I Jornadas de Investigación de la Facultad de Ciencia y Tecnología

Teoría de Foliaciones*

Álvaro Lozano Rojo[1], Marta Macho Stadler[1], José Ignacio Royo Prieto[2],
Fernando Alcalde Cuesta[3], Pablo González Sequeiros[3], Martín Saralegi Aranguren[4] y Robert Wolak[5]

[1] Departamento de Matemáticas
[2] Departamento de Matemática Aplicada
Universidad del País Vasco / Euskal Herriko Unibertsitatea

[3] Departamento de Xeometría e Topoloxía
Universidade de Santiago de Compostela

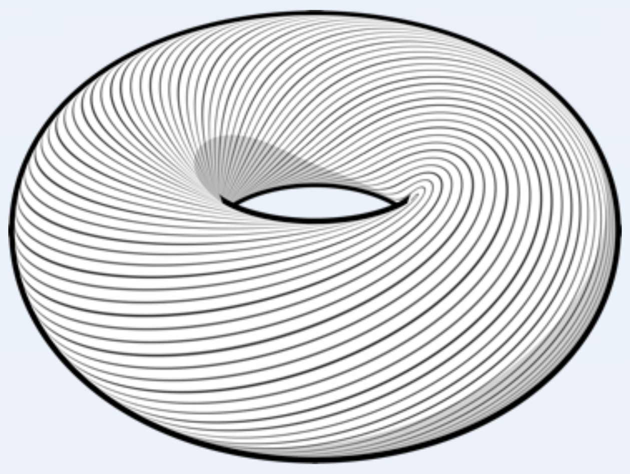
[4] Laboratoire de Mathématiques
Université d'Artois (Lens, Francia)

[5] Instytut Matematyki
Uniwersytet Jagiellonski (Cracovia, Polonia)

Nuestra investigación aborda el estudio dinámico, métrico y cohomológico de ***espacios foliados***, junto con el estudio analítico y K-teórico de los espacios no conmutativos asociados.

Las foliaciones aparecen de manera natural en varios contextos geométricos, por ejemplo, como soluciones de ecuaciones diferenciales y de sistemas integrables y en geometría simpléctica. De hecho, la noción de foliación surgió por primera vez de manera expresa en los trabajos de Ehresmann y Reeb, que estudiaban la existencia de campos de vectores completamente integrables sobre variedades de dimensión tres.

Una ***foliación (regular)*** es una partición de una variedad en subvariedades de la misma dimensión, las ***hojas***, dispuestas localmente como las hojas de un libro, aunque su topología y su disposición globales pueden ser muy complejas. La influencia de la topología de la variedad ambiente sobre la topología y la dinámica transversa de las hojas ha sido una de las cuestiones fundamentales de la teoría de foliaciones desde sus inicios.



Las rectas de una misma pendiente irracional fija inducen una foliación del toro $\mathbb{T}^2$ por rectas que se enrollan indefinidamente.

En la actualidad, la teoría de foliaciones es un campo multidisciplinar, no distinguible en esencia de la *teoría de sistemas dinámicos*, y que precisa de la aplicación de complejas y diversas técnicas geométricas, topológicas, analíticas y probabilísticas. La supresión de algunas de las restricciones impuestas a las *variedades foliadas clásicas*, ha llevado a los especialistas en el tema al desarrollo de nuevas líneas de investigación; en particular, nuestro grupo centra su trabajo en:

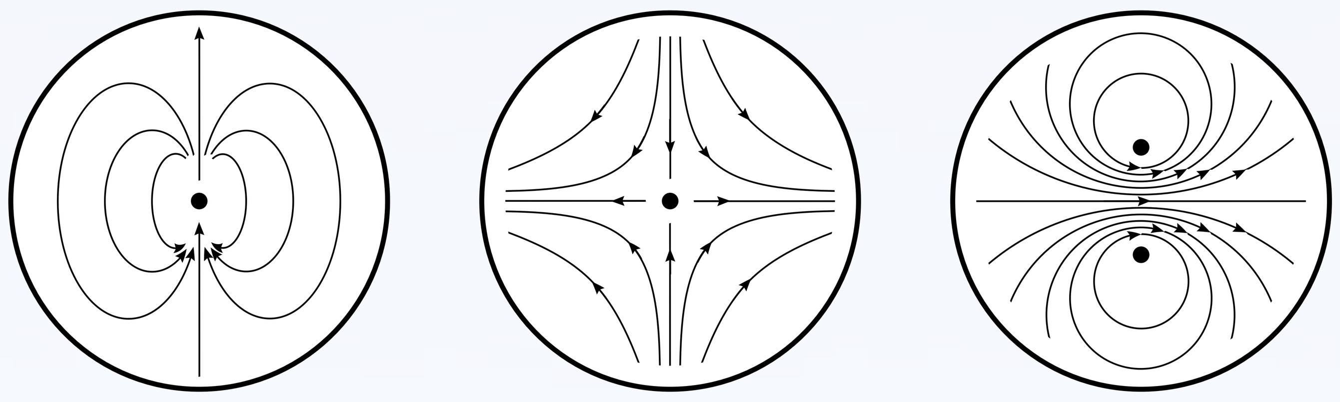
a) el estudio de ciertos tipos de ***foliaciones singulares*** (supresión de la condición de *regularidad)*;
b) el análisis de ciertas ***laminaciones*** (eliminación de la *diferenciabilidad transversa*) y de determinados *pseudogrupos* topológicos o medibles provistos de estructuras simpliciales (supresión de la *diferenciabilidad tangente*);
c) el examen de ***propiedades genéricas*** en sentido topológico o medible (eliminación de la hipótesis de *totalidad*);
d) el estudio analítico ***no conmutativo (a la Connes)*** de ciertos espacios foliados, (supresión de la *conmutatividad*).

La ***teoría de foliaciones*** está jugando y jugará un papel fundamental en el estudio cualitativo del mundo físico (cosmología y física del estado sólido) y biológico (biología molecular, genómica y evolución), e interviene cada vez más en otros campos de la ciencia.

1. Foliaciones Singulares

Como se ha comentado en la introducción, una foliación consiste en una partición de una variedad diferenciable en subvariedades de la misma dimensión llamadas hojas, las cuales se agrupan localmente de una "buena manera". Por ejemplo, las curvas integrales de un campo de vectores sin ceros sobre una variedad son las hojas de una foliación de dimensión uno sobre esa variedad.

Si permitimos que el campo tenga singularidades, es decir, ceros o puntos fijos, la partición inducida tendrá hojas de dimensiones 0 y 1, originando lo que llamamos una ***foliación singular***.



Campos de vectores en el plano con singularidades.

Una familia importante de foliaciones singulares la constituyen las inducidas por acciones no libres de grupos de Lie. Si el grupo es compacto (o si actúa por isometrías sobre una variedad compacta), la foliación singular inducida tiene unas buenas propiedades geométricas (estructura cónica alrededor de las singularidades) que podemos generalizar, dando origen a lo que se conoce como ***foliación riemanniana singular***, en la cual la distancia entre las hojas es localmente constante.

Por ejemplo, podemos considerar la esfera tridimensional $\mathbb{S}^3$ como el resultado de pegar dos toros rellenos por el borde. Cada uno de esos toros macizos puede ser foliado mediante toros que se van acumulando en el ánima común, y que es homeomorfa a un círculo $\mathbb{S}^1$. Pegando adecuadamente por el borde dos toros macizos foliados de esta manera obtenemos una foliación riemanniana singular de $\mathbb{S}^3$ donde hay hojas de dos dimensiones, todas ellas homeomorfas al toro $\mathbb{T}^2$ y dos hojas de dimensión 1, difeomorfas a $\mathbb{S}^1$.

La esfera tridimensional como pegado de dos toros.

La cohomología básica es un invariante algebraico que ha demostrado ser adecuado para el estudio de las propiedades transversas de las foliaciones riemannianas singulares. Para el caso de foliaciones riemannianas no singulares, las propiedades de la cohomología básica han atraído la atención de numerosos foliadores. Entre otros resultados, se ha probado que es de dimensión finita, que cumple la dualidad de Poincaré, la invarianza topológica y se ha podido caracterizar la minimalidad de la foliación (existencia de una métrica global que haga que las hojas sean subvariedades minimales) mediante la cohomología básica.

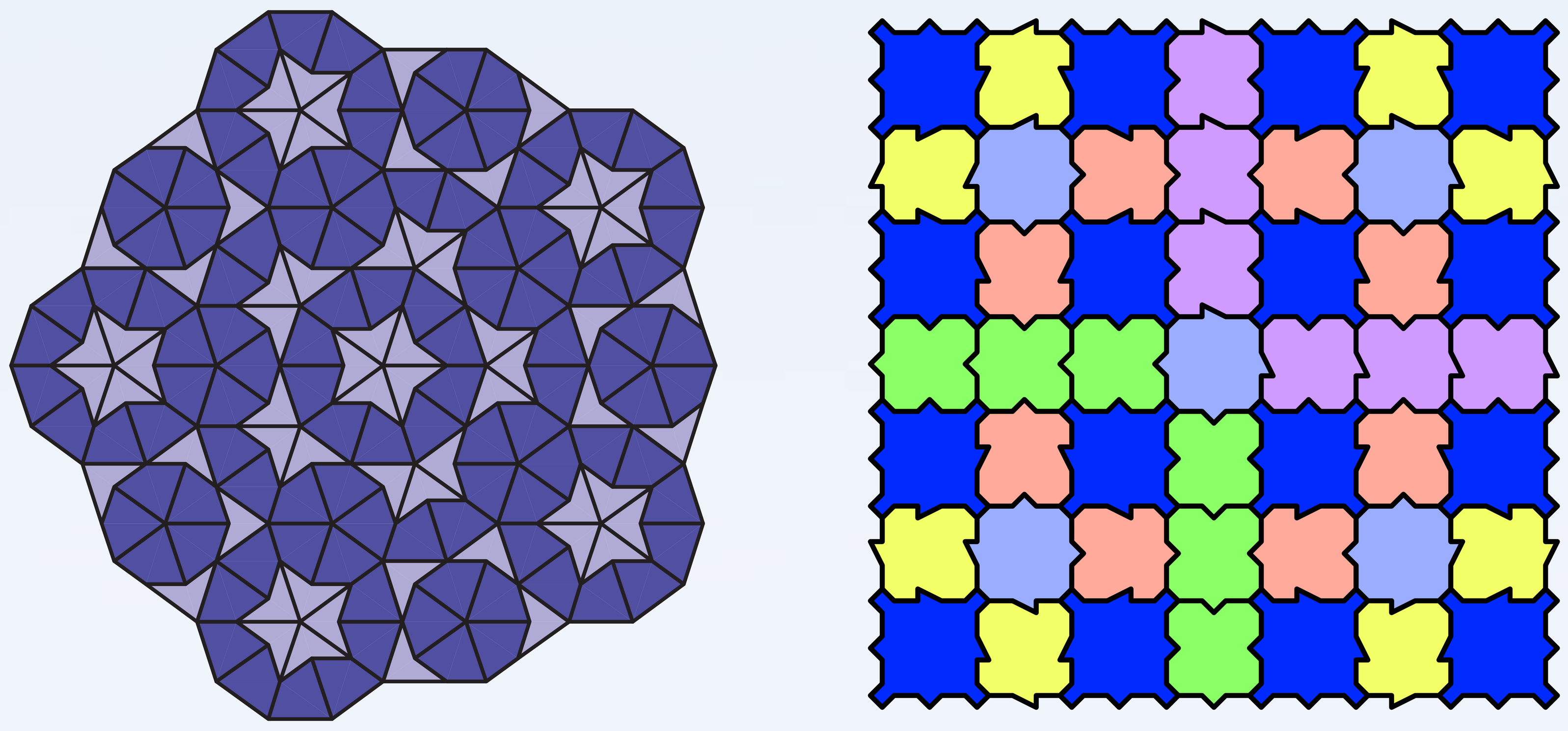
En nuestro trabajo, tratamos de conseguir en el caso singular estos resultados conocidos para foliaciones riemannianas regulares. Recientemente, hemos podido caracterizar la minimalidad de las foliaciones riemannianas singulares (estrato por estrato) mediante la cohomología básica [J.I. Royo Prieto, M. Saralegi, R. Wolak, *Tautness for riemannian foliations on non-compact manifolds*, Manuscripta Mathematica **16**, 2 (2008) 177-200]. También hemos podido obtener la propiedad de la dualidad de Poincaré para varios casos particulares de foliaciones riemannianas singulares, utilizando *cohomología de intersección*.

Nuestra herramienta principal es la explosión, una técnica de desingularización que nos permite trabajar en un entorno de los estratos singulares y aplicar los resultados conocidos en el caso regular.

2. Laminaciones

Los mosaicos y los grafos repetitivos proporcionan algunos ejemplos sorprendentes de ***laminaciones minimales***: éste es el tipo de laminaciones que centran nuestra investigación.

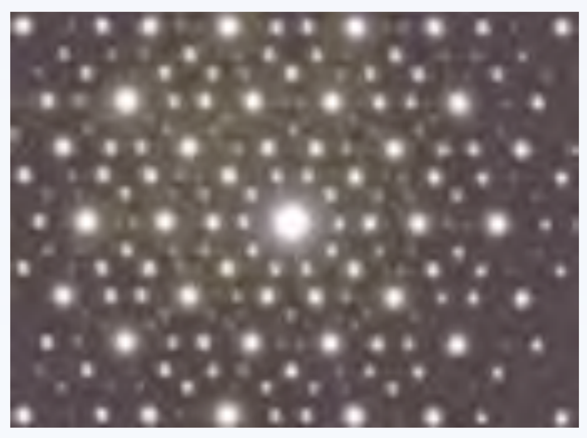
Un mosaico del plano es una descomposición en polígonos, las *teselas*, obtenidos por traslación a partir de un número finito de teselas modelo, las *prototeselas*. Dos mosaicos son cercanos si podemos hacerlos coincidir en una gran bola centrada en el origen mediante pequeñas traslaciones. La traslación del origen a cualquier otro punto del plano define una laminación cuyas hojas se identifican con los cocientes de los mosaicos por las traslaciones. La clausura de un mosaico *repetitivo* (cualquier motivo posee una copia por traslación contenida en cualquier bola de radio uniforme) es un cerrado saturado minimal, la *envoltura* del mosaico. Si el mosaico es *aperiódico* (no coincide con ningún trasladado), la laminación inducida tiene holonomía trivial.



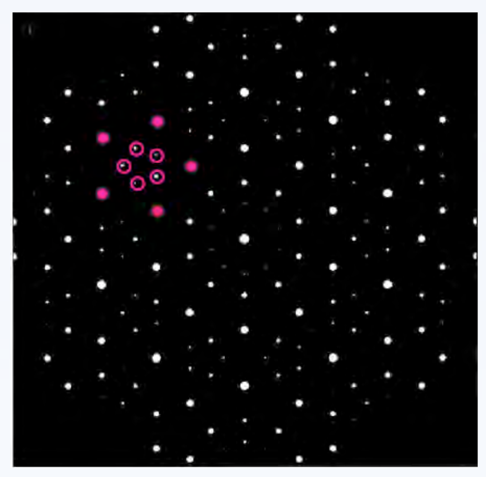
Motivos en los mosaicos de Penrose y Robinson respectivamente.

El interés por este tipo de mosaicos proviene de su aplicación en problemas computacionales. Además, existen aleaciones metálicas descubiertas en 1984 (los *casi-cristales*) que no son cristalinas, pero tiene gran orden estructural y cuyos patrones de difracción están modelados precisamente por mosaicos aperiódicos.

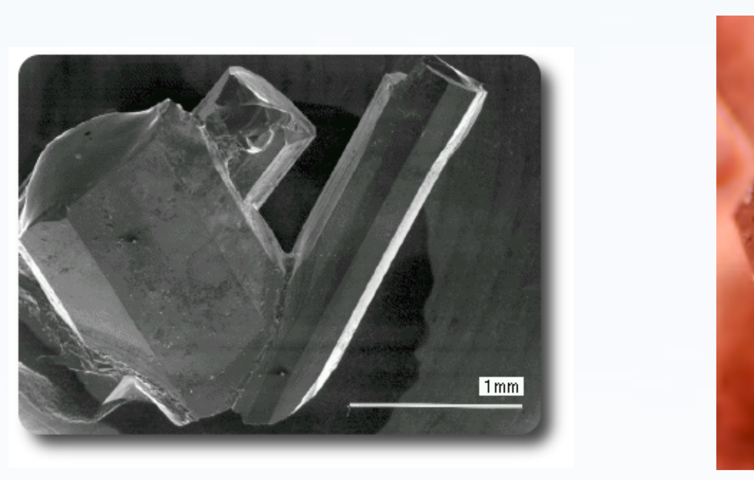
La elección de un punto en cada prototesela define un *conjunto de Delone* en cada mosaico. Aquéllos cuyo conjunto de Delone contiene al origen forman un subespacio, homeomorfo al conjunto de Cantor, que corta a todas las hojas de la laminación. La relación de equivalencia inducida contiene toda la información dinámica, pero además las reglas de contigüidad permiten realizar cada clase de equivalencia como conjunto de vértices de un grafo que conserva la información métrica. De hecho, en la búsqueda de modelos para los patrones de difracción de los sólidos casi-cristalinos no intervienen propiamente los mosaicos, sino estas *discretizaciones*. Este proceso [F. Alcalde Cuesta, A. Lozano Rojo y M. Macho Stadler, *Dynamique et géométrie non commutative de la lamination de Ghys-Kenyon*, aceptado para publicar] simplifica la visión y el estudio de las laminaciones definidas por mosaicos.



La estructura molecular interna de un casi-cristal, que produce un mosaico del plano con simetría pentagonal.



Patrón de difracción para casi-cristal: se muestran en blanco los puntos de mayor intensidad. Se encuentran marcados en rojo algunos pentágonos de este patrón.



Imágenes de aleaciones casi-cristalinas, Al_6Mn y HoMgZn respectivamente.

En 1984, el químico D. Shechtmann y sus colaboradores descubrieron una forma de crear una aleación de Aluminio con Manganeso, $\boldsymbol{Al_6Mn}$. Cuando lo examinaron con rayos X, su diagrama de difracción tenía una ordenación como la de un cristal pero no encontraron simetrías rotacionales de órdenes 3, 4 ó 6 (propias de los cristales), sino una pentagonal, lo que no es posible en los cristales (*teorema de restricciónesión cristalográfica*). ¿Había algún error? Los físicos D. Levine y P.J. Steinhardt mediante simulación en ordenador, modelaron el $\boldsymbol{Al_6Mn}$, le dieron el nombre de **casi-cristal** y la aleación respectiva se conoce como ***Shechtmanite***. Hoy existen un centenar de tales aleaciones, algunas con simetrías rotacionales de orden 8, 10 ó 12. Fuente: Levine, D. & Steinhardt, P.J. Quasicrystals: *A New Class of Ordered Structures*, Phys. Rev. Lett. 53, 1984.

Como los mosaicos sirven de modelo para los patrones de difracción de los sólidos casi-cristalinos, tiene sentido interesarse por la naturaleza del espectro de una partícula que se mueva en un sólido de ese tipo. En el caso de un mosaico repetitivo y aperiódico, esto conduce naturalmente al estudio de un espacio no conmutativo, ya que los observables pertenecen a una C*-álgebra asociada al mosaico, la C*-álgebra de la laminación inducida sobre su envoltura, que es establemente isomorfa a la C*-álgebra de la relación de equivalencia inducida sobre cualquier transversal canónica (determinada por un conjunto de Delone).

De manera similar a la descrita para mosaicos, los grafos repetitivos proporcionan una clase de ejemplos de laminaciones muy rica, cuyo estudio transverso topológico y medible es la base de las tesis doctorales de Álvaro Lozano Rojo (***Dinámica transversa de laminaciones definidas por grafos repetitivos***, que se defenderá el próximo 6 de junio de 2008) y de Pablo González Sequeiros (***Laminacións afables***, en fase de redacción).

* Investigación financiada por EHU 06/05, MTM2004-08214, MTM2007-66262