológicos: Sea Γ_i un grupo topológico y $G_i = \Gamma_i$. Entonces, $f\colon \Gamma_1 \longrightarrow \Gamma_2$ es un epimorfismo y $H = Ker(f)$. Por (C5), f es abierta. Por lo tanto, Γ_1/H y Γ_2 son grupos topológicos isomorfos, y entonces f puede pensarse como la aplicación cociente $f\colon \Gamma_1 \longrightarrow \Gamma_1/H$. Como $G_i^{(0)} = \{e_i\}$ (e_i es la unidad de Γ_i), $f^{(0)}$ es trivial y se cumple siempre (C7). Además, H es un grupo compacto por (C3). Se elige λ^i como una medida de Haar a la derecha sobre Γ_i.

Grupos de transformaciones: Sea Γ_i un grupo topológico y X_i un Γ_i-espacio a la derecha. Suponemos que $G_i = X_i \times \Gamma_i$. La estructura de grupoide sobre G_i se define por $r_i(x_i, g_i) = x_i$, $s_i(x_i, g_i) = x_i g_i$ y $(x_i, g_i)(x_i g_i, g_i') = (x_i, g_i g_i')$, donde se identifica $G_i^{(0)}$ con X_i. Por otro lado, suponemos que existe una aplicación $f^{(0)}$ de X_1 sobre X_2 y un homomorfismo φ de Γ_1 sobre Γ_2 tales que $f(x, g) = (f^{(0)}(x), \varphi(g))$ y $f^{(0)}(xg) = f^{(0)}(x)\varphi(g)$. Por (C5), $f^{(0)}$ y φ son abiertas. Si $\Xi = Ker(\varphi)$, identificamos Γ_1/Ξ con Γ_2. Entonces φ es la aplicación cociente, $H = X_1 \times \Xi$ y $Z = X_1 \times \Gamma_2$. La condición (C3) se satisface si y sólo si la Ξ-acción es propia. Se definen $\rho\colon Z \longrightarrow X_1$ y $\sigma\colon Z \longrightarrow X_2$ por $\rho(x_1, g_2) = x_1$ y $\sigma(x_1, g_2) = f^{(0)}(x_1)g_2$. La G_1-acción y la G_2-acción sobre Z se definen respectivamente por $(x_1 g_1^{-1}, g_1).(x_1, g_2) = (x_1 g_1^{-1}, g_1.g_2)$ y $(x_1, g_2).(f^{(0)}(x_1)g_2, g_3) = (x_1, g_2 g_3)$ para $(x_1, g_2) \in Z$, $(x_1 g_1^{-1}, g_1) \in G_1$ y $(f^{(0)}(x_1)g_2, g_3) \in G_2$.

BIBLIOGRAFIA

[C] A. Connes, *Géométrie non commutative*, InterEditions, 1990.

[M] M. Macho Stadler, *Isomorphisme de Thom pour les feuilletages presque sans holonomie* Thèse de Doctorat, Prépublications Laboratoire de Géométrie et Analyse 094-96, Institut Girard Desargues, Université Claude Bernard Lyon I, 1996.

[MO] M. Macho Stadler and M. O'uchi, *Correspondence of groupoid C*-algebras*, aceptado en el Journal of Operator Theory, 1998.

[MRW] P.S. Mulhy, J. Renault and D.P. Williams, *Equivalence and isomorphism for groupoid C*-algebras*, J. Operator Theory 17, 3-22, 1987.