Teoría de Foliaciones


Fernando Alcalde Cuesta[4]

Pablo González Sequeiros[5]

Álvaro Lozano Rojo[3]

Marta Macho Stadler[1]

José Ignacio Royo Prieto[2]

Martín Saralegi Aranguren[6]

Robert Wolak[7]

Universidad del País Vasco / Euskal Herriko Unibertsitatea
[1] Departamento de Matemáticas
[2] Departamento de Matemática Aplicada

CUD Zaragoza
[3] Centro Universitario de la Defensa
Universidad de Zaragoza

USC
[4] Departamento de Xeometría e Topoloxía
[5] Departamento de Didáctica das Ciencias Experimetais
Universidade de Santiago de Compostela

Université d'Artois
[6] Laboratoire de Mathématiques
Université d'Artois (Lens, Francia)

[7] Instytut Matematyki
Uniwersytet Jagiellonski (Cracovia, Polonia)

Nuestra investigación aborda el estudio dinámico, métrico y cohomológico de ***espacios foliados***, junto con el estudio analítico y K-teórico de los espacios no conmutativos asociados.

Una ***foliación (regular)*** es una partición de una variedad en subvariedades de la misma dimensión, las ***hojas***, dispuestas localmente como las hojas de un libro, aunque su topología y su disposición globales pueden ser muy complejas. La influencia de la topología de la variedad ambiente sobre la topología y la dinámica transversa de las hojas ha sido una de las cuestiones fundamentales de la teoría de foliaciones desde sus inicios.

En la actualidad, la teoría de foliaciones es un campo multidisciplinar, no distinguible en esencia de la *teoría de sistemas dinámicos*, y que precisa de la aplicación de complejas y diversas técnicas geométricas, topológicas, analíticas y probabilísticas. La supresión de algunas de las restricciones impuestas a las *variedades foliadas clásicas*, ha llevado a los especialistas en el tema al desarrollo de nuevas líneas de investigación; en particular, nuestro grupo centra su trabajo en:

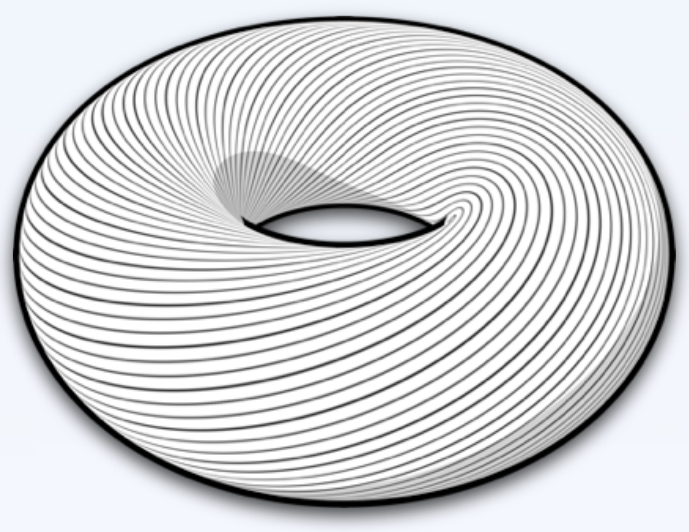
a) el estudio de ciertos tipos de ***foliaciones singulares*** (supresión de la condición de *regularidad)*;

b) el análisis de ciertas ***laminaciones*** (eliminación de la *diferenciabilidad transversa*) y de determinados *pseudogrupos* topológicos o medibles provistos de estructuras simpliciales (supresión de la *diferenciabilidad tangente*);

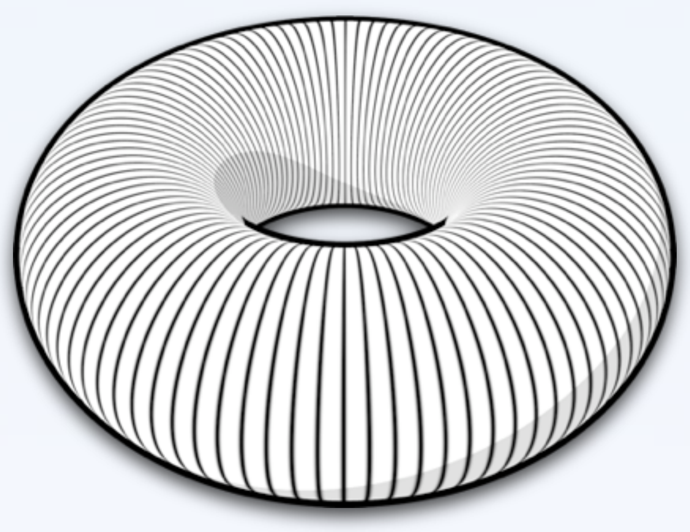
c) el examen de ***propiedades genéricas*** en sentido topológico o medible (eliminación de la hipótesis de *totalidad*);

d) el estudio analítico ***no conmutativo (a la Connes)*** de ciertos espacios foliados, (supresión de la *conmutatividad*).

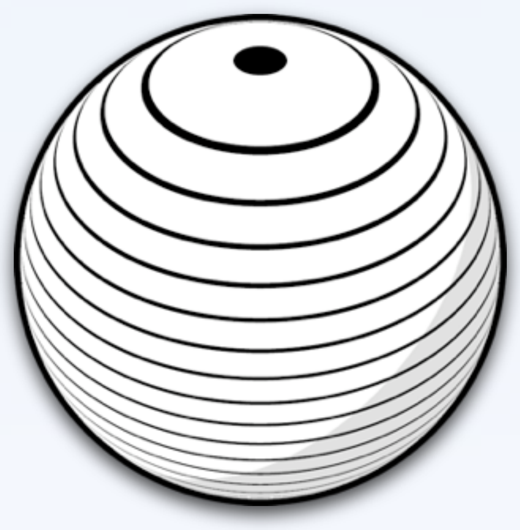
La ***teoría de foliaciones*** está jugando y jugará un papel fundamental en el estudio cualitativo del mundo físico (cosmología y física del estado sólido) y biológico (biología molecular, genómica y evolución), e interviene cada vez más en otros campos de la ciencia.



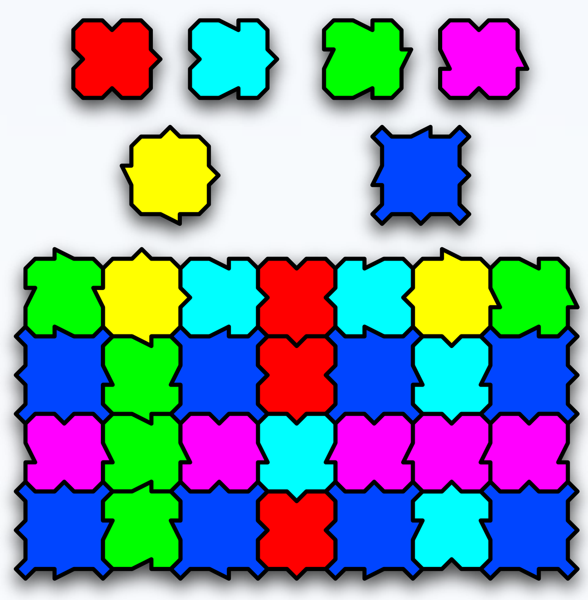
Las rectas de una misma pendiente irracional fija inducen una foliación del toro $\mathbb{T}^2$ por rectas que se enrollan indefinidamente.



Las rectas de pendiente racional fija inducen una foliación del toro por círculos. En ambos casos, la estructura transversa se reduce a una acción de $\mathbb{Z}$ generada por un homeomorfismo de $\mathbb{S}^1$. En general, las estructuras transversas pueden ser muy complicadas.

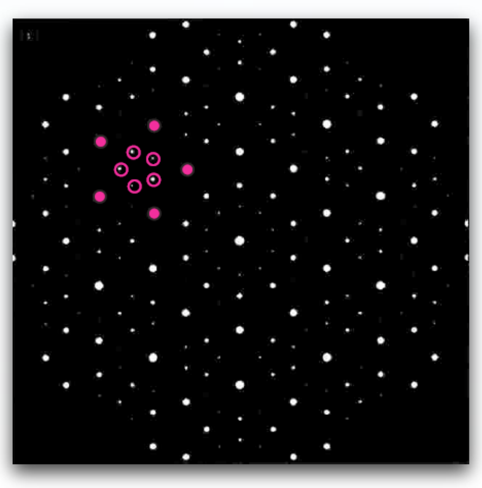


Las órbitas de la acción usual del círculo sobre la esfera por rotaciones induce una foliación singular donde las hojas genéricas son círculos y los dos polos son hojas singulares de dimensión cero.

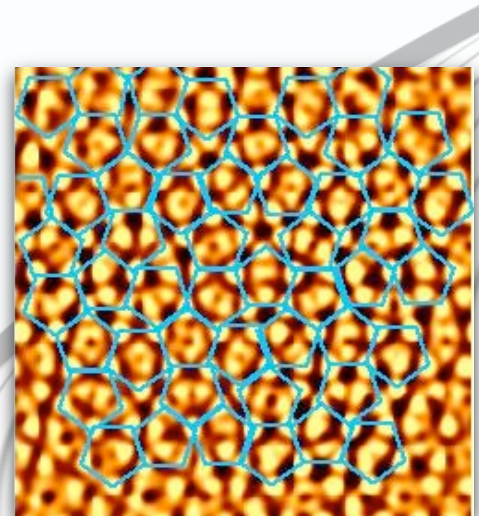


Motivos en los mosaicos aperiódicos y repetitivos de Penrose y Robinson respectivamente. Los mosaicos de este tipo proporcionan algunos ejemplos de *laminaciones*, que centran nuestra investigación.

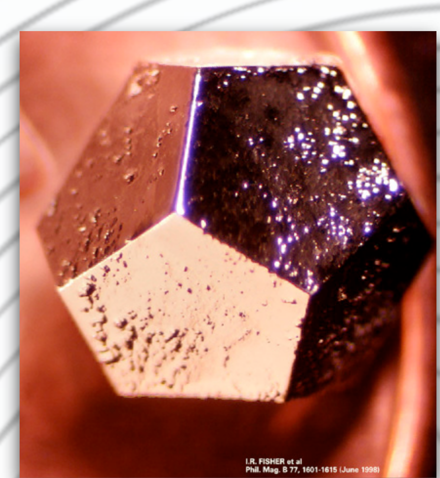
El premio Nobel de Química 2011 ha sido otorgado a D. Shechtman por su descubrimiento de los casi-cristales en 1982. Se trata de aleaciones metálicas que no son cristalinas, pero tiene gran orden estructural y cuyos patrones de difracción están modelados por mosaicos aperiódicos.



Patrón de difracción de un casi-cristal: en blanco los puntos de mayor intensidad. Se han marcados en rojo algunos pentágonos de este patrón.



Estructura molecular interna de un casi-cristal, que produce un mosaico del plano con simetría pentagonal. El mosaico de Penrose se ha superpuesto en azul.



La aleación casi-cristalina HoMgZn. Es interesante observar la simetría pentagonal de las caras.

Publicaciones destacadas

1. F. Alcalde Cuesta, P. González Sequeiros y Á. Lozano Rojo, *Affability of Euclidean tilings*. C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I **347** (2009) 947–952.
2. F. Alcalde Cuesta, Á. Lozano Rojo y M. Macho Stadler. *Dynamique transverse de la lamination de Ghys-Kenyon*. Astérisque **323** (2009) 1–16.
3. F. Alcalde Cuesta, Á. Lozano Rojo y M. Macho Stadler, *Transversely Cantor laminations as inverse limits*. Proceedings of the AMS **139** 7 (2011) 2615–2630.
4. Á. Lozano Rojo, *An example of non-uniquely ergodic lamination*. Ergod. Th. & Dynam. Sys. **31** 2 (2011) 449–457.
5. J. I. Royo Prieto, M. Saralegi y R.Wolak, *Tautness for riemannian foliations on non-compact manifolds*, Manuscripta Math. **126** (2008) 177–200.
6. J. I. Royo Prieto, M. Saralegi y R.Wolak, *Cohomological tautness for Riemannian foliations*, Russian Journal of Mathematical Physics, **16** 3 (2009) 450–466.

Investigación financiada por EHU09/04 y MTM2010-15471