FOLIACIONES Y HOMOMORFISMOS DE THOM

Marta MACHO STADLER
Universidad del País Vasco-Euskal Herriko Unibertsitatea
Facultad de Ciencias. Departamento de Matemáticas
Apartado 644. 48080 Bilbao
e-mail: mtpmastm@lg.ehu.es

Si $G \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\Longrightarrow}} M$ es un grupoide de Lie, la acción de G sobre el espacio de unidades, induce sobre M una foliación de Stefan. El grupoide se dice *regular*, si sus fibras son conexas y los grupos de isotropía son discretos. En tal caso, la foliación inducida por G sobre M es regular.

Si $G \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\Longrightarrow}} M$ es un grupoide de Lie regular y $\mathcal{F}$ es la foliación sobre M inducida por la acción de G, el grupoide se llama *K-orientado*, si el grupo estructural de $T(\mathcal{F})$, el fibrado tangente a la foliación, se puede reducir a $Mln^c(\mathbb{R})$ (o de otro modo, si el clasificante del grupoide, BG, posee una estructura $Spin^c$).

Se trata de comprobar que para un grupoide $G \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\Longrightarrow}} M$ regular, K-orientado, tal que las hojas de la foliación inducida por la acción de G sobre M son de dimensión par, y verificando un cierto "esquema en abiertos y cerrados", existe un isomorfismo canónico, *el isomorfismo de Thom*, que relaciona el grupo de K-teoría topológica de M y el grupo de K-teoría analítica de la C*-álgebra reducida del grupoide G. Este es un caso particular de la *conjetura de Baum-Connes* para foliaciones.

1. EL CASO TOPOLOGICO

Dado un espacio localmente compacto M, se verifica el siguiente resultado:

Proposición 1.1.- *Si U es un abierto en M y $F = M - U$, la sucesión:*

$$0 \to C_0(U) \overset{e_0}{\to} C_0(M) \overset{r_0}{\to} C_0(F) \to 0,$$

es exacta, donde e_0 es la extensión por cero y r_0 es la restricción. ■

Teorema 1.2.- *Se tiene la sucesión exacta larga en K-teoría topológica:*

(1)

2. CONO Y SUSPENSION DE UN GRUPOIDE

El <u>*cono*</u> de $G \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} M$ es el grupoide de Lie de espacio total $C(G) = G \times [0,1)$, espacio de unidades $C(M) = M \times [0,1)$, proyecciones $c(\alpha)(\gamma,t) = (\alpha(\gamma),t)$ y $c(\beta)(\gamma,t) = (\beta(\gamma),t)$, de conjunto de pares componibles:

$$C(G)^2 = \{((\gamma_2,t_2),(\gamma_1,t_1)) \in C(G) \times C(G) : \alpha(\gamma_2) = \beta(\gamma_1) \text{ y } t_1 = t_2 = t\},$$

multiplicación $(\gamma_2,t).(\gamma_1,t) = (\gamma_2.\gamma_1,t)$ e inversión $(\gamma,t)^{-1} = (\gamma^{-1},t)$.

La <u>*suspensión*</u> de $G \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} M$ es el grupoide de Lie de espacio total $S(G) = G \times (0,1)$, espacio de unidades $S(M) = M \times (0,1)$ y con las operaciones evidentes. $S(G)$ es un subgrupoide saturado de $C(G)$.

Lema 2.1.- *Se tienen los isomorfismos de C^*-álgebras:*

$$C^*(C(G)) \cong C(C^*(G)) \text{ y } C^*(S(G)) \cong S(C^*(G)). \quad \blacksquare$$

3. SUBGRUPOIDES ABIERTOS Y CERRADOS

Sea $G \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} M$ un grupoide de Lie regular, $U \subset M$ un abierto saturado y $F = M - U$. G_U es un subgrupoide abierto lleno de G. La inclusión natural de G_U en G, induce homomorfismo inyectivo de C*-álgebras (generado por la extensión por cero): $e\colon C^*(G_U) \longrightarrow C^*(G)$, cuya imagen es un ideal cerrado de $C^*(G)$. e se llama un <u>*morfismo de inclusión*</u> entre C*-álgebras.

Por restricción de funciones, se dispone de un homomorfismo sobreyectivo de C*-álgebras $r\colon C^*(G) \longrightarrow C^*(G_F)$, llamado <u>*morfismo de restricción*</u>. Esta aplicación no proviene de ninguna función a nivel de los grupoides.

Proposición 3.1.- *La sucesión:* $0 \to C^*(G_U) \xrightarrow{e} C^*(G) \xrightarrow{r} C^*(G_F) \to 0$, *es exacta en todas partes, salvo quizá en el nivel $C^*(G)$.* $\blacksquare$

F es un cerrado <u>*permitido*</u>, si la sucesión anterior es exacta.

4. LA SUCESION EXACTA LARGA EN K-TEORIA

Se desea construir una sucesión exacta larga de grupos de K-teoría de C*-álgebras de grupoides análoga a la sucesión (1). Se considera para ello:

- el *mapping-cylinder* de r, la C*-álgebra dada por:

$$Z_r = \{(f, F) \in C^*(G) \oplus C([0,1], C^*(G_F)) : r(f) = F(0)\}.$$

Z_r es la C*-álgebra del grupoide $G \cup_{G_F} (G_F \times [0,1])$ (con la estructura de grupoide trivial sobre $[0,1]$), obtenido al identificar $G_F \times \{0\} \subset G_F \times [0,1]$ con $G_F \subset G$. G es un subgrupoide cerrado de $G \cup_{G_F} (G_F \times [0,1])$, y se tiene así un morfismo de restricción $p_r \colon Z_r \longrightarrow C^*(G)$, definido por $p_r(f, F) = f$.

- el homorfismo inyectivo $i_r \colon C^*(G) \longrightarrow Z_r$, donde $i_r(f) = (f, r(f))$.

- la projección natural $p_1 \colon G_F \times [0,1] \longrightarrow G_F \times \{1\}$ induce la aplicación canónica $\epsilon \colon Z_r \longrightarrow C^*(G_F)$, donde $\epsilon(f, F) = F(1)$. El *mapping-cone* de r, C_r, es el ideal de Z_r definido por el núcleo de esta aplicación:

$$C_r = \{(f, F) \in C^*(G) \oplus C([0,1], C^*(G_F)) : r(f) = F(0) \text{ y } F(1) = 0\}.$$

C_r es la C*-álgebra del grupoide $G \cup_{G_F} C(G_F)$, obtenido al identificar $G_F \times \{0\} \subset C(G_F)$ con $G_F \subset G$. De hecho:

$$C_r = \{(f, F) \in C^*(G) \oplus C(C^*(G_F)) : r(f) = F(0)\}.$$

Si $j_r \colon C_r \longrightarrow Z_r$ es la inclusión natural, se tiene una sucesión exacta:

$$0 \to K_0(C_r) \overset{(j_r)_*}{\to} K_0(Z_r) \overset{\epsilon_*}{\to} K_0(C^*(G_F)) \to 0.$$

- como G es un subgrupoide cerrado de $G \cup_{G_F} C(G_F)$, se tiene un morfismo de restricción $q_r \colon C_r \longrightarrow C^*(G)$, donde $q_r(f, F) = f$. Entonces, $p_r \circ i_r = id_{C^*(G)}$, $i_r \circ p_r \sim id_{Z_r}$ y $q_r = p_r \circ j_r$. Así, el homomorfismo i_r induce el isomorfismo de grupos $(i_r)_* \colon K_0(Z_r) \longrightarrow K_0(C^*(G))$, y se obtiene la sucesión exacta:

$$K_0(C_r) \overset{(q_r)_*}{\to} K_0(C^*(G)) \overset{r_*}{\to} K_0(C^*(G_F)).$$

- la suspensión $S(G_F)$, es un subgrupoide abierto de $G \cup_{G_F} C(G_F)$, cuyo complementario es difeomorfo a G. Se tiene por lo tanto el morfismo de inclusión

$k_r\colon S(C^*(G_F)) \longrightarrow C_r$, donde $k_r(G) = (0, G)$; se deduce la sucesión exacta:

$$0 \to S(C^*(G_F)) \xrightarrow{k_r} C_r \xrightarrow{q_r} C^*(G) \to 0.$$

• G_U se identifica con un subgrupoide saturado abierto de $G \cup_{G_F} C(G_F)$, cuyo complementario es difeomorfo a $C(G_F)$. Se tiene pues el morfismo de inclusión $\widehat{e}\colon C^*(G_U) \longrightarrow C_r$, dado por $\widehat{e}(f) = (e(f), 0)$, y entonces $e = q_r \circ \widehat{e}$.

• como $C(G_F)$ es un subgrupoide cerrado de $G \cup_{G_F} C(G_F)$, se tiene el morfismo de restricción $\widehat{r}\colon C_r \longrightarrow C(C^*(G_F))$, definido por $\widehat{r}(f, F) = F$, y se obtiene la sucesión exacta: $0 \to C^*(G_U) \xrightarrow{\widehat{e}} C_r \xrightarrow{\widehat{r}} C(C^*(G_F)) \to 0$. Pero $K_0(C(C^*(G_F))) = 0$, al ser $C(C^*(G_F))$ contráctil, y se tiene un isomorfismo: $\widehat{e}_*\colon K_0(C^*(G_U)) \longrightarrow K_0(C_r)$. Como $K_0(S(A)) \cong K_1(A)$, para cada C*-álgebra A:

$$K_1(C^*(G_F)) \overset{(k_r)_*}{\to} K_0(C_r) \overset{\widehat{e_*}}{\cong} K_0(C^*(G_U)),$$

es decir, se obtiene el homomorfismo de enlace natural:

$$\partial = (\widehat{e}_*)^{-1} \circ (k_r)_*\colon K_1(C^*(G_F)) \longrightarrow K_0(C^*(G_U)).$$

Queda probado, por lo tanto el siguiente resultado:

Teorema 4.1.- *Se tiene la sucesión exacta larga:*

(2)

En (2), los homomorfismos se han obtenido a partir de morfismos de inclusión (e_* y ∂ (obtenido a partir de $\widehat{e}$ y k_r)) o de restricción (r_*).

5. EL HOMOMORFISMO DE THOM

El objetivo ahora es comparar las sucesiones exactas largas (1) y (2):

Proposición 5.1.- [CS] *Si* $G \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\Longrightarrow}} M$ *es un grupoide de Lie regular, K-orientado e induciendo una foliación con hojas de dimensión par, existe un elemento canónico* $l! \in KK^0(C_0(M), C^*(G))$. ∎

Teorema 5.2.- *En las condiciones anteriores, se tiene un homomorfismo de grupos canónico* $\mu: K_0(C_0(M)) \longrightarrow K_0(C^*(G))$*, definido para todo fibrado vectorial* E *sobre* M*, por:* $\mu([E]) = [E] \otimes_{C_0(M)} l!$*, donde:*

$$\otimes_{C_0(M)}: KK^0(\mathbb{C}, C_0(M)) \times KK^0(C_0(M), C^*(G)) \longrightarrow KK^0(\mathbb{C}, C^*(G))$$

es el producto de Kasparov. μ *es el* homomorfismo de Thom *de* $G \overset{\alpha}{\underset{\beta}{\Longrightarrow}} M$*.*

6. FUNCTORIALIDAD DEL HOMOMORFISMO DE THOM

Sea $F \subset M$ un cerrado saturado y $\mathcal{F}_F$ la foliación inducida sobre F por $\mathcal{F}$. La restricción de la estructura $Spin^c$ de $T(\mathcal{F})$ sobre el subfibrado $T(\mathcal{F}_F)$ es aún una estructura $Spin^c$ cuyo fibrado de los spinors correspondiente S_F, es el pullback de S por la inclusión $i_F: F \longrightarrow M$. Así, $G_F \overset{\alpha_F}{\underset{\beta_F}{\Longrightarrow}} F$ es un grupoide de Lie regular y K-orientado, el homomorfismo de Thom $\mu_F: K_0(C_0(F)) \longrightarrow K_0(C^*(G_F))$ tiene sentido. Del mismo modo, si $U \subset M$ es un abierto saturado, se comprueba que $G_U \overset{\alpha_U}{\underset{\beta_U}{\Longrightarrow}} U$ es un grupoide de Lie regular y K-orientado, y se puede construir el homomorfismo de Thom: $\mu_U: K_0(C_0(U)) \longrightarrow K_0(C^*(G_U))$.

Teorema 6.1.- *Se tienen los diagramas conmutativos:*

y

Teorema 6.2.- *Sea* $G \overset{\alpha}{\underset{\beta}{\Longrightarrow}} M$ *un grupoide regular, K-orientado, realizando una foliación* $\mathcal{F}$ *sobre* M *con hojas de dimensión par. Si* $U \subset M$ *es un abierto saturado y* $F = M - U$ *un cerrado permitido, se tiene el diagrama conmutativo:*

7. EL ISOMORFISMO DE THOM PARA ALGUNAS FOLIACIONES

Del teorema 6.2, se deduce:

Teorema 7.1.- *Sea* $G \overset{\alpha}{\underset{\beta}{\Longrightarrow}} M$ *un grupoide de Lie regular y K-orientado, que realiza una foliación* $\mathcal{F}$ *sobre* M *con hojas de dimensión par. Sea* $U \subset M$ *un abierto saturado y* $F = M - U$ *un cerrado permido. Si los homomorfismos de Thom* $\mu_F \colon K_i(C_0(F)) \longrightarrow K_i(C^*(G_F))$ *y* $\mu_U \colon K_i(C_0(U)) \longrightarrow K_i(C^*(G_U))$ *son isomorfismos, entonces* $\mu \colon K_i(C_0(M)) \longrightarrow K_i(C^*(G))$ *también lo es.* ■

Un grupoide de Lie regular es <u>*clasificante*</u>, si sus fibras son contráctiles. En estas condiciones, el grupoide G es su propio clasificante BG.

En [2], teniendo en cuenta que todo grupoide es Morita-equivalente a otro cuya foliación inducida es de hojas de dimensión par, se obtiene el resultado siguiente:

Teorema 7.2.- *El grupoide de holonomía* $G \overset{\alpha}{\underset{\beta}{\Longrightarrow}} M$ *de una foliación casi sin holonomía, de tipo finito y clasificante, es K-orientado. Si* F *es la unión de las hojas cerradas, entonces* F *es un cerrado permitido y utilizando el teorema 7.1,* $\mu \colon K_i(C_0(M)) \longrightarrow K_i(C^*(G))$ *es un isomorfismo de grupos.* ■

Este teorema resuelve la conjetura de Baum-Connes para las foliaciones casi sin holonomía de tipo finito, ya que (ver [M]) toda foliación casi sin holonomía de tipo finito, es Morita-equivalente a una foliación casi sin holonomía de tipo finito y clasificante sobre una variedad no compacta.

BIBLIOGRAFIA

[CS] **A. Connes and G. Skandalis**, *The longitudinal index theorem for foliations*, Publ. R.I.M.S. Kyoto Univ. 20, 1139-1183, 1984.

[HM] **G. Hector et M. Macho Stadler**, *Isomorphisme de Thom et feuilletages presque sans holonomie*, enviado al Comptes Rendus Académie des Sciences, Paris.

[M] **M. Macho Stadler**, *Isomorphisme de Thom pour les feuilletages presque sans holonomie*, Thèse de Doctorat, Lyon 1996.