Algunas ideas sobre Geometría no conmutativa

Marta Macho Stadler

Universidad del País Vasco-Euskal Herriko Unibertsitatea. Facultad de Ciencias. Departamento de Matemáticas. Apartado 644. 48080 Bilbao
e-mail: mtpmastm@lg.ehu.es

Abstract

... Einstein was always rather hostile to quantum mechanics. How can one understand this? I think it is very easy to understand, because Einstein had been proceeding of different lines, lines of pure geometry. He had been developing geometrical theories and had achieved enormous success. It is only natural that he should think that further problems of physics should be solved by further development of geometrical ideas. How to have $a \times b$ not equal to $b \times a$ is something that does not fit in very well with geometrical ideas; hence his hostility to it.
P.A.M. Dirac, The Mathematical Intelligencer **11**, 58, (1989).

El descubrimiento de W. Heisenberg de la Mecánica de las Matrices (o Mecánica Cuántica) se apoya en resultados experimentales de la espectroscopia. La sustitución resultante del espacio de las fases por un espacio "no conmutativo" (más precisamente, del álgebra de las funciones sobre el espacio de fases, por el álgebra de matrices), es un paso conceptual de los más importantes.

Existen además muchos ejemplos de espacios que surgen de manera natural (como el espacio de hojas de una variedad foliada), para los cuales las herramientas clásicas del Análisis no son adecuadas, pero que se corresponden de una manera muy natural con un álgebra no conmutativa.

En este artículo, se dan algunos ejemplos de funcionamiento del "mundo no conmutativo".

1 Introducción

La "Geometría no conmutativa" se apoya en los siguientes hechos esenciales:

1.- los espacios usados por los físicos son no conmutativos en muchos casos:

- en Mecánica Cuántica, donde el descubrimiento de W. Heisenberg de la "Mecánica de las Matrices" reemplaza el álgebra de funciones sobre el espacio de fases de la Mecánica Clásica, por un álgebra no conmutativa;

- en Física del Estado Sólido (con el trabajo de J. Bellissard), el espacio de las energías-impulsión de un tal sistema se vuelve no conmutativo, en el sentido de que el álgebra de las funciones sobre este espacio se reemplaza por un álgebra no conmutativa;
- con respecto a la Geometría del "espacio-tiempo", tal y como la revela la Física de las Partículas Elementales, bajo la forma del modelo de Weinberg-Salam. Esta geometría es más sutil que la que se presupone siempre (una variedad de dimensión 4) y la geometría no conmutativa permite, matizando la noción de forma diferencial y "desdoblando" el espacio-tiempo, dar un origen conceptual como bosones de capacidad pura a los bosones de Higgs del modelo standard;

2.- existen muchos ejemplos de espacios que surgen de manera natural (el espacio de universos de Penrose, el espacio de representaciones irreductibles de un grupo discreto, los espacios no simplemente conexos de grupo fundamental no abeliano, el espacio de hojas de una foliación, los grupos cuánticos, ...), para los cuales las herramientas clásicas del Análisis no son adecuadas, pero que corresponden de una manera muy natural a un álgebra no conmutativa;

3.- es posible reformular las herramientas clásicas del Análisis (como la teoría de la medida, la topología, el cálculo diferencial, el cálculo diferencial métrico, ...), en términos algebraicos e hilbertianos, de modo que su marco natural se transforme en no conmutativo, el caso conmutativo no estando ni aislado ni cerrado en la teoría general.

El "esquema" de funcionamiento de la Geometría no conmutativa se puede resumir del siguiente modo:

(i) dado un objeto geométrico "singular" $\mathcal{G}$, se empieza eligiendo una "desingularización" adecuada $\widetilde{\mathcal{G}}$ de $\mathcal{G}$,

(ii) es de esperar que $\widetilde{\mathcal{G}}$ tenga suficiente estructura como, a partir de él, encontrar una C*-álgebra $C^*(\mathcal{G})$, cuya complejidad refleje la naturaleza de $\mathcal{G}$,

(iii) utilizando métodos de Geometría no conmutativa, se trata de investigar el anillo no conmutativo $C^*(\mathcal{G})$.

En este trabajo no se pretende dar un repaso exhaustivo de técnicas o ejemplos de Geometría no conmutativa. Está realizado desde el punto de vista de una persona que trabaja en Teoría de Foliaciones, y de aquí las referencias y el enfoque empleados.

2 Motivación física

En Mecánica Clásica es necesario, para determinar la trayectoria ulterior de una partícula, conocer a la vez su posición y su velocidad iniciales. Los datos iniciales forman pues un conjunto de 6 parámetros, que son las 3 coordenadas de la posición y las 3 del momento. Si se trabaja con n partículas, aparece un conjunto de $6n$ parámetros, que es el *espacio de fases* M del sistema mecánico considerado. A partir de una función sobre este espacio, el *hamiltoniano* (que mide la energía), se establece un sistema de ecuaciones diferenciales, que determinan la trayectoria a partir de las condiciones iniciales. La estructura natural de M es la de una *variedad simpléctica*, cuyos puntos son los *estados* del sistema. Las funciones sobre M son las *cantidades observables* del sistema. El hamiltoniano H es una función sobre M, que interviene para especificar la evolución de toda cantidad física observable, por la ecuación

$$\frac{d}{dt}f = \{H, f\},$$

donde $\{\}$ es el corchete de Poisson. En los buenos casos (por ejemplo, el modelo planetario del átomo de hidrógeno), el sistema dinámico obtenido es totalmente integrable, es decir, hay suficientes "constantes de movimiento" para que al especificarlas, se reduzca el sistema a un movimiento casi-periódico. La descripción de un tal sistema es muy simple:

1.- el álgebra de las cantidades observables es el álgebra conmutativa de las series casi-periódicas,

$$q(t) = \sum q_{n_1 \dots n_k} e^{2\pi i \langle n,v \rangle t},$$

donde $n_i \in \mathrm{Z}$, las constantes $v_i \in \mathrm{R}^+$ son las *frecuencias fundamentales* y $\langle n, v\rangle = \sum n_i v_i$;

2.- la evolución en el tiempo está dada por la translación de la variable t.

Así, los principales objetos de la Mecánica Clásica en el *formalismo hamiltoniano*, son:

(i) el *espacio de fases*, una variedad simpléctica de clase C^∞, M;

(ii) los *observables*, funciones reales sobre M, que pueden considerarse como elementos de un álgebra (por ejemplo, la energía es un observable),

(iii) los *estados*, que son funcionales lineales sobre los observables;

(iv) la *dinámica* de un observable está definida por un hamiltoniano H y una ecuación diferencial $\frac{d}{dt}f = \{H, f\}$;

(v) las *simetrías* del sistema físico actúan sobre observables o estados, vía transformaciones canónicas de M.

Los observables, la dinámica y la simetría son objetos primarios, mientras que el espacio de fases y los estados pueden recuperarse a partir éstos primeros.

En el modelo clásico, el conjunto de las frecuencias de las radiaciones emitidas es un subgrupo aditivo Γ de R. A cada frecuencia emitida le corresponden todos los múltiplos enteros o armónicos. El álgebra de las cantidades físicas observables se lee directamente a partir de Γ: es el álgebra de convolución de este grupo de frecuencias. Como Γ es un grupo conmutativo, el álgebra también es conmutativa.

Pero, de hecho, la espectroscopia y sus numerosos resultados experimentales muestran que este último resultado teórico está en contradicción con la experiencia. El conjunto de las frecuencias emitidas por un átomo no forma un grupo, es falso que la suma de dos frecuencias del espectro sea aún una de ellas. La experiencia dice que, en realidad, se está trabajando con un grupoide $\Delta = \{(i,j) : i,j \in I\}$, con la regla de composición $(i,j).(j,k) = (i,k)$ (el llamado *grupoide grosero*). El *principio de combinación de Ritz-Rydberg* permite indicar las líneas espectrales por Δ. Dos frecuencias v_{ij} y v_{kl} se componen si y sólo si $j = k$, y entonces $v_{il} = v_{ij} + v_{jl}$. El álgebra de convolución tiene aún sentido cuando se pasa de un grupo a un grupoide: es el álgebra de matrices. Al reemplazar el grupo Γ por el grupoide Δ dictado por la experiencia, W. Heisenberg reemplaza la Mecánica Clásica (teoría en la cual las cantidades observables conmutan dos a dos), por la Mecánica de las Matrices, en la cual las cantidades observables (tan importantes como la posición y el momento) ya no conmutan. Pero W. Heisenberg no entendió enseguida que el álgebra con la que estaba trabajando era ya conocida por los matemáticos (el álgebra de matrices), las reglas de cálculo algebraico de Heisenberg le fueron impuestas por los resultados experimentales de la espectroscopia, y más adelante Jordan y Born identificaron éste álgebra. Así, en la Mecánica de Matrices, una cantidad física observable está dada por sus coeficientes $\{q(i,j) : (i,j) \in \Delta\}$.

La evolución en el tiempo de un observable está dada por el homomorfismo $v : \Delta \to \mathrm{R}$, que lleva cada línea espectral (i,j) en su frecuencia v_{ij}. Y se obtiene la fórmula (similar a la clásica),

$$q_{(i,j)}(t) = q(i,j)e^{2\pi i v_{ij} t}.$$

Para obtener el análogo de la ley de evolución de Hamilton, se define una cantidad física particular, H, que juega el papel de la energía clásica y está dada por sus coeficientes $H_{(i,j)}$, donde

$$H_{(i,j)} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 2\pi h v_i & \text{si } i = j \end{cases}$$

donde $v_{ij} = v_i - v_j$ y h es la constante de Planck. Se ve que H está unívocamente determinada, salvo adición de un múltiplo de la matriz identidad. Esta fórmula es equivalente a

$$\frac{d}{dt} f = \frac{i}{h}[H, f],$$

donde $[H, f] = Hf - fH$, que es parecida a la de Hamilton, que utiliza los corchetes de Poisson. Por analogía con la Mecánica Clásica (donde $h = 0$), se impone a los observables q de posición y p de momento, verificar la ecuación $[p, q] = ih$. La forma algebraica de la energía clásica como función de p y q, da entonces la *ecuación de Schrödinger*. El *principio de incertidumbre de Heisenberg*, que estipula que la posición y la cantidad de movimiento de una partícula no pueden conocerse simultáneamente con grados de precisión independientes, es precisamente una consecuencia de la no conmutatividad.

Así, los principales objetos de la Mecánica Cuántica son:

(i) el *espacio de fases*, un espacio proyectivo $P(\mathcal{H})$, donde $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert;

(ii) los *observables*, operadores auto-adjuntos sobre $\mathcal{H}$;

(iii) los *estados* del sistema físico, que están definidos por un vector unitario $\xi \in \mathcal{H}$;

(iv) la *dinámica* de un observable f está definida por un operador autoadjunto H, vía la *ecuación de Heisenberg* $\frac{d}{dt} f = \frac{i}{h}[H, f]$;

(v) las *simetrías* del sistema físico actúan sobre observables o estados vía operadores unitarios sobre $\mathcal{H}$.

Se puede empezar desde el álgebra de observables, y realizar los estados y el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ a través de la *construcción de Gelfand-Naimark-Segal.*

Observar la similitud existente entre las descripciones clásica y cuántica, con correspondencia entre el corchete de Poisson y el conmutador. Precisamente, este paralelismo hace muy tentadora la construcción de una aplicación $\mathcal{Q}$, la *cuantización de Dirac*, tal que:

1.- $\mathcal{Q}$ transforma una función f en un operador $\mathcal{Q}(f)$, es decir, lleva observables clásicos en observables cuánticos;

2.- $\mathcal{Q}$ tiene la propiedad algebraica $\{\mathcal{Q}(f_1), \mathcal{Q}(f_2)\} = [\hat{f}_1, \hat{f}_2]$, es decir, lleva los corchetes de Poisson en conmutadores,

3.- $\mathcal{Q}(1) = I$, es decir, la imagen de la función idénticamente igual a uno es el operador identidad I.

Desafortunadamente, $\mathcal{Q}$ no existe, incluso para casos muy simples.

3 Fundamentos matemáticos

Si M es un espacio localmente compacto, el álgebra

$$C_0(M) = \{f : M \to \mathrm{C}, \forall \epsilon > 0, \exists K_\epsilon \text{ compacto} \subset X \text{ y } |f(x)| < \epsilon, \text{ si } x \notin K_\epsilon\},$$

provista de la involución $f^*(x) = \overline{f(x)}$, para $x \in M$, es una C*-álgebra conmutativa (una C*-álgebra A es un álgebra de Banach compleja, provista de una involución, $* : A \to A$, verificando, respecto a la norma de espacio de Banach, la relación $\|a^*a\| = \|a\|^2$. Toda C*-álgebra puede pensarse como una subálgebra autoadjunta y cerrada para la norma de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, donde $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert).

El teorema central de esta teoría es:
Teorema de Gelfand: *Toda C*-álgebra conmutativa es de la forma $C_0(M)$, para algún espacio localmente compacto y separado M,*

es decir, la categoría de las C*-álgebras conmutativas y $*$-homomorfismos, es dual de la categoría de espacios localmente compactos y aplicaciones continuas propias.

La herramienta más potente de la Topología es la *K-teoría*, definida por M. Atiyah, que utiliza fibrados vectoriales, que pueden verse como módulos proyectivos de tipo finito, lo cual permite generalizar la noción de K-teoría a álgebras de funciones. Los grupos de K-teoría aparecen naturalmente como generadores de invariantes sobre espacios topológicos. El más clásico entre ellos es el *caracter de Chern*: si M es una variedad diferenciable, se dispone de las aplicaciones

$$ch_0 : K^0(M) \to H^{par}(M) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} H^{2n}(X) \text{ y}$$

$$ch_1 : K^1(M) \to H^{impar}(M) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} H^{2n+1}(X),$$

donde $H^n(M)$ es la cohomología de DeRham de M.

Los componentes de la escuela rusa (fundamentalmente, G. Kasparov y A.S. Mishchenko), prueban que la K-teoría de C*-álgebras juega también un papel crucial en la solución de problemas clásicos en la teoría de variedades no simplemente conexas. Para tales espacios, un invariante homotópico básico es la $\pi_1(M)$-signatura equivariante de su revestimiento universal, σ. Este invariante σ, vive en el K-grupo $K_0(C^*(\pi_1(M))$.

Se dispone en la actualidad de un análogo no conmutativo de las *distribuciones de DeRham* y de la *homología*, gracias a la *cohomología cíclica*, introducida por A. Connes, que aparece como un receptáculo natural para definir el caracter de Chern de las clases de K-homología y del cálculo diferencial cuánticos. Esta teoría permite formular en términos homológicos el teorema del índice para familias de operadores elípticos $(D_x)_{x\in X}$, donde cada D_x es un operador elíptico ordinario sobre una variedad, y donde el conjunto X de los parámetros es un "espacio cuántico". La cohomología cíclica retiene una de las características esenciales, a saber, el aspecto de *linearización infinitesimal* de la Geometría Diferencial. Pero, esta característica no se manifiesta ya a nivel del "espacio", sino al nivel de los "campos" correspondientes, es decir, al nivel del álgebra de funciones A sobre el espacio que se estudia. Por ejemplo, hay resultados conocidos (debidos a J.L. Loday, D. Quillen y B.L. Tsigan), que prueban que la cohomología cíclica es la "parte indescomponible" de la cohomología del álgebra de Lie del grupo $GL(A)$. El paso de A a su álgebra de Lie, es precisamente la "linearización infinitesimal" de esta estructura algebraica. Los *grupos cuánticos* juegan el papel de los grupos de Lie de la Geometría Diferencial Clásica, y se utilizan sobre todo en la Física de Partículas Elementales.

Queda el problema de la "auténtica" geometría, es decir, la geometría riemanniana. Se aborda a través del operador de Dirac. Este operador juega en relatividad general, el papel que las representaciones del grupo de Poincaré juegan en la relatividad restringida. Además, la K-homología, teoría dual de la K-teoría, clarifica (salvo homología) la construcción del operador de Dirac como generador. Queda por especificar de manera más precisa este generador, minimizando un funcional de acción. Esto es posible gracias a una traza introducida por J. Dixmier en 1966, y que permite comprender mucho mejor el papel de las divergencias logarítmicas de la teoría perturbativa de los campos.

En resumen, todas las propiedades de un espacio localmente compacto M pueden leerse a través de propiedades de su álgebra de funciones. He aquí un diccionario (no exhaustivo):

Conmutativo	**No conmutativo**
$M \equiv C_0(M)$	A no commutativo
aplicación propia	morfismo
homeomorfismo	automorfismo
abierto en M	ideal en A
punto en M	ideal maximal en A
abierto denso en M	ideal esencial en A
cerrado en M	cociente en A
medida μ y $L^\infty(M,\mu)$	estado sobre A y álgebra de Von Neumann
compacto en M	unitario de A
compactificación	adjunción de unidad
C_{II}	separabilidad
conexión	no existencia de idempotente no trivial
fibrado vectorial sobre M	módulo proyectivo de tipo finito sobre A
forma diferencial de grado k	ciclo de Hochschild de dimensión k
corriente de DeRham de dimensión k	cociclo de Hochschild de dimensión k
homología de DeRham	cohomología cíclica de A

Las diferentes líneas de desarrollo de la *Geometría no Conmutativa* en los últimos años, se pueden resumir en:

(i) estudio de K y KK-teoría, teoremas del índice para operadores diferenciales con coeficientes no conmutativos, teoremas del índice para operadores diferenciales sobre variedades foliadas (conjetura de Baum-Connes), conjeturas de Novikov,...

(ii) introducción de la cohomología cíclica, complejos de DeRham no conmutativos, clases características no conmutativas, ...

(iii) noción de grupo cuántico, ...

4 Un ejemplo sencillo

Para $\theta \in \mathrm{R}$, las curvas integrales del campo de vectores

$$X = \frac{\partial}{\partial x_1} + \theta \frac{\partial}{\partial x_2},$$

definen una foliación $\mathcal{F}_\theta$ sobre el toro T^2. Si $\theta \in \mathrm{Q}$, cada hoja es una circunferencia. En otro caso, cada hoja es densa, de hecho, una copia de R, "puesta de manera densa" en el toro, y la foliación inducida es la llamada *foliación de Kronecker* $\mathcal{F}_\theta$.

El espacio de hojas de esta foliación, $\mathrm{T}^2/\mathcal{F}_\theta$, es un espacio indiscreto, sin ningún interés. Pero existe la C*-álgebra asociada a la foliación, $C^*(\mathrm{T}^2/\mathcal{F}_\theta)$, que es no trivial y que describe las propiedades topológicas de este espacio de hojas: sea $\mathcal{A}_\theta$ la C*-álgebra universal engendrada por dos generadores unitarios u y v, con la relación de conmutación (que es la forma unitaria de la relación de conmutación de Heisenberg $[p, q] = ih$ de la Mecánica Cuántica):

$$uv = e^{-2i\pi\theta} vu.$$

Es el *álgebra de rotación irracional*, *toro no conmutativo* o *toro cuántico*, que generaliza al álgebra de funciones sobre el toro de dimensión dos. Para definirla, observamos que toda función $f \in C^\infty(\mathrm{T}^2, \mathrm{C})$ puede escribirse por transformada de Fourier de la forma

$$f(t, s) = \sum_{k,l \in \mathrm{Z}} c_{kl} u^k v^l,$$

con $u = \exp^{2\pi it}$ y $v = \exp^{2\pi is}$, donde los coeficientes c_{kl} son de decrecimiento rápido, y de tal forma que las semi-normas

$$\|f\|_m = \sup_{k,l \in \mathrm{Z}} |c_{kl}|(1 + |k| + |l|)^m$$

sean todas finitas para cada $m \in \mathrm{N}$. El álgebra no conmutativa que generaliza este álgebra, se construye suprimiendo la conmutatividad entre u y v de la manera anteriormente indicada.

Este álgebra se escribe también como un producto cruzado $C(\mathrm{S}^1) \times_\alpha \mathrm{Z}$, donde Z actúa sobre $C(\mathrm{S}^1) \simeq C^*(v)$ por la rotación de ángulo θ en S^1, es decir, $\alpha^n(f)(z) = f(e^{-2i\pi n\theta}z)$, para $z \in \mathrm{S}^1$. Esta es justamente $C^*(\mathrm{T}^2/\mathcal{F}_\theta)$. Un elemento genérico de $\mathcal{A}_\theta$ es

$$\sum_{n,m finito} a_{mn}u^m v^n,$$

y la familia de estos elementos forman una subálgebra densa en $\mathcal{A}_\theta$.

Este álgebra es mucho más complicada que $C(\mathrm{T}^2)$ (cuyos elementos son funciones continuas):

1.- $C(\mathrm{T}^2)$ tiene muchos ideales, $\mathcal{A}_\theta$ es simple;

2.- $C(\mathrm{T}^2)$ es conmutativa y $\mathcal{A}_\theta$ no. De hecho, su centro está formado justamente por los escalares,

3.- $\mathcal{A}_\theta$ tiene una única aplicación traza y $C(\mathrm{T}^2)$ (a diferencia de las álgebras de matrices $\mathrm{M}_n(\mathrm{C})$) posee muchas trazas normalizadas:

$$\tau(f) = \int_0^1 \int_0^1 f(e^{2\pi is}, e^{2\pi it})g(e^{2\pi is}, e^{2\pi it})dsdt,$$

con g función de probabilidad sobre T^2, es decir, es una función positiva sobre T^2 tal que $\displaystyle\int_0^1 \int_0^1 g(e^{2\pi is}, e^{2\pi it})dsdt = 1$;

4.- $\mathcal{A}_\theta$ tiene muchos proyectores y $C(\mathrm{T}^2)$ sólo dos (0 y 1).

Así, tenemos la familia de álgebras de operadores $\{\mathcal{A}_\theta : \theta \in \mathrm{I}\}$, ¿cómo clasificarlas?, ¿son todas distintas?, ¿cuáles son isomorfas?. Para resolver este problema hay que recurrir a la estructura proyectiva, es decir, a $K_0(\mathcal{A}_\theta)$, y calcular las trazas de estos proyectores, que son un "código" para $\mathcal{A}_\theta$. En 1980, M. Pimsner y D. Voiculescu prueban que $K_0(\mathcal{A}_\theta)$ es isomorfo a $\mathrm{Z} \oplus \mathrm{Z}$. En ese mismo año, M. Rieffel demuestra que existe un proyector $e_\theta \in \mathcal{A}_\theta$, tal que $\tau(e_\theta) = \theta$, y lo construye imponiendo la condición $e_\theta = v^*g(u) + f(u) + g(u)v$, donde f y g son funciones apropiadas para que $e_\theta^2 = e_\theta = e_\theta^*$; y entonces

$\tau(e_\theta) = \int_0^1 f(t)dt = \theta$. De este modo, se deduce la *propiedad de Pimsner-Rieffel-Voiculescu*:

$$\tau(Proy(\mathcal{A}_\theta)) = (\mathrm{Z} \oplus \mathrm{Z}\theta) \cap [0, 1],$$

donde τ es la única aplicación traza normalizada. Así, ésto proporciona el invariante más algebraico, a saber, $\tau_*(K_0(\mathcal{A}_\theta)) = \mathrm{Z} \oplus \mathrm{Z}\theta$.

De todo lo anterior, se deduce que las álgebras $\mathcal{A}_\theta$ no son todas iguales: si $\mathcal{A}_\theta \simeq \mathcal{A}_{\theta'}$ (para $0 < \theta, \theta' < 1$), entonces $\mathrm{Z} \oplus \mathrm{Z}\theta = \mathrm{Z} \oplus \mathrm{Z}\theta'$ con lo que $\theta = \theta'$ ó $\theta' = 1 - \theta$. Observar que si se relaciona θ con la constante de Plank por $h = 2\pi\theta$, este álgebra es muy distinta si se hacen pequeñas variaciones o aproximaciones de h!

La cohomología cíclica permite en particular definir el ciclo fundamental de $\mathrm{T}^2/\mathcal{F}_\theta$.

El toro no conmutativo ha permitido a J. Bellisard modelizar el efecto de Hall cuántico. Y aparece también en otros contextos, como en estructuras periódicas en campos magnéticos, modelos matriciales de teoría de cuerdas, juega un papel universal en la teoría de representación de grupos de Lie y proporciona un armazón conveniente para el estudio de los operadores de Schrödinger con potenciales casi-periódicos.

5 Otro ejemplo "no conmutativo": la conjetura de Baum-Connes

Este ejemplo proviene de la teoría de foliaciones, y en él se observa claramente el "esquema" de funcionamiento de la Geometría no conmutativa descrito anteriormente.

Como se ha mencionado previamente, para cada espacio localmente compacto M, la C*-álgebra $C_0(M)$ de las funciones continuas nulas en el infinito, permite "reconstruir" M, y existe un isomorfismo entre la *K-teoría topológica* de M y la *K-teoría analítica* de $C_0(M)$.

La *conjetura de Baum-Connes*, independientemente de su significado en el marco de la teoría del índice, busca establecer un análogo de este isomorfismo para ciertos espacios "singulares": los espacios de hojas de foliaciones. De manera más precisa, si $\mathcal{F}$ es una foliación de clase C^∞ sobre una variedad M, como $M/\mathcal{F}$ es un mal cociente en muchos casos, para obtener información sobre la estructura transversa de la foliación, es preciso usar otro tipo de objetos:

(i) la dinámica de $\mathcal{F}$ viene descrita por su grupoide de holonomía G, que es un grupoide de Lie, que se puede considerar como una desingularización del espacio de las hojas $M/\mathcal{F}$. A G, como a todo grupoide de Lie, se le asocia una C*-álgebra de funciones $C^*_{red}(G)$, que se interpreta como el "espacio de las funciones continuas nulas en el infinito" sobre $M/\mathcal{F}$. Y la K-teoría analítica del espacio de hojas, $K_{an}(M/\mathcal{F})$, se define como la de esta C*-álgebra, $K_*(C^*_{red}(G))$;

(ii) por otro lado, procediendo por analogía con el caso de grupos, se puede construir para G un *espacio clasificante* BG, sobre el cual G actúa libre y propiamente, pero que no es en general una variedad (y ni siquiera posee el tipo de homotopía de una variedad!). BG debe pensarse como el espacio de las hojas, módulo homotopía. En [1], se introduce una K-teoría G-equivariante generalizada asociada a este objeto, $K_{*,\tau}(BG)$, que se define como la K-teoría topológica, $K_{top}(M/\mathcal{F})$, del espacio de hojas.

Intuitivamente, G, $C^*(M,\mathcal{F})$ y BG son objetos completamente determinados por $\mathcal{F}$ y portadores de la misma "información". Los operadores elípticos proporcionan una aplicación entre los dos grupos de K-teoría arriba descritos,

$$\mu : K_{top}(M/\mathcal{F}) \to K_{an}(M/\mathcal{F}).$$

La conjetura de Baum-Connes afirma que μ es un isomorfismo de grupos, cuando los grupos de holonomía son libres de torsión.

La prueba de la conjetura proporcionaría una relación entre la información dada por la estructura transversa de la foliación (a través de G) y la geometría dada por BG, en otras palabras, daría una interpretación geométrica del objeto analítico $K_*(C^*_{red}(G))$.

De momento, se ha resuelto únicamente en algunos ejemplos de foliaciones. Se recomiendan las referencias [2], [3], [7], [8], [9], [11] y [12].

Agradecimientos

Trabajo parcialmente subvencionado por **UPV127.310-EA146/98**.

References

[1] P. BAUM AND A. CONNES, preprint, (1982).

[2] A. CONNES, Advances in Mathematics **39**, 31-55, (1981).

[3] A. CONNES, Proc. Symp. in Pure Maths. **38**, 521-628, (1982).

[4] A. CONNES, *Non Commutative Geometry*, Academic Press (1994).

[5] R. COQUEREAUX, Journal of Geometry and Physics, **6(3)**, 425-490, (1989).

[6] M. DĂDĂRLAT, Contemp. Maths. **145**, 393-421, (1993).

[7] G. HECTOR ET M. MACHO STADLER, C. R. Acad. Sci. Paris **325(9)**, 1015-1018, (1998).

[8] M. MACHO STADLER, Publicacions Matemàtiques **33**, 445-457, (1989).

[9] M. MACHO STADLER AND M. O'UCHI, Journal of Operator Theory **42(4)**, 103-119, (1999).

[10] J. MADORE, *An introduction to noncommutative differential geometry and its physical applications*, London Math. Soc. Lecture Note Series 206, Cambridge Univ. Press (1995).

[11] T. NATSUME, Adv. Stud. Pure Math. **5**, 15-27, (1985).

[12] A.M. TORPE, J. of Funct. Analysis **61**, 15-71, (1985).