¡Qué cosas más raras pasan!

Marta Macho Stadler, UPV/EHU

Romana Fürnkranz

XIII semana de la ciencia mi+d

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE MADRID

POLITÉCNICA

DIVERMATES

Martin Gardner Celebration of Mind

G4G


N-120
ORENSE
MONFORTE
N-120
ORENSE
MONFORTE


MARTILLO ROMPECRISTALES
ROMPER EL CRISTAL PARA ACCEDER AL MARTILLO


PROHIBIDO JUGAR
A LA PELOTA

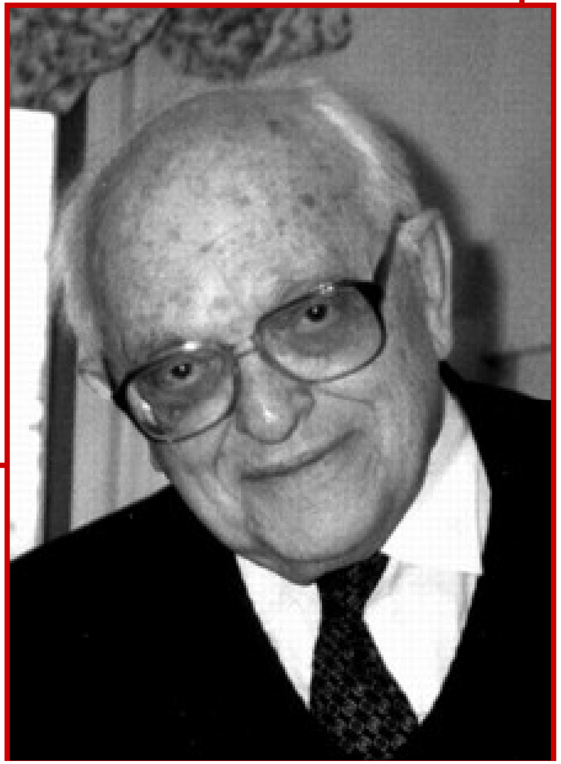

PLAZA
DE LAS
LIBERTADES


50
AVEINTE


LA SIEMPRE ABIERTA
Tnos. 941 274 124 - 692 395 673
Coca-Cola
Típico Sabor Latino


LA SIEMPRE ABIERTA
Tnos. 941 274 124 - 692 395 673
Típico Sabor Latino
oferta
Boomerang
CAMISETA M/C
ALGODÓN
COLORES LISOS
una- 6€
dos- 15€

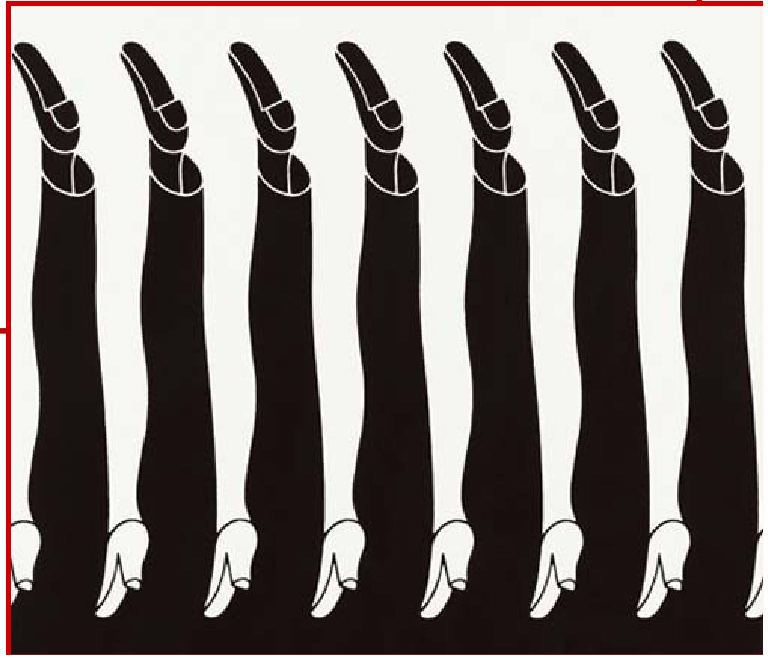
Las paradojas han tenido un papel crucial en la historia intelectual, a menudo presentando los desarrollos revolucionarios de las ciencias, de las matemáticas y de la lógica. Cada vez que, en cualquier disciplina, aparece un problema que no puede resolverse en el interior del cuadro conceptual susceptible de aplicarse, experimentamos un choque, choque que puede constreñirnos a rechazar la antigua estructura inadecuada y a adoptar una nueva.
Es a este proceso de mutación intelectual al que se le debe el nacimiento de la mayor parte de las ideas matemáticas y científicas.



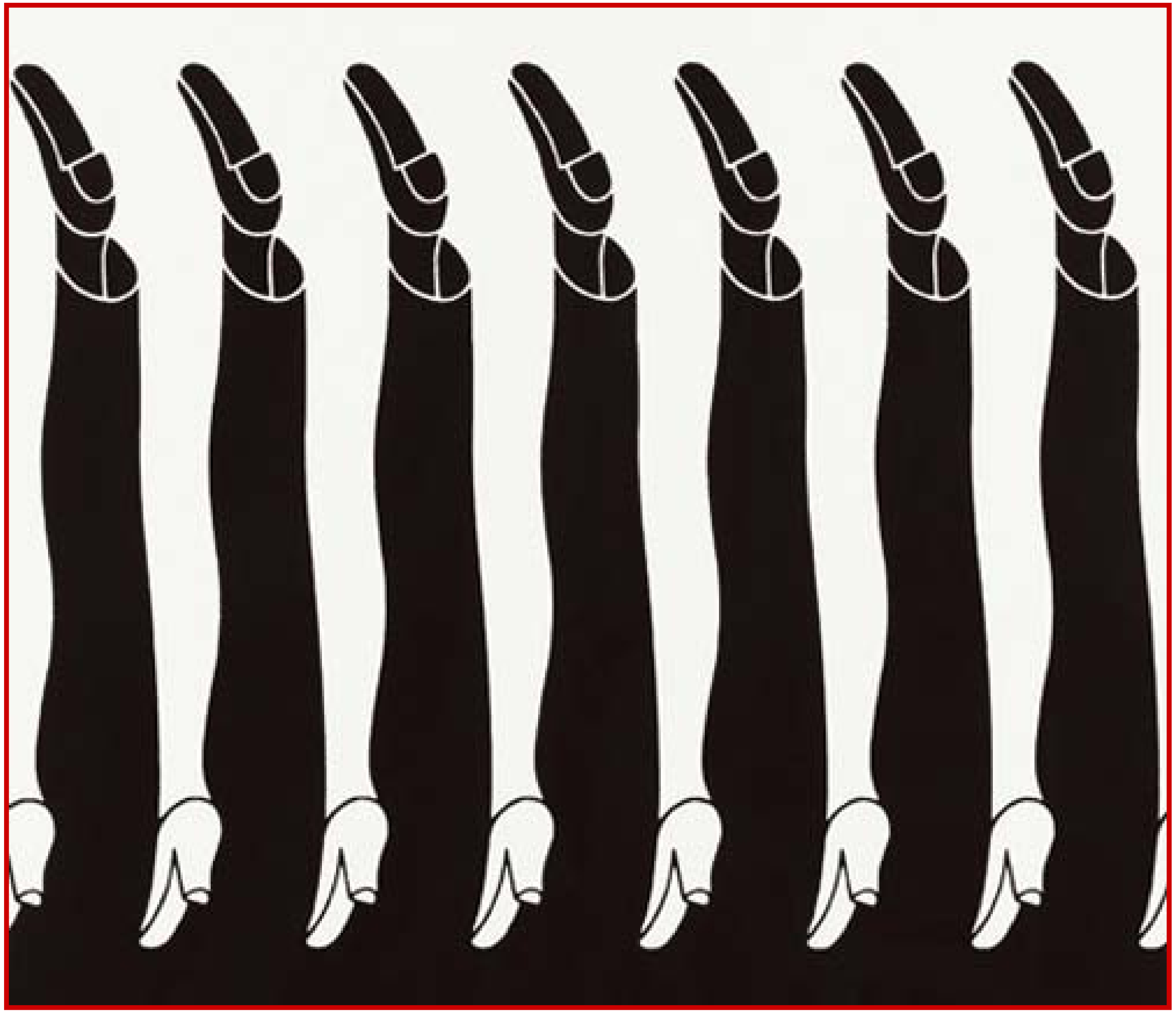
Escapar a la paradoja, 1967
Anatol Rapoport (1911-2007)

Guión de la charla

1. Algunas paradojas de la estadística
2. La paradoja de Bertrand
3. La paradoja de Kraichik
4. Una rara enfermedad
5. Un juego infinito
6. ¿Paradoja zodiacal?



1. Paradojas de la estadística



La estadística muestra que los coches que circulan a velocidad moderada provocan más accidentes que los que pasan de los 150km/h.

¿Debe concluirse que es menos peligroso conducir a gran velocidad?

La estadística muestra que los coches que circulan a velocidad moderada provocan más accidentes que los que pasan de los 150km/h.

¿Debe concluirse que es menos peligroso conducir a gran velocidad?

No... Una correspondencia estadística no implica una relación causa/efecto. Como la mayor parte de las y los conductores circulan a velocidad moderada, es normal que la mayor parte de los accidentes sucedan a tales velocidades...

Los resultados de una investigación muestran que las y los niños con pies grandes deletrean mejor que los que tienen pies pequeños.

¿Significa esto que la capacidad de deletrear tiene que ver con el tamaño de los zapatos?

Los resultados de una investigación muestran que las y los niños con pies grandes deletrean mejor que los que tienen pies pequeños.

¿Significa esto que la capacidad de deletrear tiene que ver con el tamaño de los zapatos?

No... Este estudio tenía que ver con el crecimiento de los niños, y probaba que los niños mayores (y por lo tanto con pies más grandes) deletreaban mejor que los pequeños (**lógico**).

En la ciudad de Estrasburgo se dieron cuenta que los nidos de cigüeñas aumentaban al mismo ritmo que sus habitantes...

¿Va a ser verdad a que las y los niños los trae la cigüeña?

En la ciudad de Estrasburgo se dieron cuenta que los nidos de cigüeñas aumentaban al mismo ritmo que sus habitantes...

¿Va a ser verdad que a las y los niños los trae la cigüeña?

No... Al aumentar el número de edificios, las cigüeñas tenían más lugares en los que anidar... **Oh,... ¡qué pena!**





En los tres ejemplos: carácter engañoso de una relación causa-efecto a partir de una simple correlación estadística, a menudo incompleta...

2. La paradoja de Bertrand

Formulada por primera vez por el matemático Joseph Louis François Bertrand en su *Calcul des probabilités* (1888), la ***paradoja de Bertrand*** es una paradoja de la teoría de la probabilidad... con un poquito de trigonometría.

Consideremos una circunferencia ***C*** y una cuerda ***AB*** trazada al azar sobre ella.

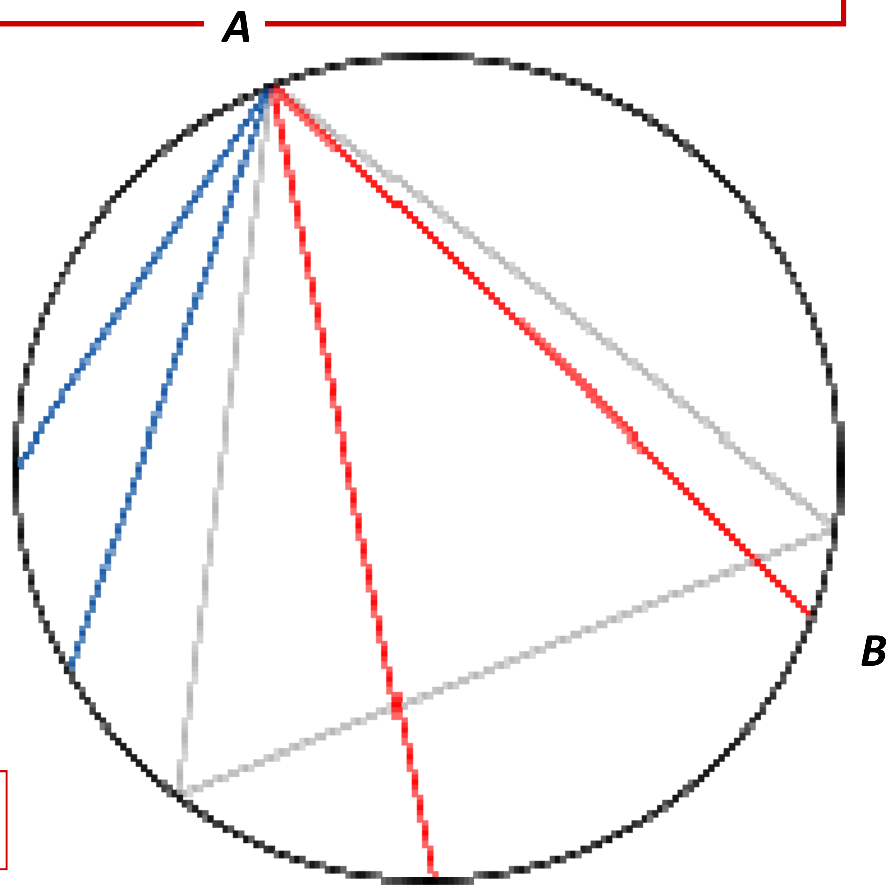
*¿Cuál es la probabilidad **p** de que esta cuerda sea más larga que el lado del triángulo equilátero inscrito en la circunferencia?*

Abordando el problema de diferentes maneras, Bertrand obtuvo tres resultados distintos. ¿Cómo es posible?

La pregunta clave es:

¿Qué significa ***trazar una cuerda al azar***?

Respuesta 1: Elegimos ***A*** y ***B*** al azar sobre ***C***.
Elegimos ***A*** al azar sobre ***C*** y lo hacemos coincidir con uno de los vértices del triángulo inscrito. Para que la cuerda ***AB*** sea más larga que el lado del triángulo, ***B*** deberá elegirse sobre el arco de circunferencia determinado por el lado del triángulo opuesto al vértice ***A.***



Como el triángulo determina tres arcos isométricos, la respuesta es:

***p*=1/3**.

Se muestran cuatro posibles cuerdas: las azules son más cortas y las rojas más largas que el lado del triángulo.

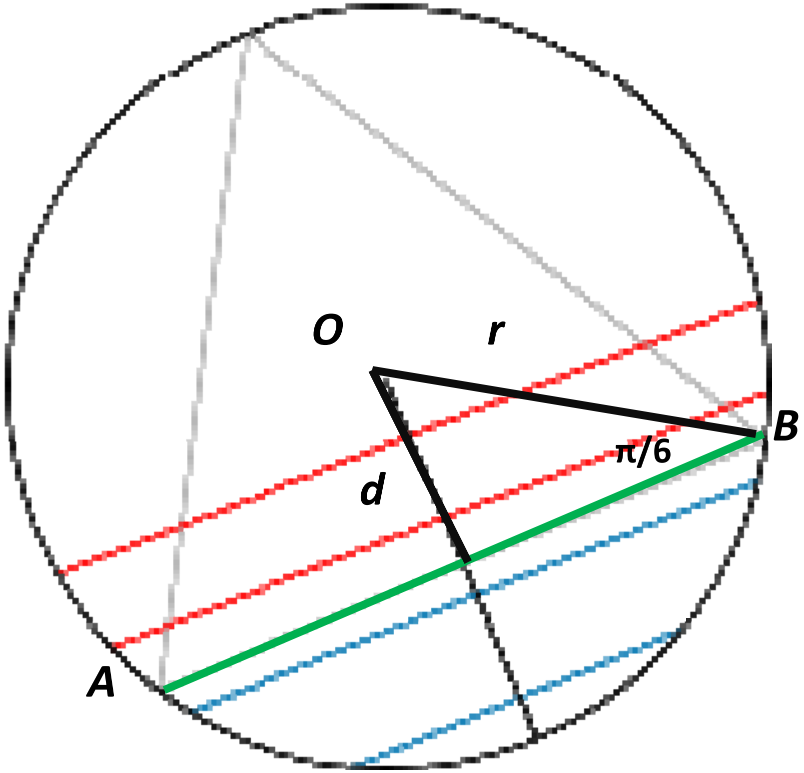
Respuesta 2: Elegimos ***AB*** teniendo en cuenta su distancia ***d*** al centro ***O*** de ***C***.

Si el radio de ***C*** es ***r***, en el caso extremo marcado en color verde, tenemos: $d = r$ **sen** $(\pi/6) = r/2$,

y por lo tanto, para que la cuerda ***AB*** sea más larga que el lado del triángulo, la distancia ***d*** al centro ***O*** de ***C*** no deberá exceder ***r* / 2**.

Pero, la distancia maximal de una cuerda al centro de la circunferencia es ***r***, por lo que la respuesta es

$$p=1/2.$$

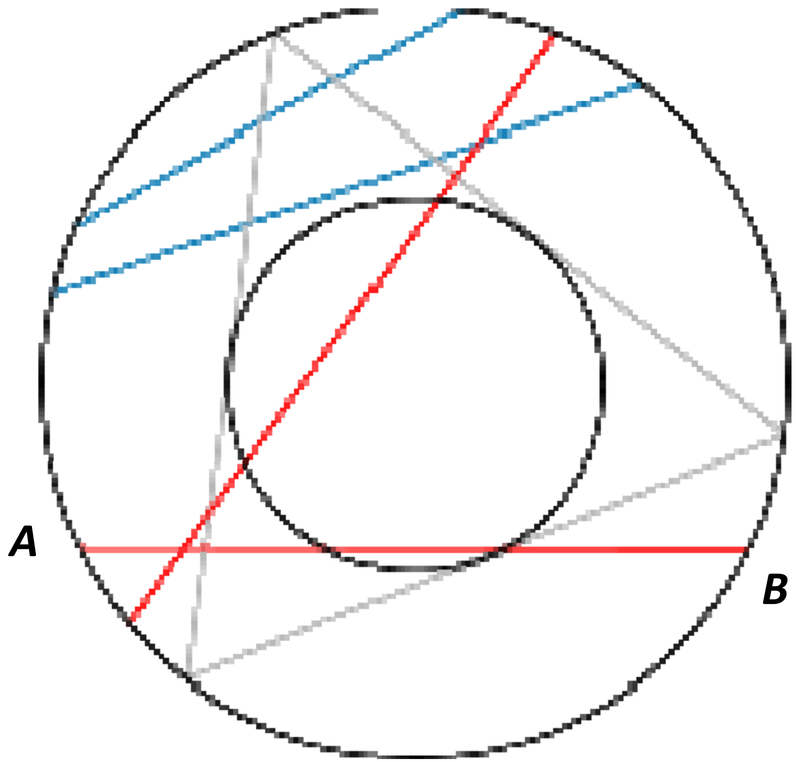


Se muestran cuatro posibles cuerdas: las azules son más cortas y las rojas más largas que el lado del triángulo. La cuerda verde indica el caso en que la cuerda coincide con la longitud del triángulo.

Respuesta 3: Elegimos ***AB*** teniendo en cuenta la posición de su punto medio.

Para que la cuerda ***AB*** sea más larga que el lado del triángulo, su punto medio debe de estar dentro del círculo inscrito en el triángulo, que es de radio ***r*/2**.

Por lo tanto, la probabilidad ***p*** buscada es la razón entre el área del círculo inscrito ($\pi r^2/4$) y el área del círculo determinado por ***C*** (πr^2).
Es decir,
***p*=1/4.**



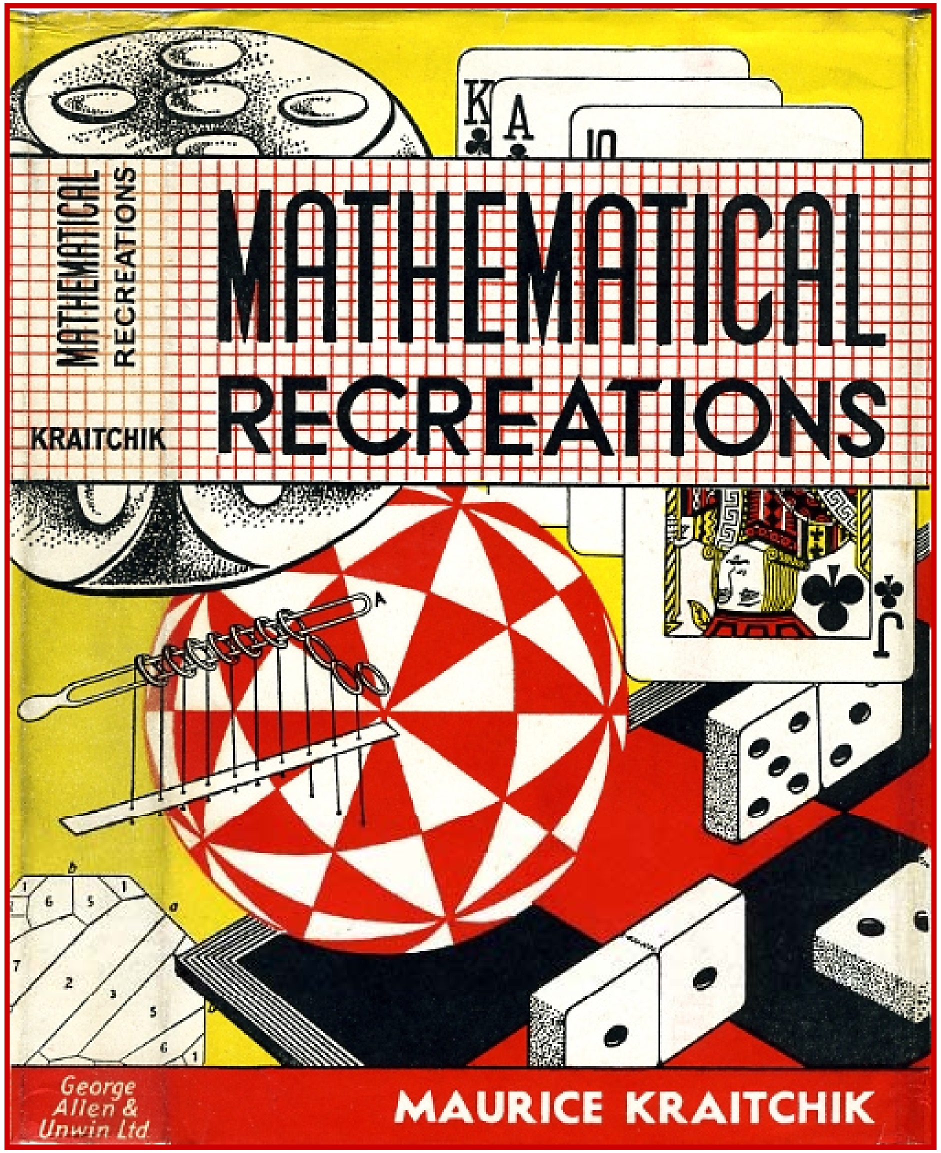
Se muestran cuatro posibles cuerdas: las azules son más cortas y las rojas más largas que el lado del triángulo.

Hemos llegado a tres respuestas diferentes al argumentar de distintas maneras, y las tres son correctas: hemos jugado con el azar eligiendo de manera aleatoria los puntos finales, la distancia al centro o el punto medio de la cuerda.

¿Cuál es el problema? Es la vaguedad del enunciado: el método que produce la variable aleatoria no está bien determinado, y ello puede dar lugar a manipulaciones ‘inconscientes’.

3. La paradoja de Kraichik

Propuesta en 1930 por el matemático **Maurice Kraitchik**...



Fernando y **Marco** discuten sobre quien la tiene más larga...

Fernando y **Marco** discuten sobre quien la tiene más larga...

Fernando y **Marco** tienen una preciosa corbata matemática para ocasiones especiales. **Fernando** propone a **Marco** el siguiente juego: aquel que tenga la corbata más larga se la regala al otro. **Marco** –que sabe que **Fernando** es un tanto “embaucador”– razona de la siguiente manera:

Fernando y **Marco** tienen una preciosa corbata matemática para ocasiones especiales. **Fernando** propone a **Marco** el siguiente juego: aquel que tenga la corbata más larga se la regala al otro. **Marco** –que sabe que **Fernando** es un tanto "embaucador"– razona de la siguiente manera:

Mi corbata mide **M** centímetros. Hay **1** posibilidad sobre **2** de que mi corbata sea más larga que la de **Fernando**, es decir, hay un 50% de posibilidades de perder mi corbata de longitud **M**. En caso contrario, ganaré la corbata de **Fernando** que mide **F** y es más larga que la mía.

Fernando y **Marco** tienen una preciosa corbata matemática para ocasiones especiales. **Fernando** propone a **Marco** el siguiente juego: aquel que tenga la corbata más larga se la regala al otro. **Marco** –que sabe que **Fernando** es un tanto "embaucador"– razona de la siguiente manera:

Mi corbata mide **M** centímetros. Hay **1** posibilidad sobre **2** de que mi corbata sea más larga que la de **Fernando**, es decir, hay un 50% de posibilidades de perder mi corbata de longitud **M**. En caso contrario, ganaré la corbata de **Fernando** que mide **F** y es más larga que la mía.

Así, en el 50% de los casos pierdo **M** y en el 50% de los casos gano **más** que **M**. La ganancia media es positiva, así que jugaré con **Fernando**.

El juego es simétrico, así que **Fernando** puede hacer exactamente el mismo razonamiento para concluir que el juego le es favorable.

Pero esto es **paradójico**… Debe de haber algún error.
En efecto, el razonamiento se realiza en un caso ideal que puede no existir:

1. supone que todas las longitudes posibles e imaginables de corbatas tienen la misma probabilidad de existir,
2. y conjetura que dada una longitud cualquiera **L**, la mitad de las corbatas es de longitud mayor y la otra mitad es de longitud menor…

El juego es simétrico, así que **Fernando** puede hacer exactamente el mismo razonamiento para concluir que el juego le es favorable.

Pero esto es **paradójico**… Debe de haber algún error.
En efecto, el razonamiento se realiza en un caso ideal que puede no existir:

1. supone que todas las longitudes posibles e imaginables de corbatas tienen la misma probabilidad de existir,
2. y conjetura que dada una longitud cualquiera **L**, la mitad de las corbatas es de longitud mayor y la otra mitad es de longitud menor…

Si la corbata de **Marco** midiera 1 metro... **Fernando** lo tendría difícil para ganar...

Si la corbata de **Marco** midiera 1 metro...
Fernando lo tendría difícil para ganar...

Es decir, el error viene de aplicar el **principio de indiferencia** –en ausencia de datos precisos, las probabilidades entre los distintos casos son iguales–.

Para jugar a este juego, habría que dar **una probabilidad** a cada longitud de corbata previsible: por ejemplo, si **M** es igual a un metro… la probabilidad de encontrar corbatas más largas que un metro seguro que es menor que la de topar con una más corta…

4. Una paradoja de un juego infinito

Monty Burns muere y va al infierno. El diablo le propone un juego al que sólo podrá jugar una vez. Si gana, irá al **cielo**, y si pierde arderá para siempre en el **infierno**.

Monty Burns muere y va al infierno. El diablo le propone un juego al que sólo podrá jugar una vez. Si gana, irá al **cielo**, y si pierde arderá para siempre en el **infierno**.

Burns sabe además que si juega el juego el primer día, tiene **1/2** de posibilidades de ganar, si apuesta el segundo tiene **2/3** de posibilidades de vencer, el tercer día **3/4**, al cuarto **4/5**, y así sucesivamente.
Si permanece más días en el infierno antes de jugar, se incrementan las posibilidades de ganar, ya que:

$$(n-1)/n < n/(n+1).$$

¿Cuál es el momento más razonable para que juegue Burns?

Monty Burns muere y va al infierno. El diablo le propone un juego al que sólo podrá jugar una vez. Si gana, irá al **cielo**, y si pierde arderá para siempre en el **infierno**.

Burns sabe además que si juega el juego el primer día, tiene **1/2** de posibilidades de ganar, si apuesta el segundo tiene **2/3** de posibilidades de vencer, el tercer día **3/4**, al cuarto **4/5**, y así sucesivamente.

Todo incremento en la probabilidad de ganancia de un juego con apuesta infinita tiene utilidad infinita. Por ejemplo, si espera un año para jugar, sus posibilidades de ganar son de 365/366=0,997268, pero si espera un año y un día, sus posibilidades de ganar son de 366/367=0,997275, es decir, se incrementan en 0,000007. Aún así, 0,000007 multiplicado por infinito es infinito...

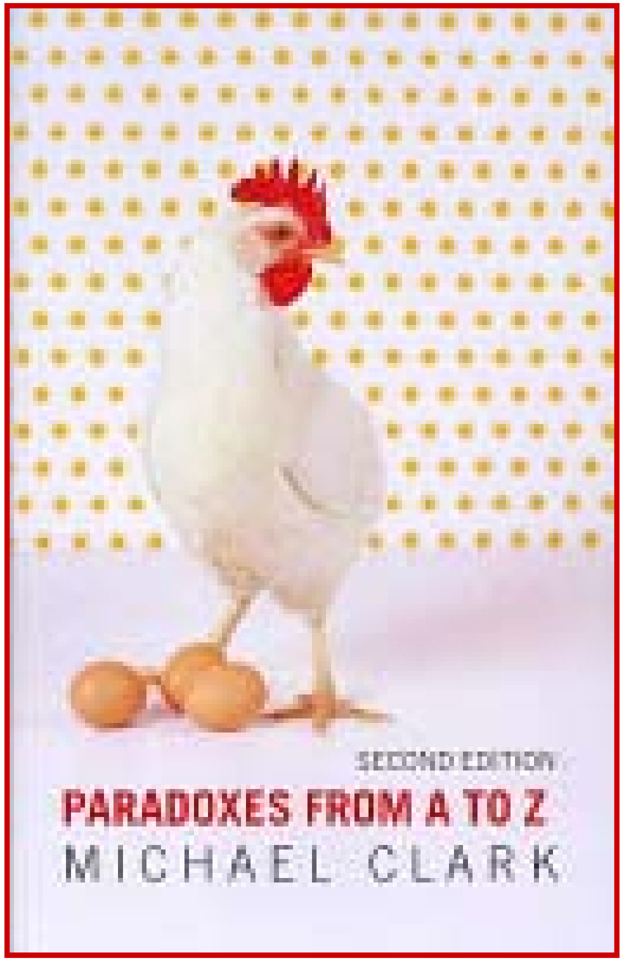
Monty Burns muere y va al infierno. El diablo le propone un juego al que sólo podrá jugar una vez. Si gana, irá al **cielo**, y si pierde arderá para siempre en el **infierno**.

Burns sabe además que si juega el juego el primer día, tiene **1/2** de posibilidades de ganar, si apuesta el segundo tiene **2/3** de posibilidades de vencer, el tercer día **3/4**, al cuarto **4/5**, y así sucesivamente.

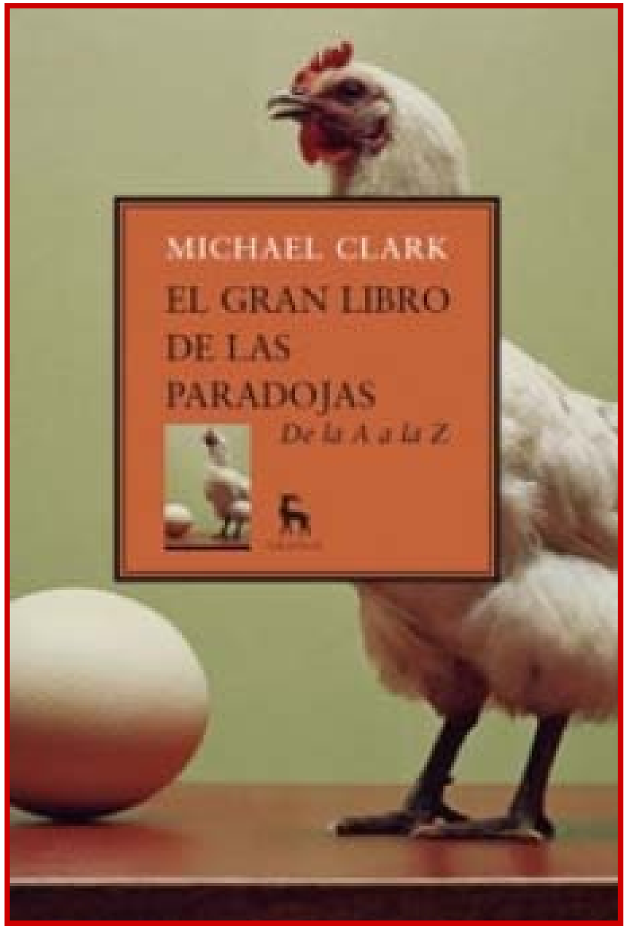
Por otro lado, parece razonable suponer el coste por retrasarse un día en el juego como finito: es un día más de sufrimiento en el infierno. Así, el supuesto beneficio infinito que supone un retraso excederá siempre ese coste. Esta lógica parece sugerir que **Burns** debería esperar eternamente para jugar. Pero, esta estrategia debe ser por la misma razón rechazada: ¿por qué quedarse para siempre en el infierno con la esperanza de incrementar la posibilidad de abandonarlo? Para hacer esto,

¿no sería mejor arriesgarse y jugar?

5. Una rara enfermedad



Michael Clark la contaba como **La paradoja xenófoba** (historia policial con un hombre negro acusado)



Juan es hipocondríaco.

Un amigo le ha hablado de una enfermedad genética, la **retrocapiroscosis**, que se manifiesta sólo a partir de los 40 años: los que contraen la enfermedad, entienden al revés gran parte de las cosas que se les dice (aunque conservan el resto de sus facultades mentales intactas).

Es una enfermedad muy rara... Sólo la padece **1** persona entre **un millón**.

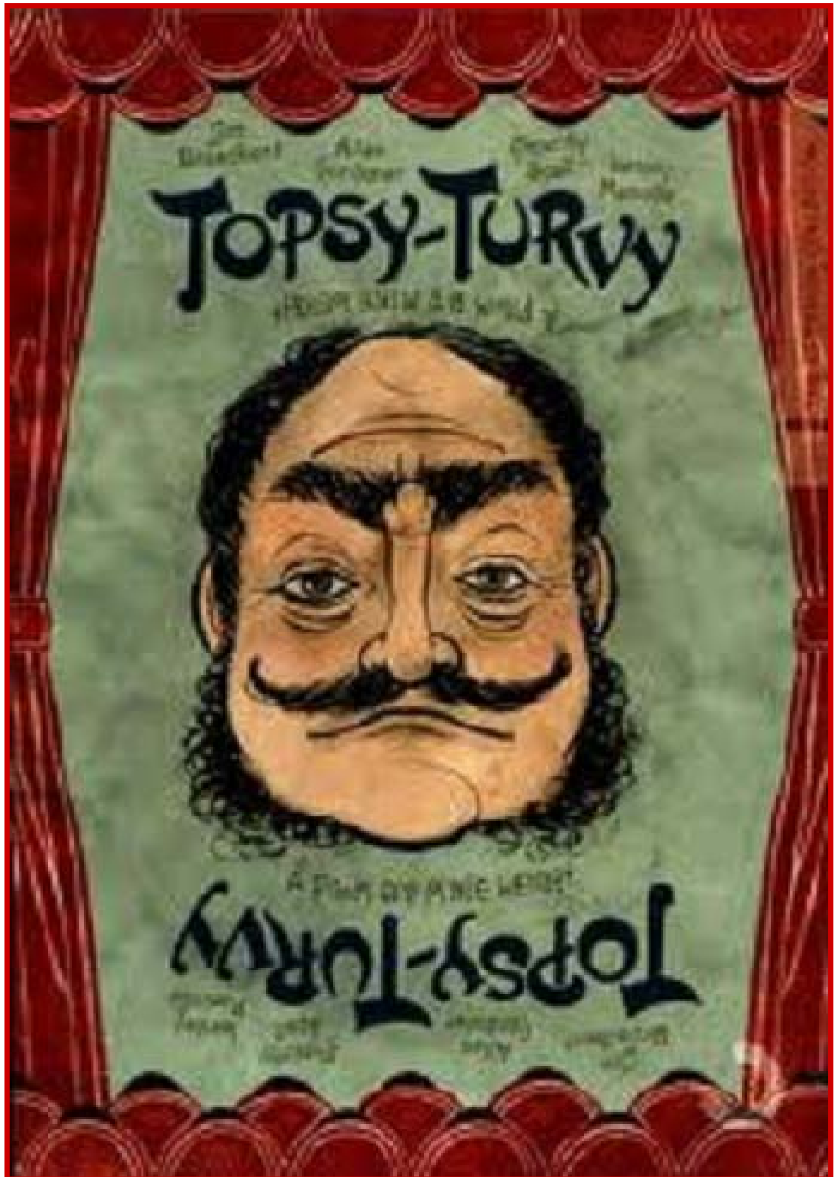
Juan es hipocondríaco. Una amigo le ha hablado de una enfermedad genética, la ***retrocapiroscosis***, que se manifiesta sólo a partir de los 40 años: los que contraen la enfermedad, entienden al revés gran parte de las cosas que se les dice (aunque conservan el resto de sus facultades mentales intactas). Es una enfermedad muy rara... Sólo la padece **1** persona entre **un millón**.

Juan cumple en unos días los 40 y quiere saber si contraerá la enfermedad.

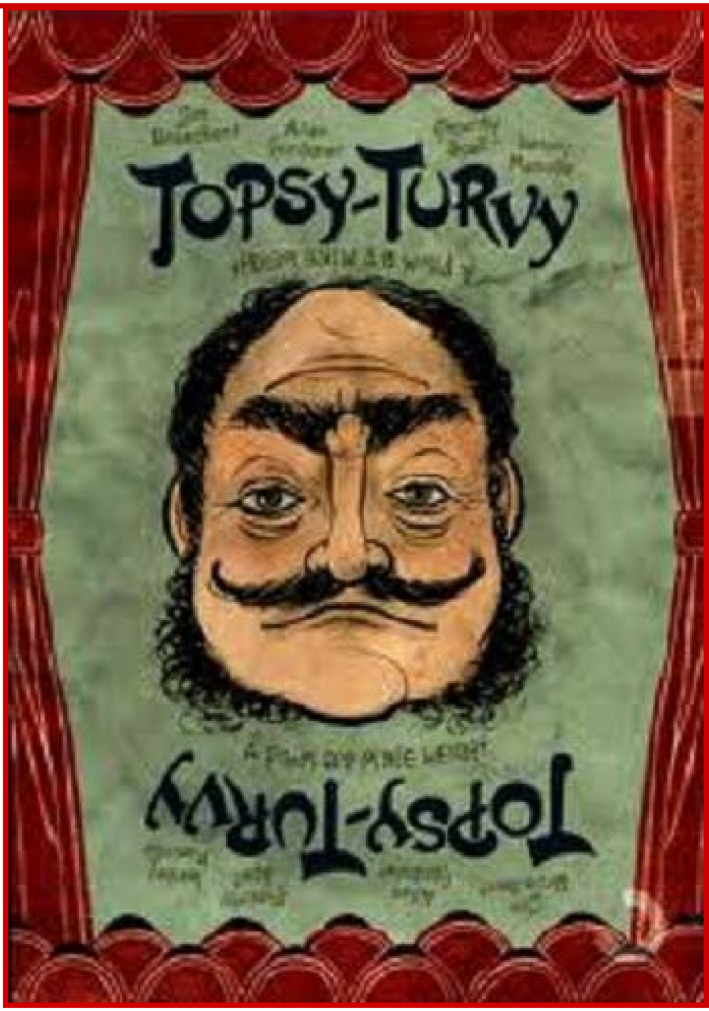
Existe un test genético que permite averiguar a una persona si padecerá la enfermedad antes de contraerla...

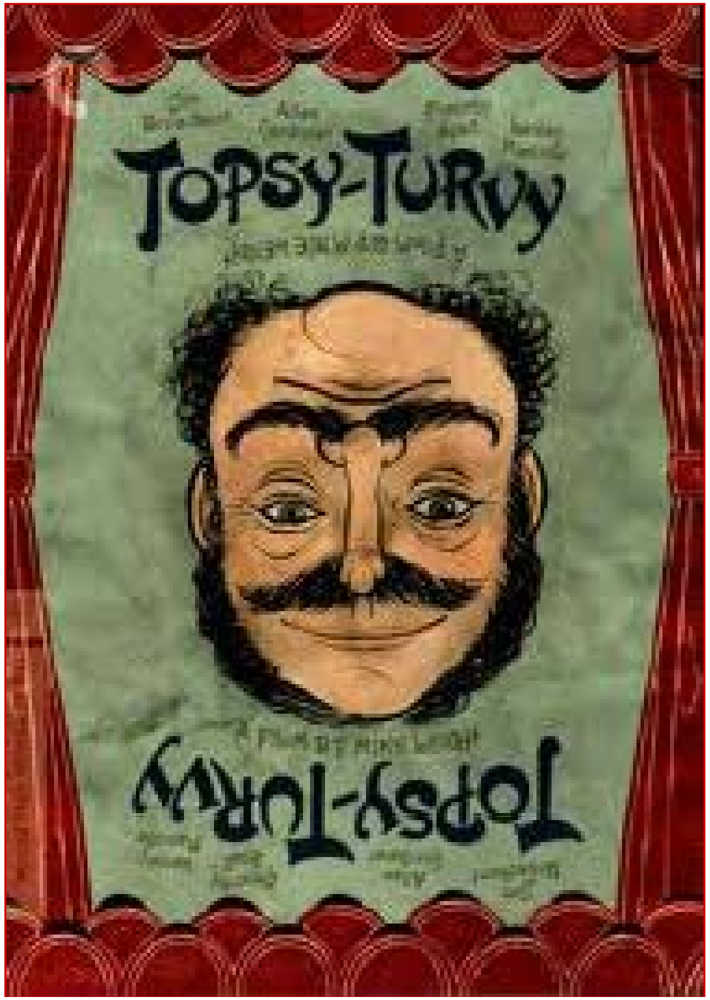
Pero el test falla **1** vez sobre **1.000**.

Juan pasa el test, y unos días más tarde, el médico le dice: “tu test en ***retrocapiroscosis*** ha dado positivo...”



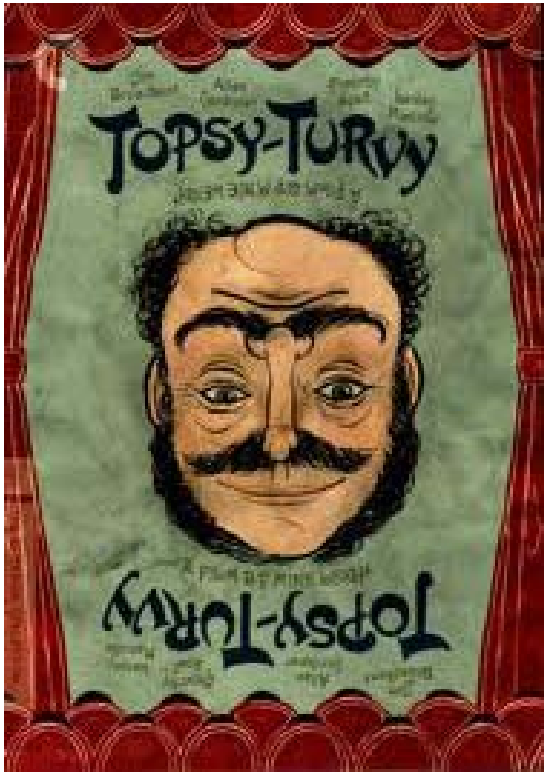
Juan pasa el test, y unos días más tarde, el médico le dice: “tu test en ***retrocapiroscosis*** ha dado positivo... Pero no te preocupes, tienes sólo **1** posibilidad sobre **1.000** de estar enfermo.”

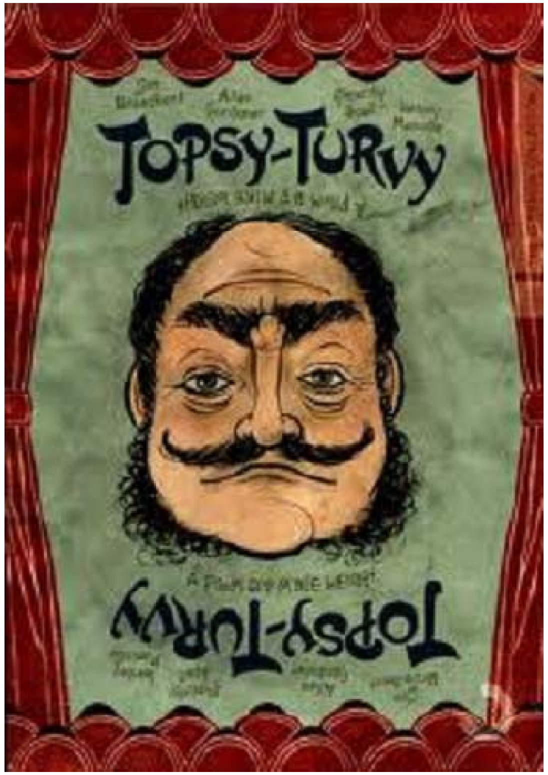




Juan pasa el test, y unos días más tarde, el médico le dice: “tu test en ***retrocapiroscosis*** ha dado positivo... Pero no te preocupes, tienes sólo **1** posibilidad sobre **1.000** de estar enfermo.”

Juan piensa: Eso es absurdo. Si el test se equivoca **1** vez de cada **1.000** y mi test es positivo, la probabilidad de estar enfermo es del **99,9**%...





Juan pasa el test, y unos días más tarde, el médico le dice: “tu test en ***retrocapiroscosis*** ha dado positivo... Pero no te preocupes, tienes sólo **1** posibilidad sobre **1.000** de estar enfermo.”

Juan piensa: Eso es absurdo. Si el test se equivoca **1** vez de cada **1.000** y mi test es positivo, la probabilidad de estar enfermo es del **99,9**%...

A lo mejor ya soy victima de la enfermedad y aunque el médico me ha dicho “tu test en ***retrocapiroscosis*** ha dado negativo” yo he entendido “tu test en ***retrocapiroscosis*** ha dado positivo”... y entonces probablemente no estaría enfermo... Pero, ¿cómo se ha invertido sólo su primera frase ?

Juan piensa: Eso es absurdo. Si el test se equivoca **1** vez de cada **1.000** y mi test es positivo, la probabilidad de estar enfermo es del **99,9**%...

A lo mejor ya soy victima de la enfermedad y aunque el médico me ha dicho “tu test en ***retrocapiroscosis*** ha dado negativo” yo he entendido “tu test en ***retrocapiroscosis*** ha dado positivo”... y entonces probablemente no estaría enfermo... Pero, ¿se ha invertido sólo su primera frase ?

O a lo mejor mi enfermedad me ha hecho invertir sólo el sentido de la segunda frase, y en realidad el médico ha dicho:

“tu test en ***retrocapiroscosis*** ha dado positivo... Pero **preocúpate**, porque tienes **1** posibilidad sobre **1.000** de estar no estar enfermo.”

Juan piensa: Eso es absurdo. Si el test se equivoca **1** vez de cada **1.000** y mi test es positivo, la probabilidad de estar enfermo es del **99,9**%...

A lo mejor ya soy victima de la enfermedad y aunque el médico me ha dicho "tu test en ***retrocapiroscosis*** ha dado negativo" yo he entendido "tu test en ***retrocapiroscosis*** ha dado positivo"... y entonces probablemente no estaría enfermo... Pero, ¿se ha invertido sólo su primera frase ?

O a lo mejor mi enfermedad me ha hecho invertir sólo el sentido de la segunda frase, y en realidad el médico ha dicho:

"tu test en ***retrocapiroscosis*** ha dado positivo... Pero **preocúpate**, porque tienes **1** posibilidad sobre **1.000** de estar no estar enfermo."

¿?

En realidad, **Juan** divaga: lo que ha dicho el médico está bien: es la **paradoja de los falsos positivos**.

Si hacemos pasar el test a **100 millones** de personas, habrá aproximadamente **100** personas enfermas, y para casi todas estas 100 personas, el test será positivo (la fiabilidad del test es del **99,9**%), con lo que es muy probable que se equivoque para **1** ó **2** de esas 100 personas ...

Si hacemos pasar el test a **100 millones** de personas, habrá aproximadamente **100** personas enfermas, y para casi todas estas 100 personas, el test será positivo (la fiabilidad del test es del **99,9**%), con lo que es muy probable que se equivoque para **1** ó **2** de esas 100 personas ...

Para las **99.999.900** personas restantes, el test se equivocará aproximadamente **1** vez por **1.000**, es decir, aproximadamente **100.000** veces. Son ***los falsos positivos*** y su gran cantidad la clave de la explicación. A causa de ellos, en total entre las **100.000+100** personas aproximadamente para las que el test es positivo, no hay más que unas **100** que están enfermas.
Es decir, entre las personas con test positivo, hay aproximadamente **1/1000** que están realmente enfermas...

De hecho es un problema de ***probabilidades condicionadas***: si la probabilidad de estar enfermo es de 1/1.000.000 y el test se equivoca con probabilidad de 1/1000, entonces la probabilidad de estar enfermo sabiendo que el test ha dado positivo es de:

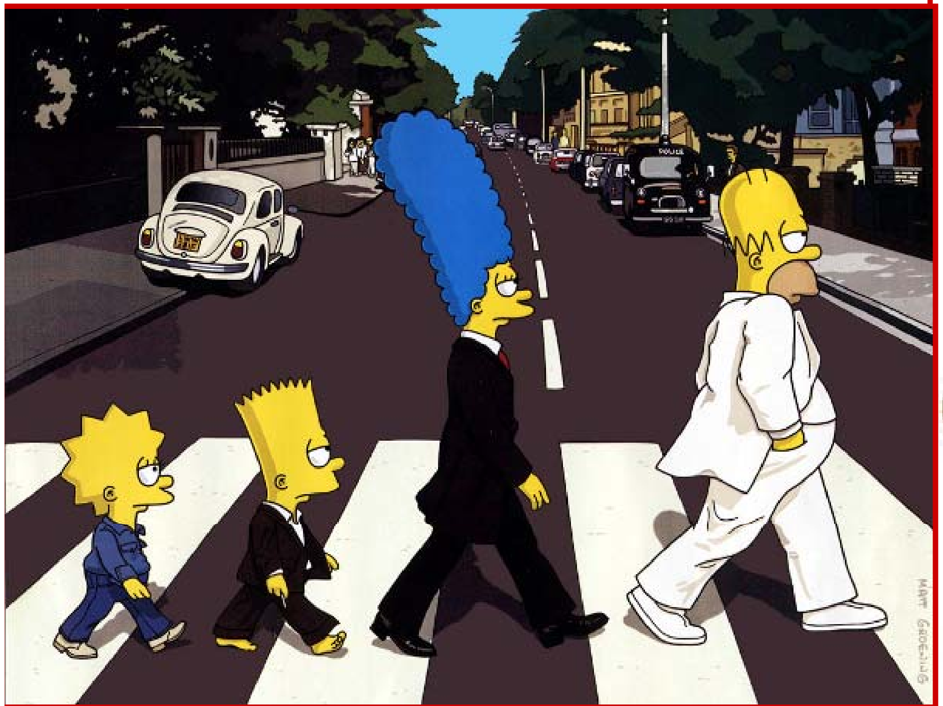
1/1002

Así que **Juan** puede estar tranquilo...

Ahora si se hace otro test y también le da positivo, ya debería empezar a preocuparse...

6. ¿Paradoja zodiacal?

¿Es difícil que 4 personas compartan signo zodiacal?



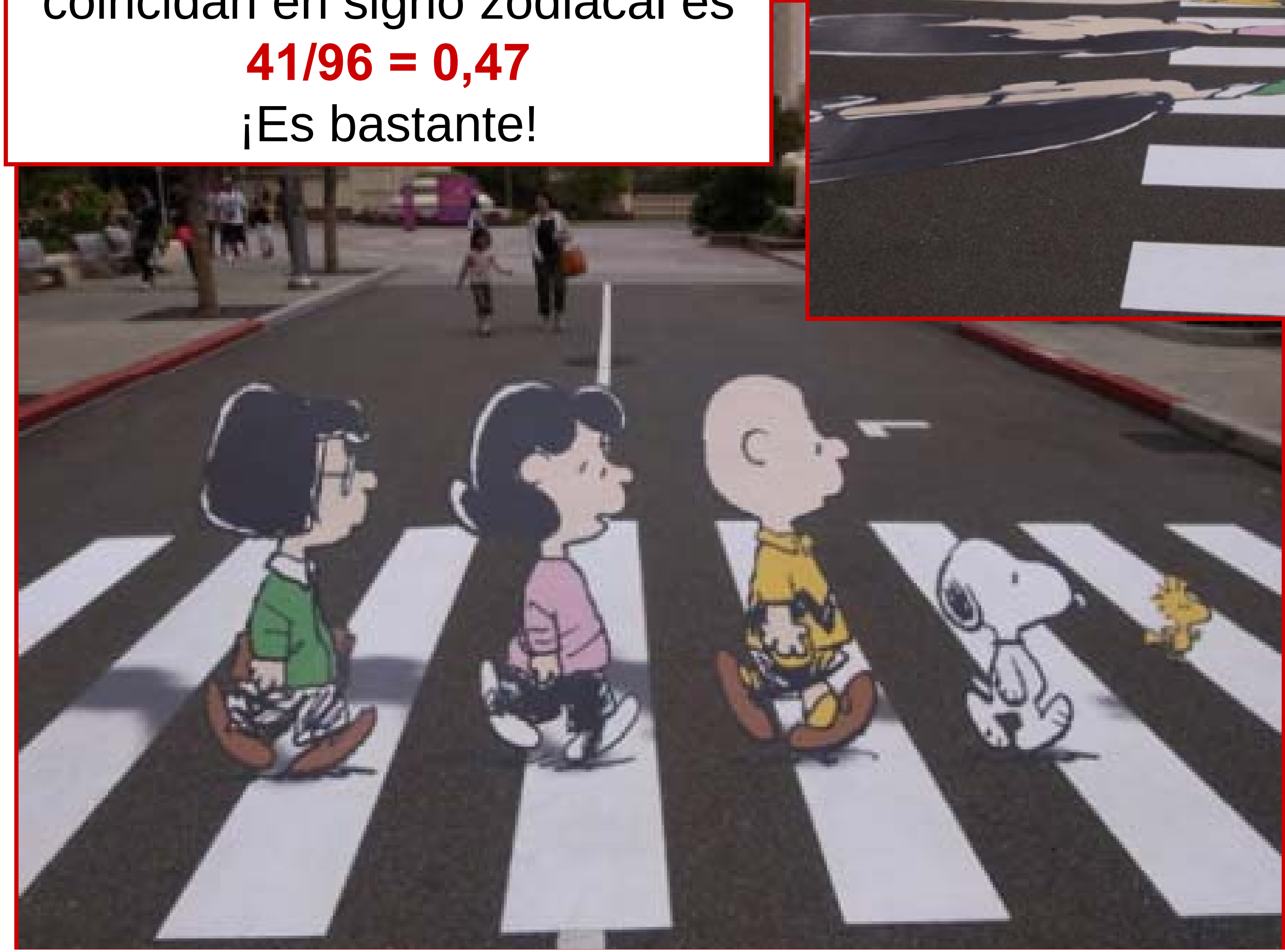
Realmente no... La probabilidad de no compartirlo es de:

11/12 x 10/12 x 9/12 = 55/96...

Luego la probabilidad de que al menos dos de estos personajes coincidan en signo zodiacal es

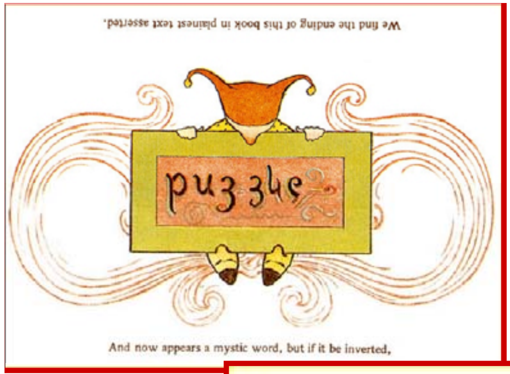
41/96 = 0,47

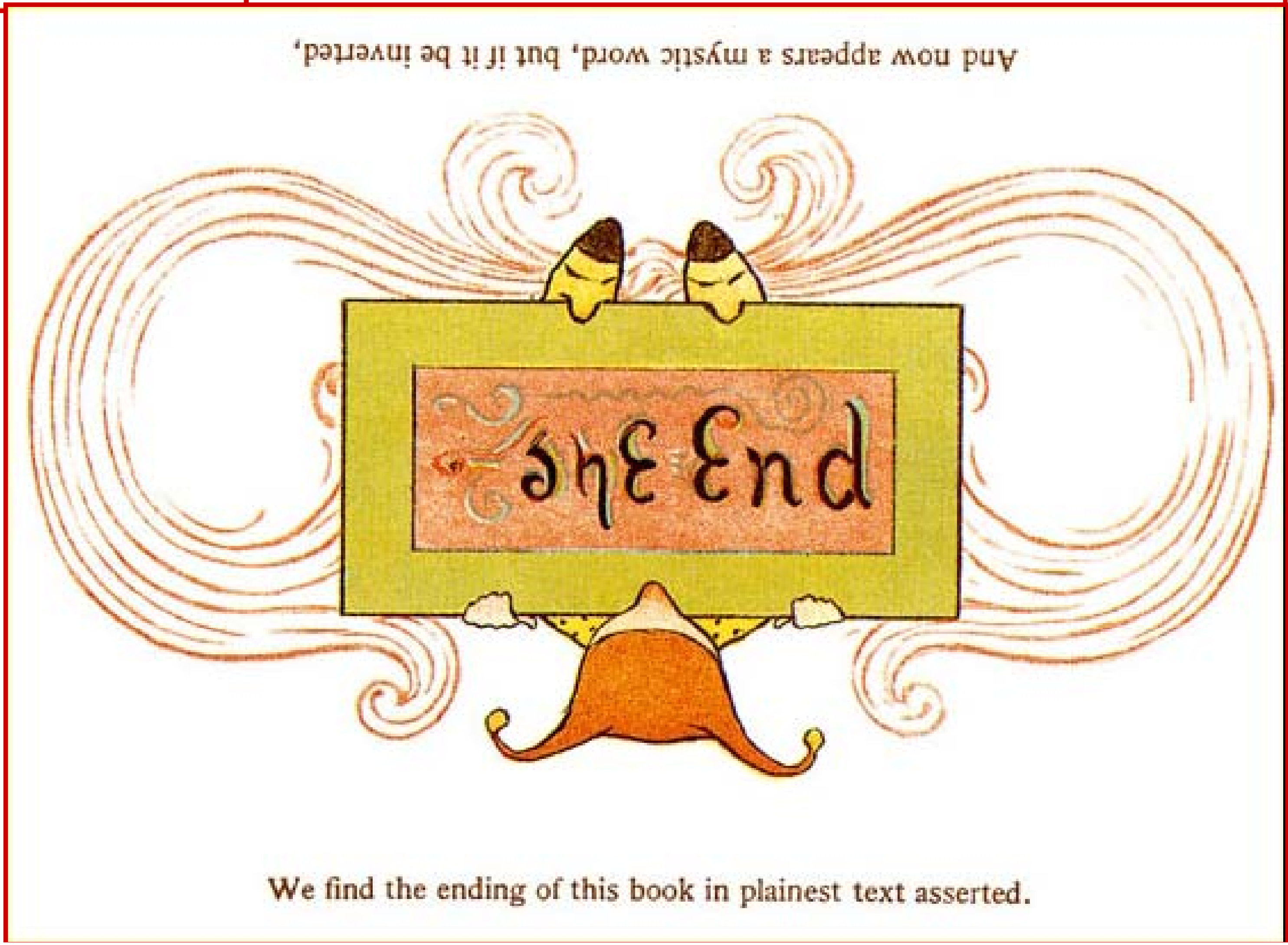
¡Es bastante!



And now appears a mystic word, but if it be inverted,

We find the ending of this book in plainest text asserted.




And now appears a mystic word, but if it be inverted,
We find the ending of this book in plainest text asserted.

GRACIAS