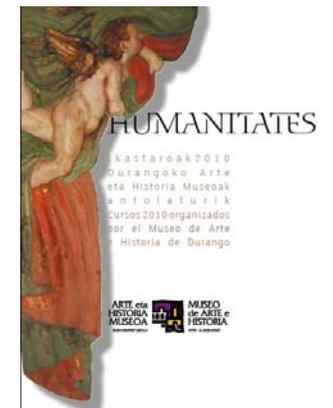
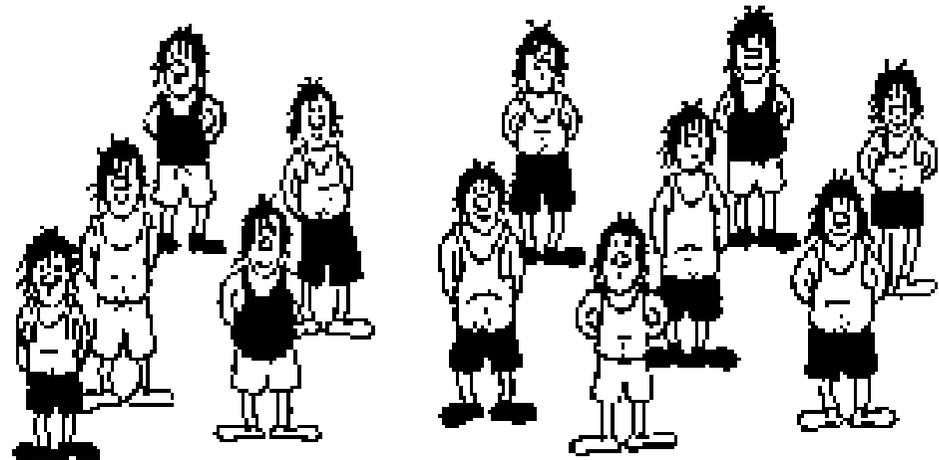


Paradojas lógicas y visuales I

Marta Macho Stadler, UPV/EHU



Durango, 26 de abril de 2010

Las *paradojas* han tenido un papel crucial en la historia intelectual, a menudo presentando los desarrollos revolucionarios de las ciencias, de las matemáticas y de la lógica.

Cada vez que, en cualquier disciplina, aparece un problema que no puede resolverse en el interior del cuadro conceptual susceptible de aplicarse, experimentamos un choque, choque que puede constreñirnos a rechazar la antigua estructura inadecuada y a adoptar una nueva.

Es a este proceso de mutación intelectual al que se le debe el nacimiento de la mayor parte de las ideas matemáticas y científicas.

Escapar a la paradoja

1967

**Anatol Rapoport
(1911-2007)**





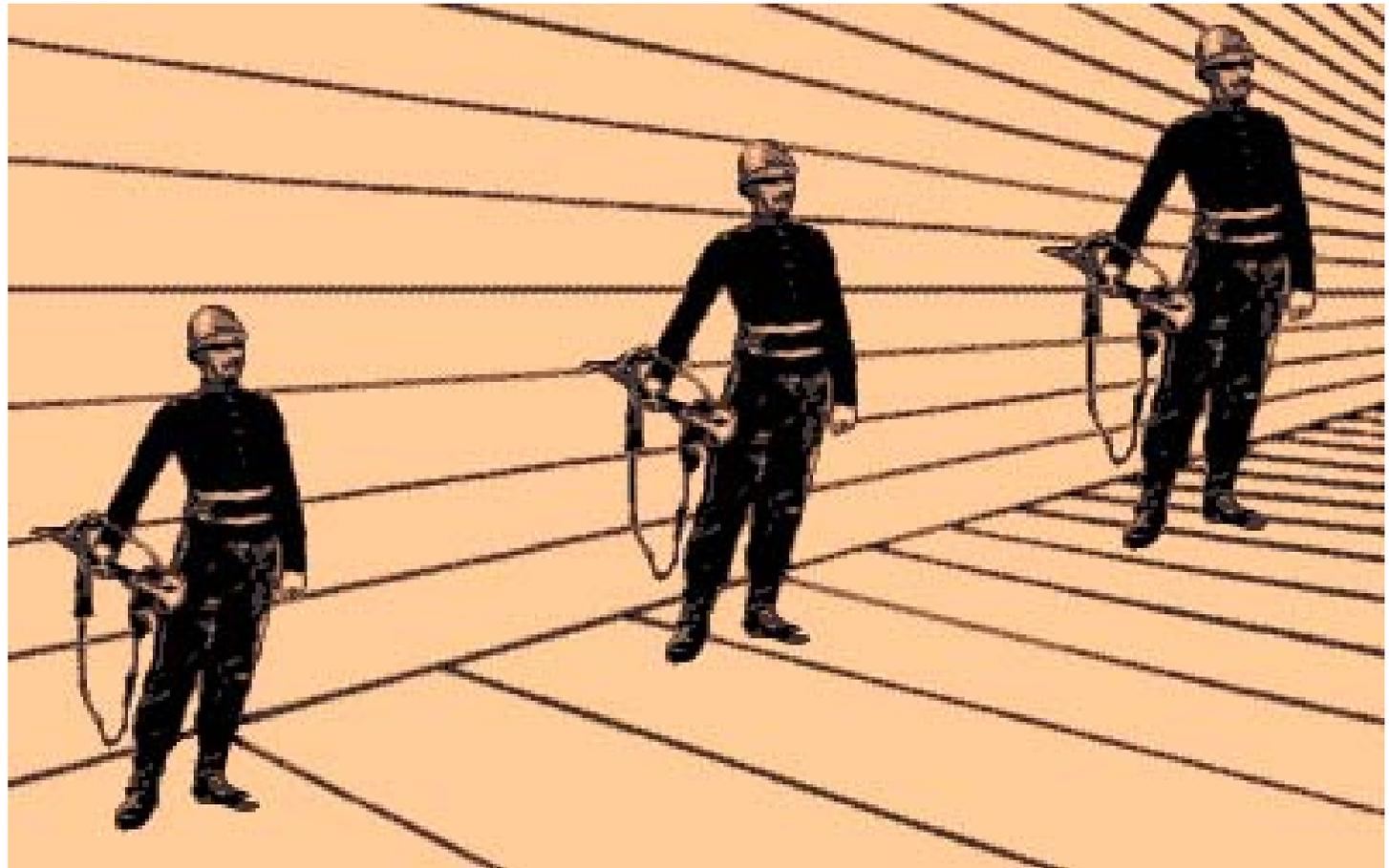
**Las paradojas
aparecen a diario,
aunque no nos demos
cuenta...**

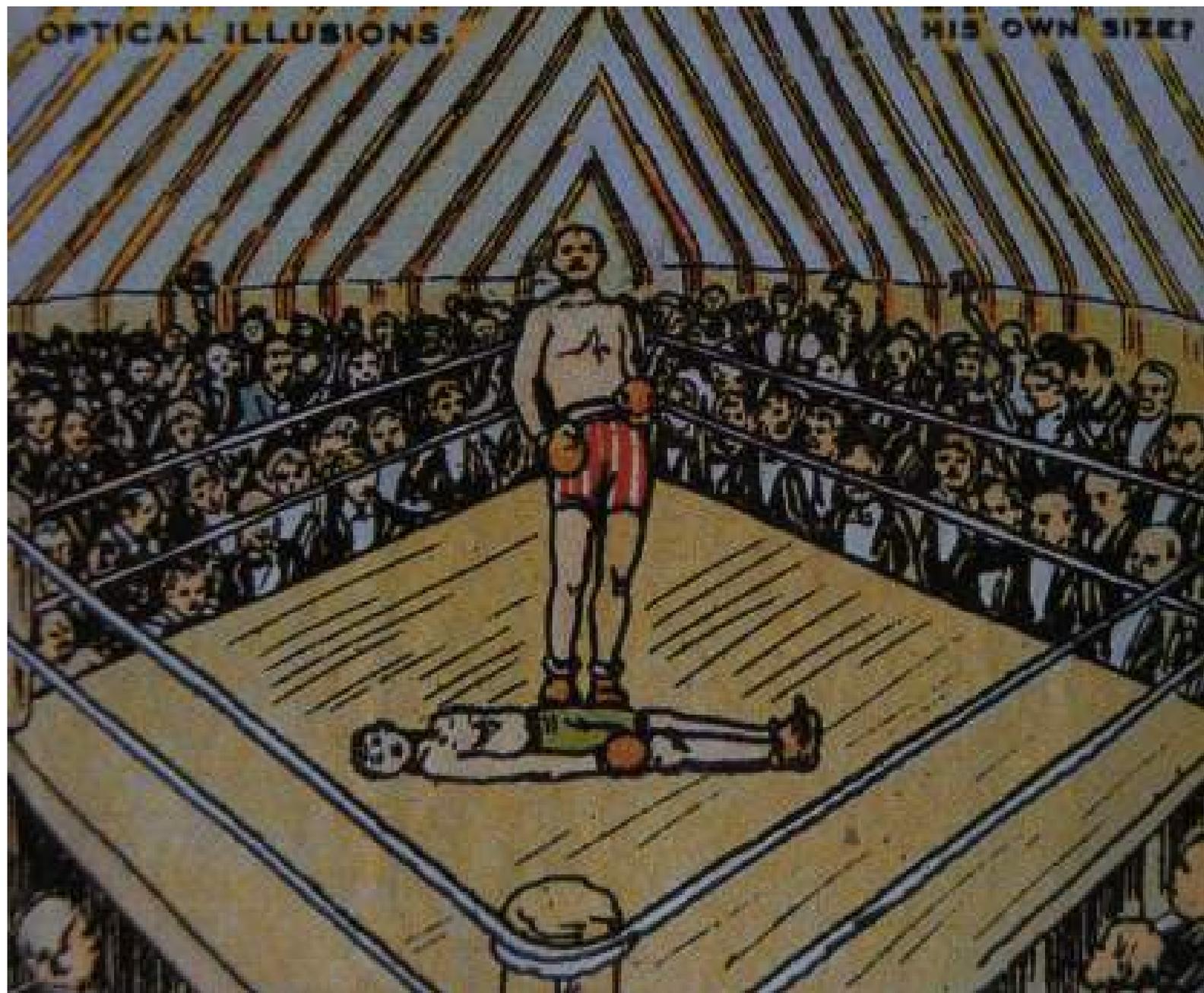


Paradojas de la perspectiva

Paradoja
de la
perspectiva
ascendente

*¿Son los
soldados
del
mismo
tamaño?*





¿Cuál de los boxeadores es más alto?

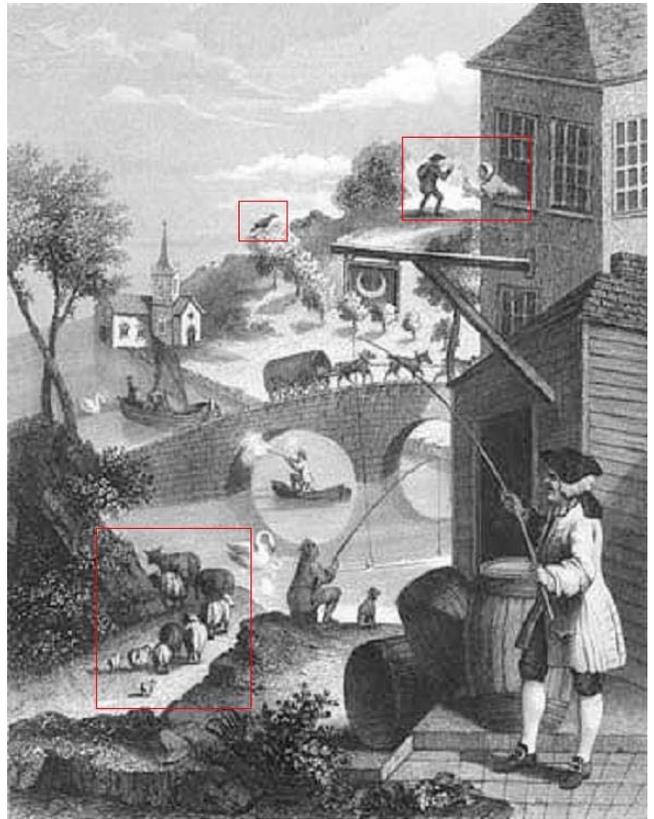


**William Hogarth
(1697-1764)**

***The Magpie on
the Gallows***

1754

**Contiene más
de 20 errores de
perspectiva**



El hotel infinito

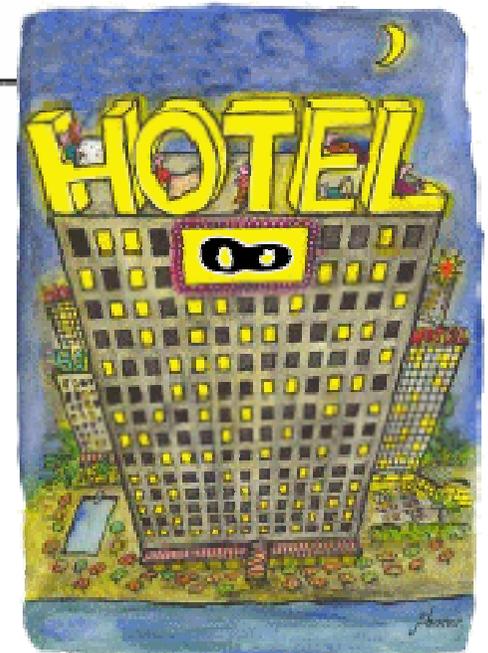
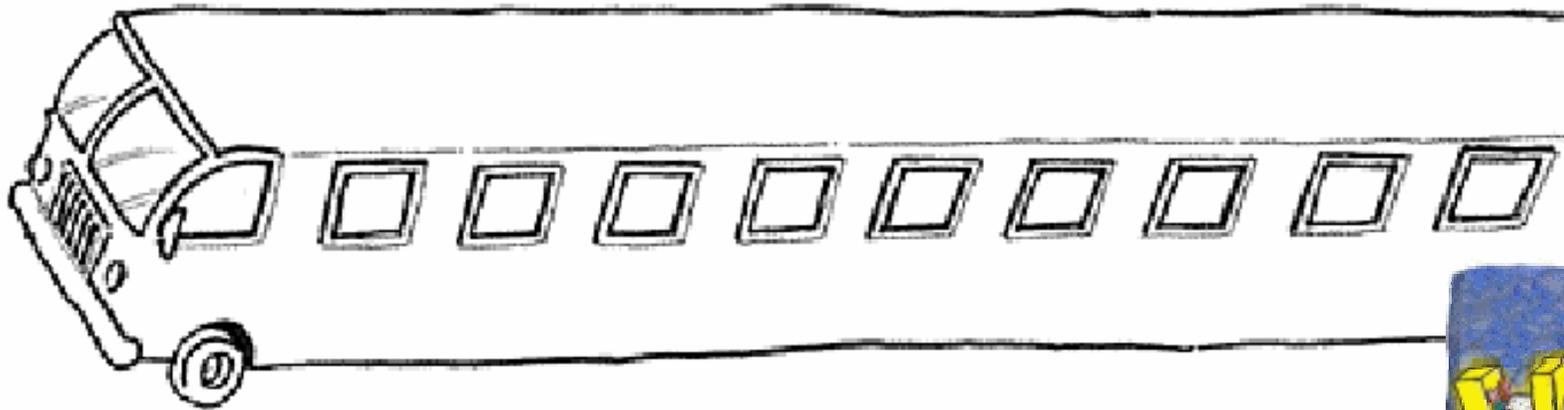
Érase una vez un hotel con infinitas habitaciones (numeradas), con el lema: *“Se garantiza el alojamiento de cualquier nuevo huésped”*.

Primera paradoja: llega un hombre al hotel que se encuentra lleno, ... el recepcionista, fiel al lema del *Hotel Infinito* avisa por megafonía a todos sus clientes, para que se cambien de su habitación n a la habitación $n+1$, con lo que la habitación número 1 queda libre para el nuevo huésped...

Duda: ¿Qué pasa con el huésped que se encontraba en la última habitación?

... No existe la “última habitación”

Segunda paradoja: llega al *Hotel Infinito* (que está lleno) una excursión con infinitos pensionistas (numerados)... el recepcionista solicita por megafonía a todos sus clientes que se cambien de su habitación número n a la habitación $2n$. De esa forma todos los huéspedes se mudan a una habitación par, y todas las habitaciones impares quedan libres...



Tercera paradoja: infinitas excursiones de infinitos pensionistas llegan al *Hotel Infinito* (que está lleno)...

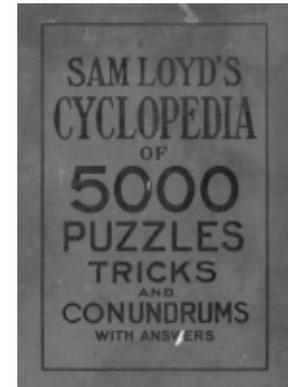
El recepcionista, “todo un profesional”, ni se inmuta... y envía un e-mail a las habitaciones con *número primo impar* p o alguna potencia de un número primo impar p^n , solicitándoles que eleven el número 2 al número de la habitación h que ocupan y se cambien a la habitación 2^h . Han quedado libres las habitaciones que son potencia de un número primo impar.

Una vez vaciadas estas habitaciones, el recepcionista asigna a cada una de las excursiones un número primo impar p y a cada uno de los pensionistas de cada una de las excursiones un número impar n ... así, la habitación de cada uno de los turistas se calcula tomando el número primo de su excursión p y elevándolo al número impar a él asignado n , lo que da el número p^n (diferente de q^m si p y q son distintos).

Existiendo una *cantidad infinita de números primos* y una *cantidad infinita de números impares*, el hospedaje es posible...

Desapariciones geométricas

Rompecabezas *Abandone la Tierra*, 1914 Sam Loyd (1841-1911)



Just to show the style best calculated to sell in the stores or by street hawkers as a novelty, occasion is taken to illustrate the famous "Get Off the Earth" puzzle, of which over ten millions were sold to the public. The puzzle was printed in bright colors upon two movable pieces (which cannot be shown here). You first see thirteen men, and then only twelve, and the puzzle is to tell which man disappeared.

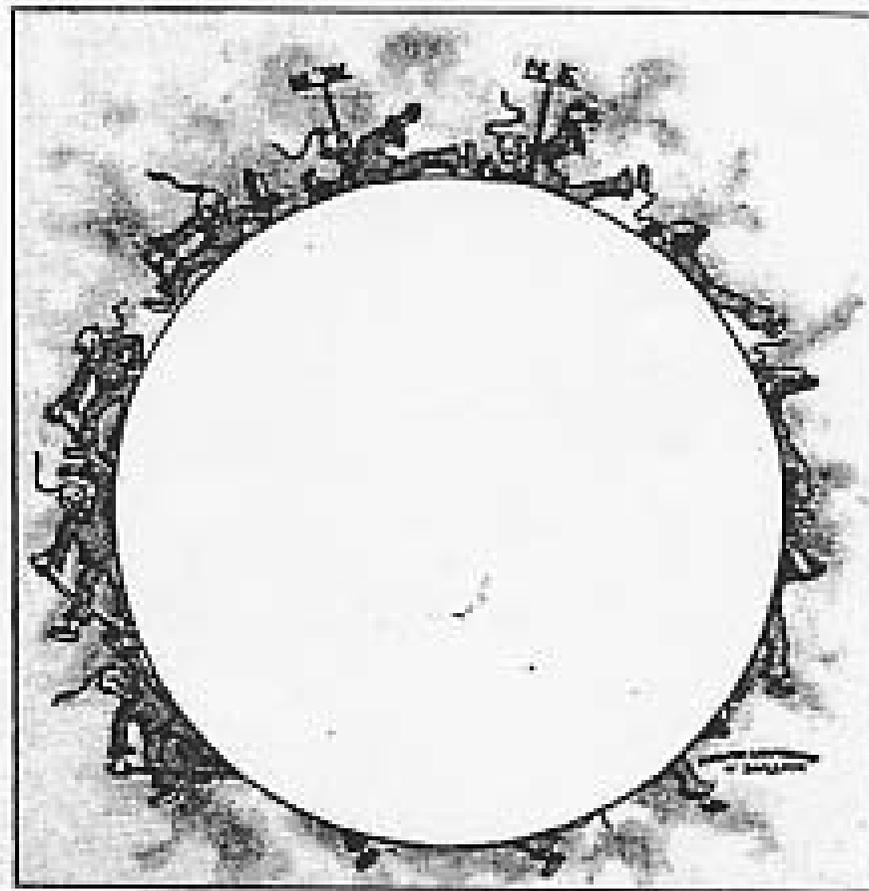
Out of many hundreds of thousands of attempted answers, the most idiotic of which recently appeared in the LONDON STRAND MAGAZINE, not one explained the mystery, for which reason Mr. Loyd has issued a new puzzle called TEDDY AND THE LIONS, which fully refutes all so-called explanations.

\$1,000 worth of prizes being offered for the best answers received during the year 1909.

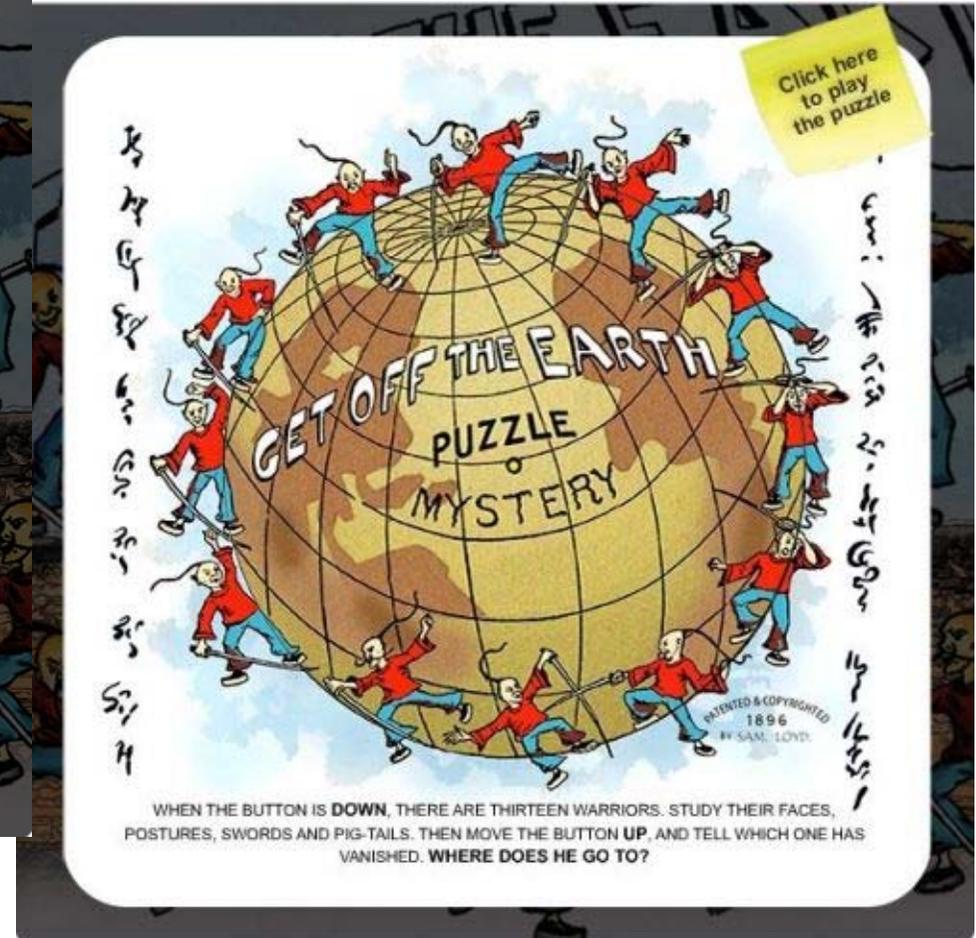
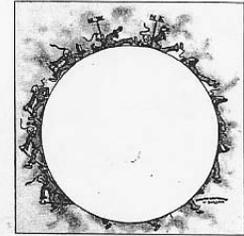


Rompecabezas “Abandone la Tierra”, Sam Loyd

<http://www.mathpuzzle.com/loyd/>



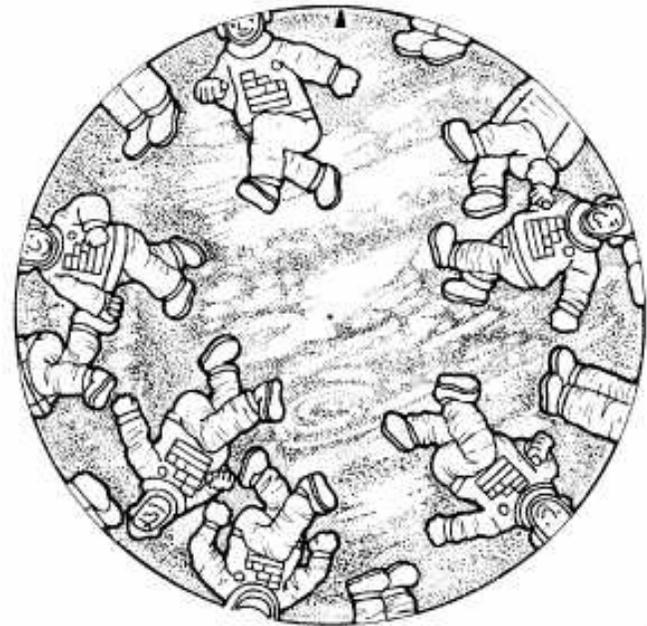
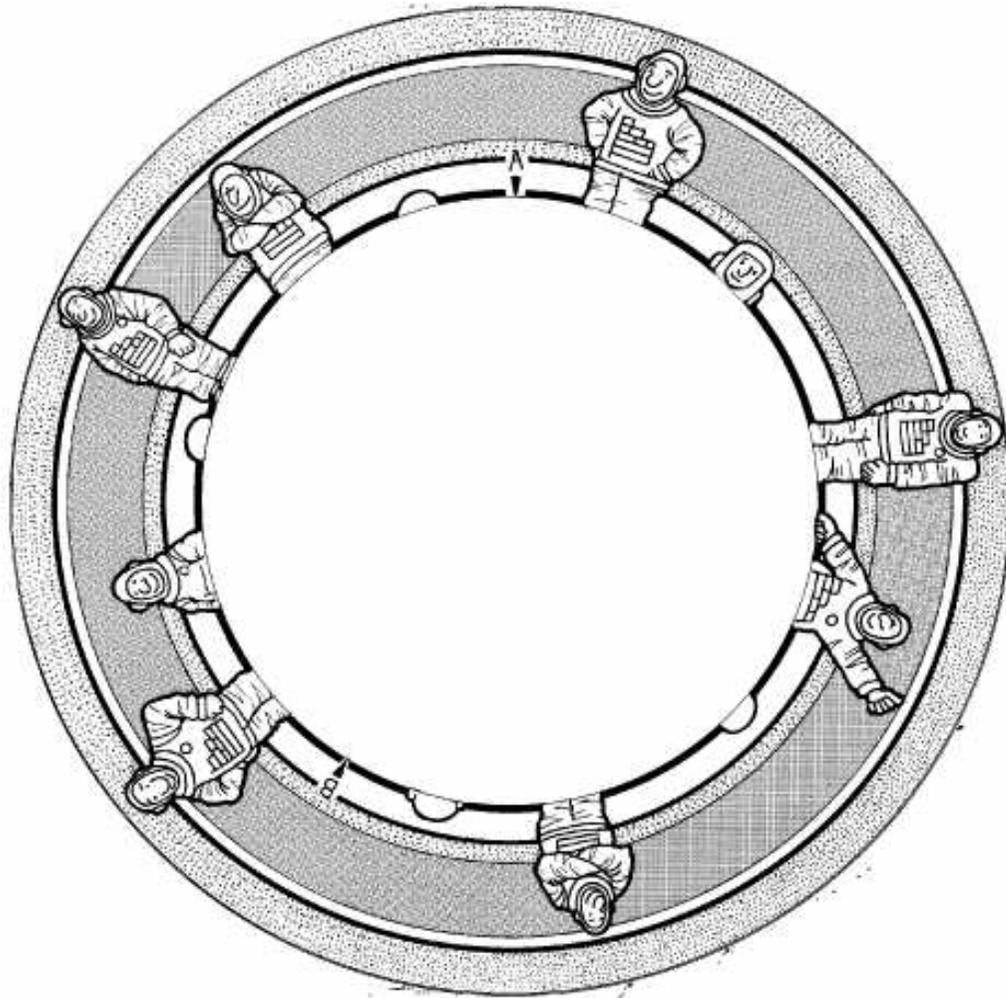
<http://www.samuelloyd.com/gote/index.html>



13 guerreros al norte... y 12 guerreros al noroeste

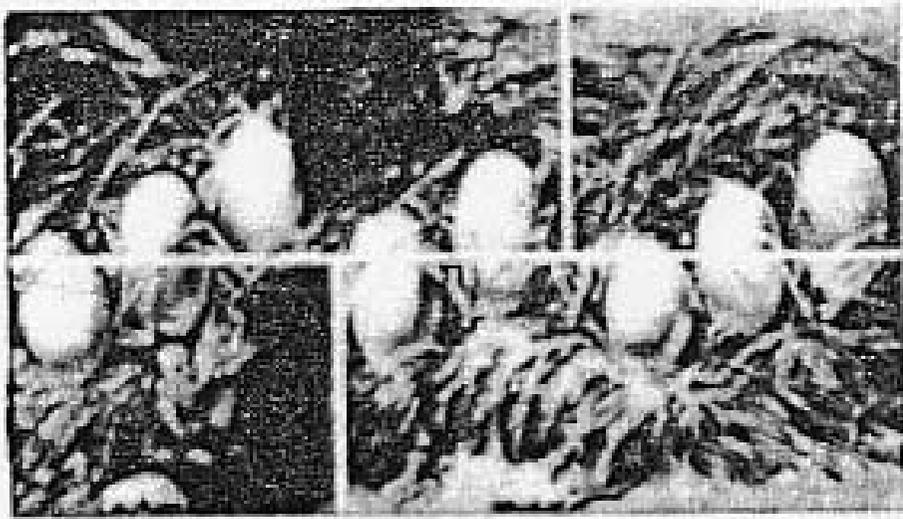
<http://www.aimsedu.org/Puzzle/LostInSpace/space.html>

LOST IN SPACE

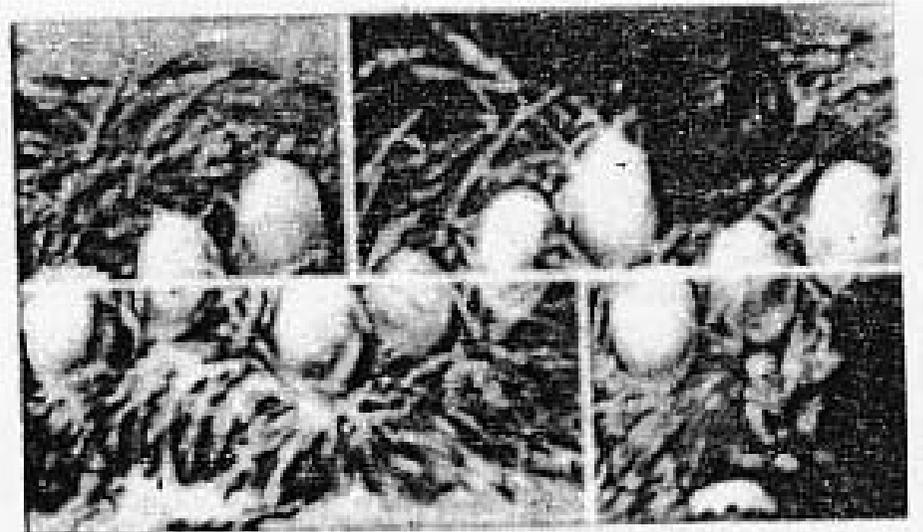


En posición A, **15** astronautas rodean el planeta ... cuando se rota el disco de modo que la flecha apunte a B, quedan sólo **14** astronautas ...

La paradoja del ***huevo desapareciendo***: los cuatro trozos que pueden redistribuirse para obtener **seis, siete, ocho, diez, once o doce** huevos.

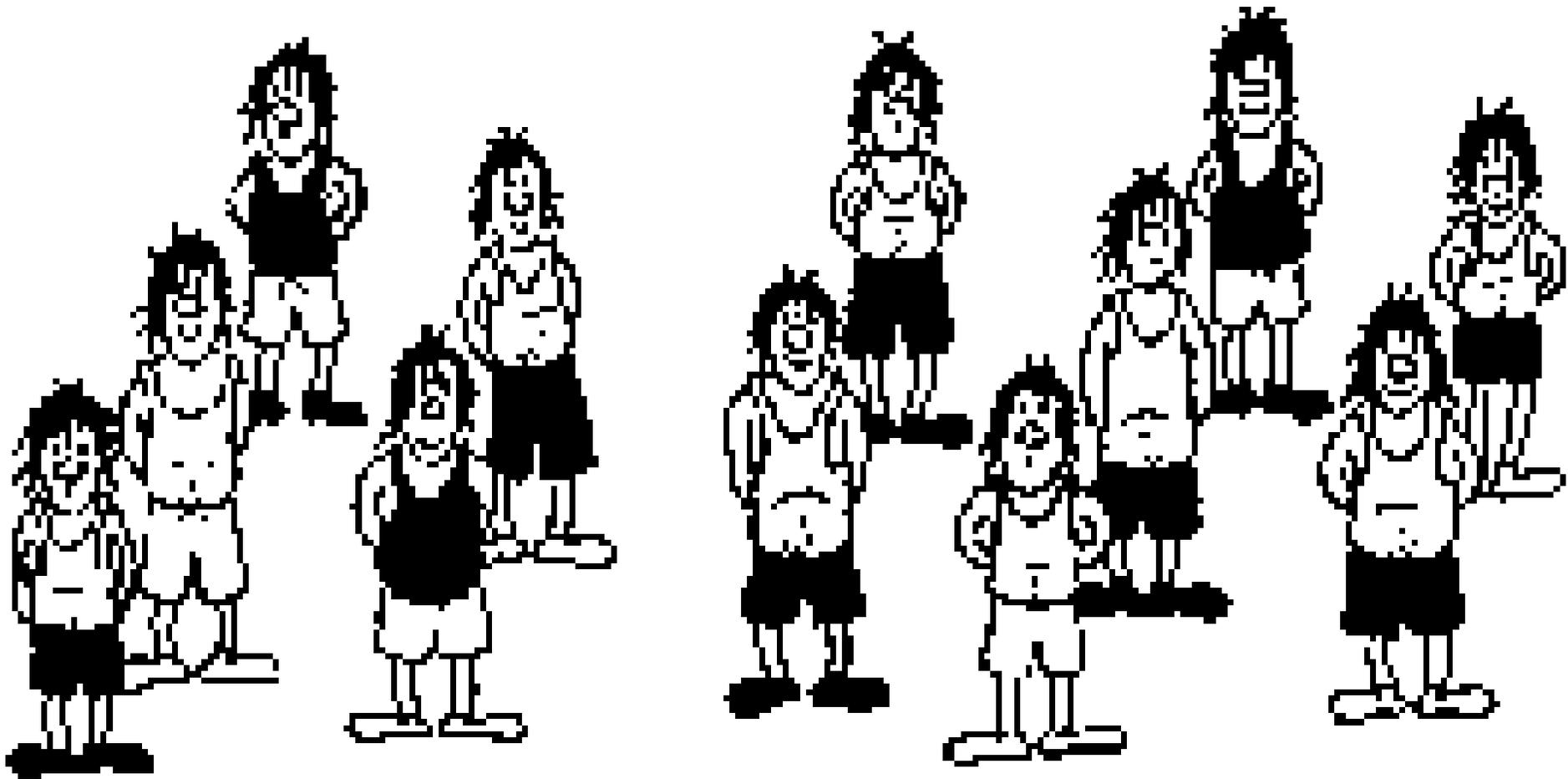


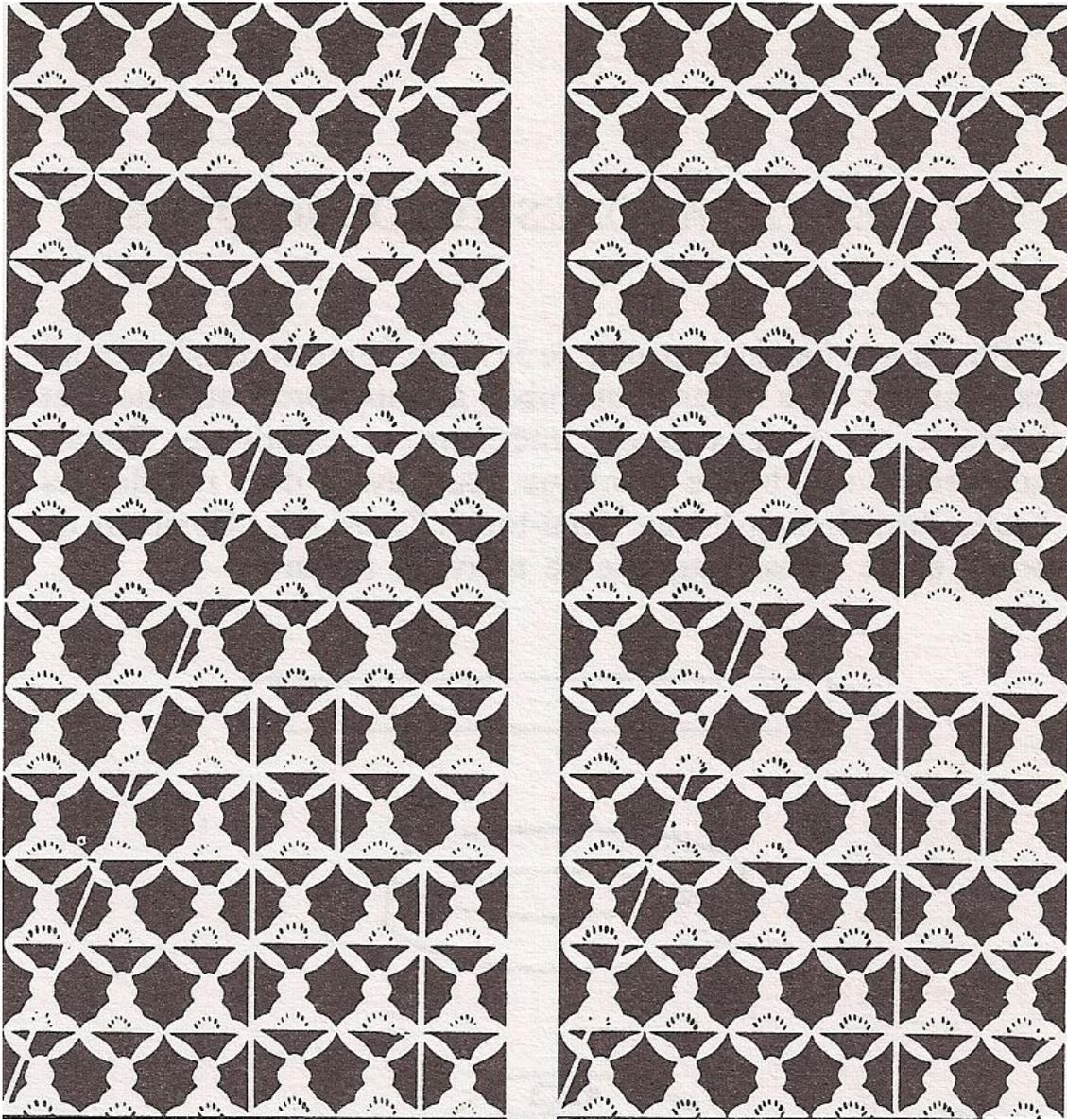
8 huevos



10 huevos

¿Son **12** deportistas...? ¿O serán **13**?





Paradoja de Curry

El primer rectángulo
tiene $6 \times 13 = 78$
conejos.

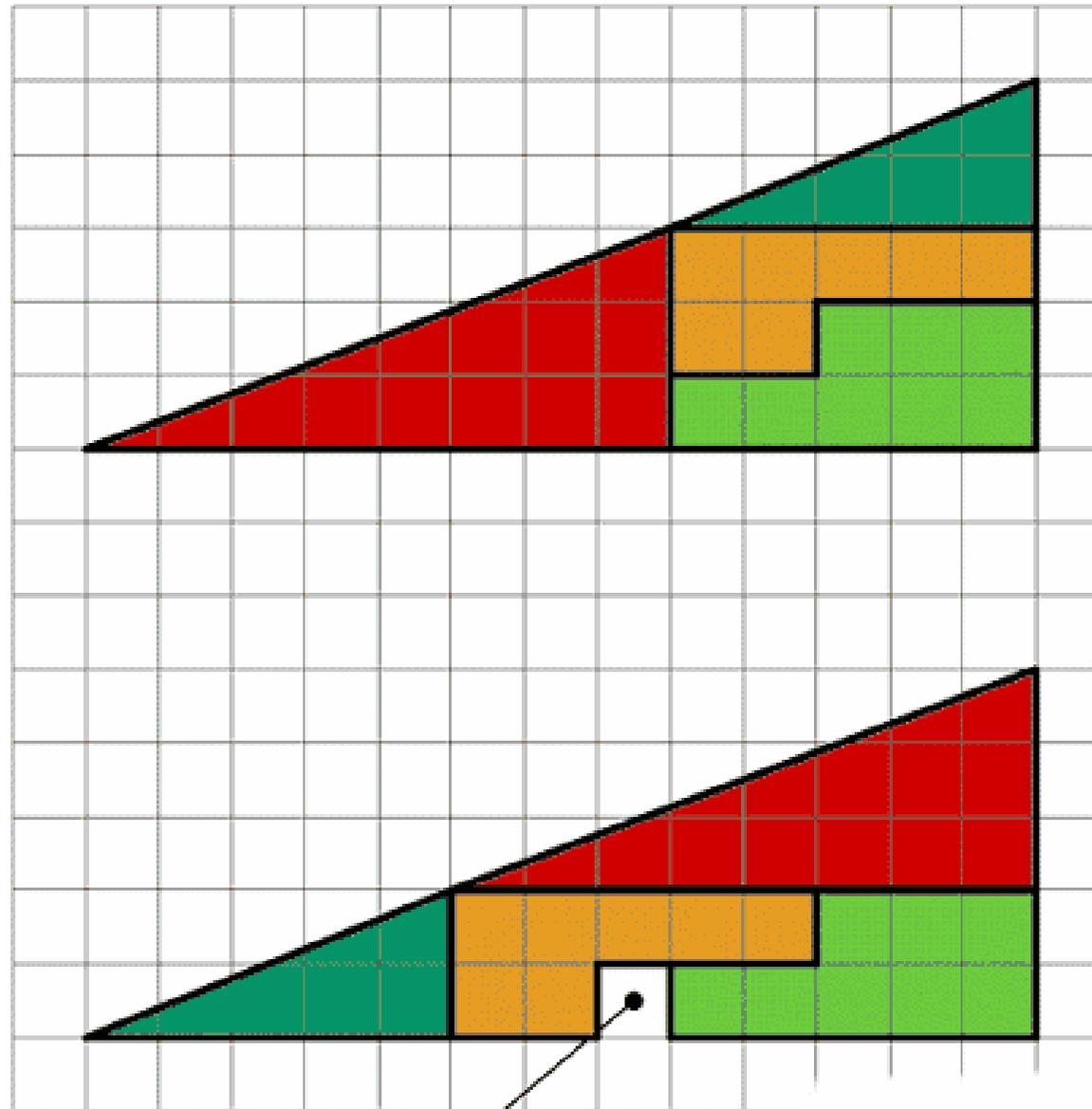
Tras cortar y
recolocar
quedan ¡77 conejos!

¿Dónde ha quedado
el conejo que falta?



Una paradoja de Hooper

La aparente
pérdida de
superficie es
debida al
reajuste de
los trozos.

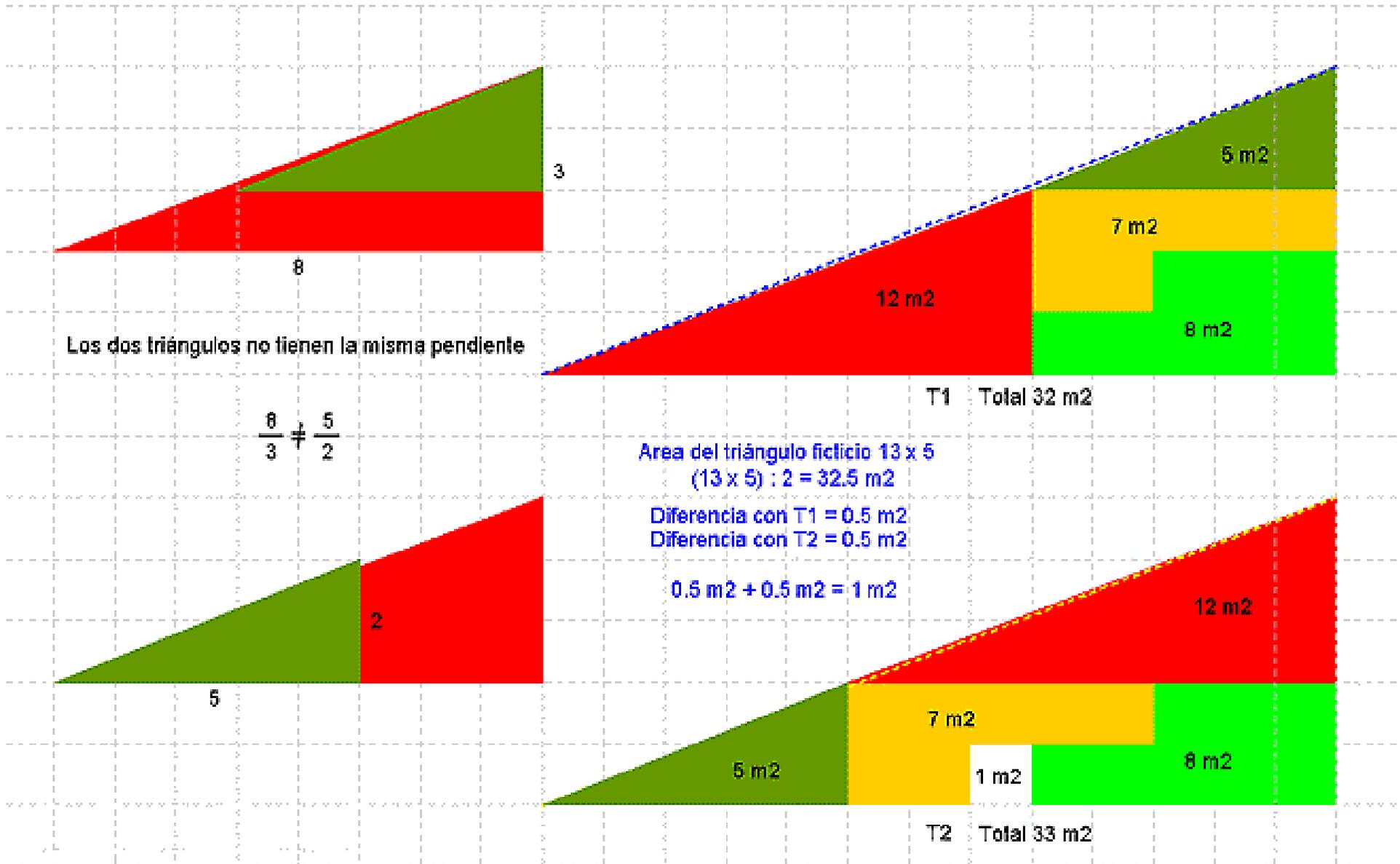


*Movemos
las cuatro piezas*

*Las piezas son
exactamente
iguales que las
empleadas arriba*

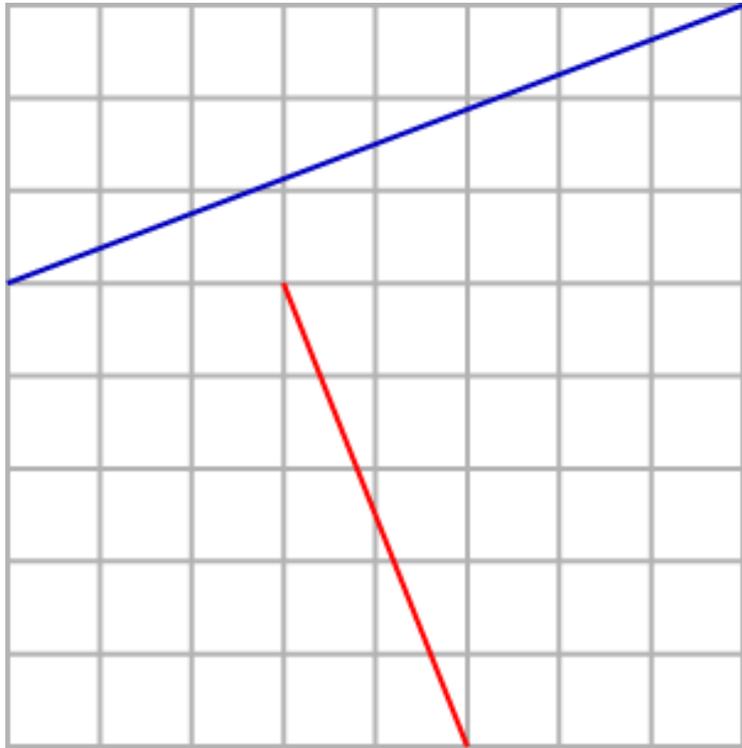
¿De dónde sale este "agujero"?

EL TRUCO ESTA EN EL BORDE NEGRO QUE OCULTA QUE LOS DOS TRIANGULOS NO SON PROPORCIONALES
 LOS DOS TRIANGULOS NO TIENEN LA MISMA PENDIENTE



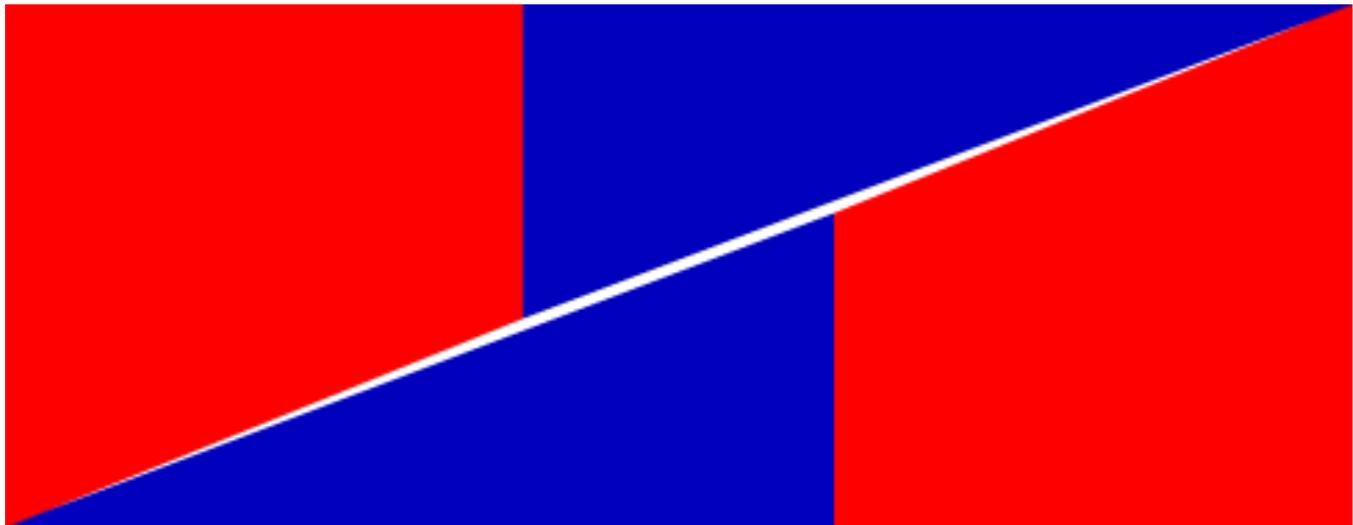
Demostración: $64=65$

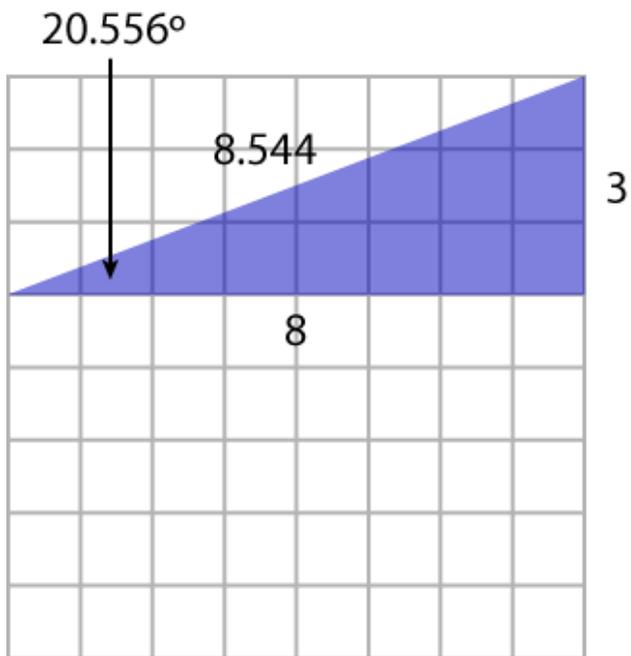
$$64 = 65 ?$$



Los segmentos azules generan dos triángulos y los rojos dos trapezoides, se reajustan...

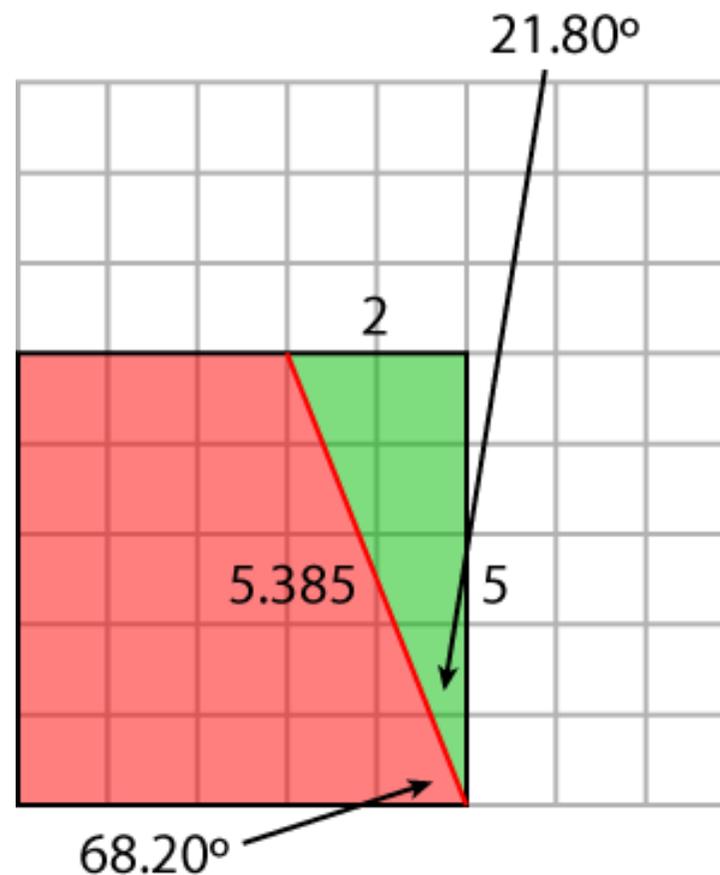
¿Ves la parte blanca? Es un paralelogramo con área 1.

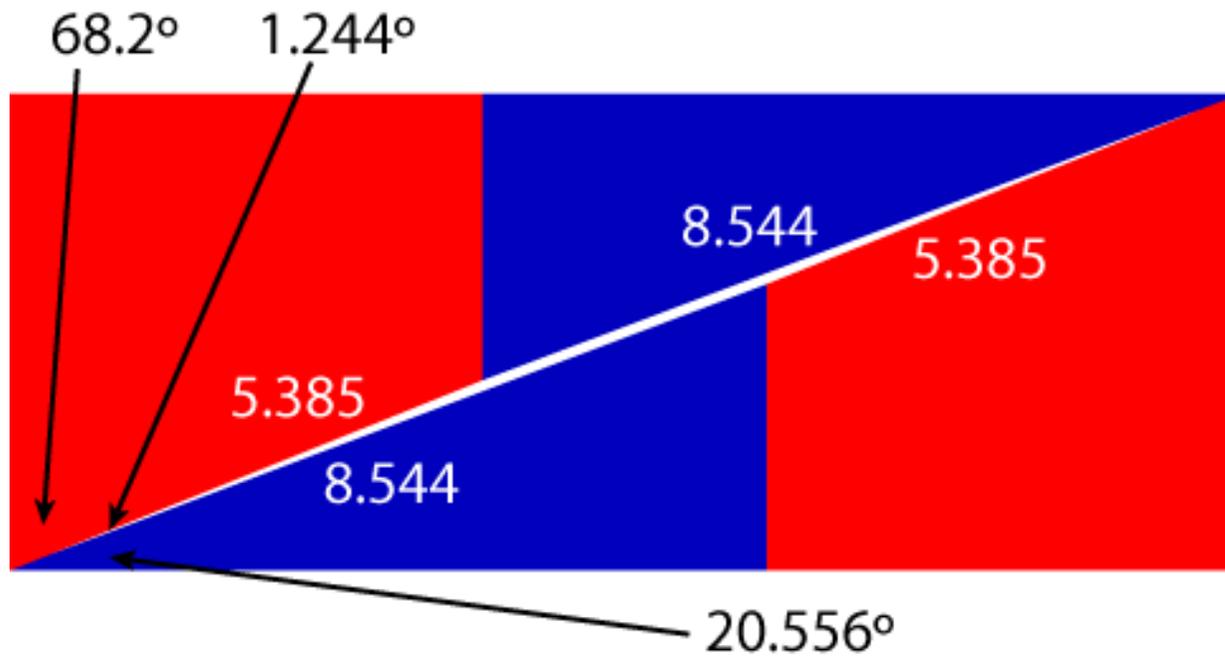




$3^2 + 8^2 = h^2$, así la hipotenusa es la raíz cuadrada de 73 y el ángulo menor 20.556°

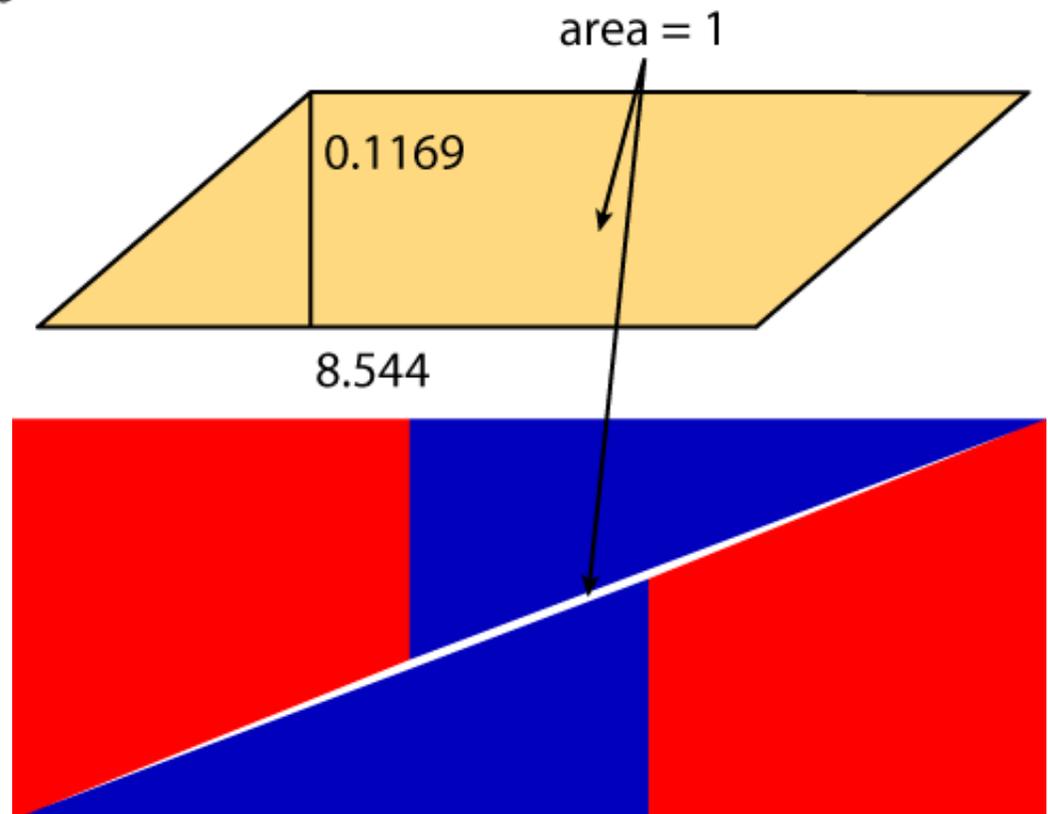
$2^2 + 5^2 = h^2$, así la hipotenusa es la raíz cuadrada de 29 y el ángulo menor es de 21.80° .
 El triángulo verde es el que se inserta en el cuadrado 5×5 para pegarse al trapecoide rojo, cuyo ángulo menor debería ser entonces de $90^\circ - 21.80^\circ = 68.20^\circ$.

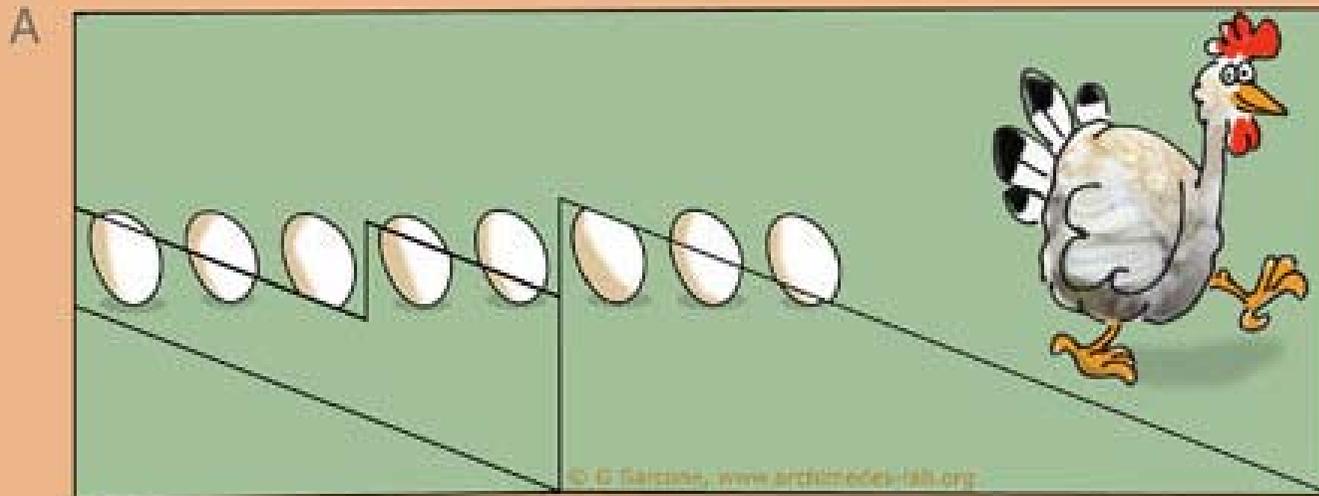




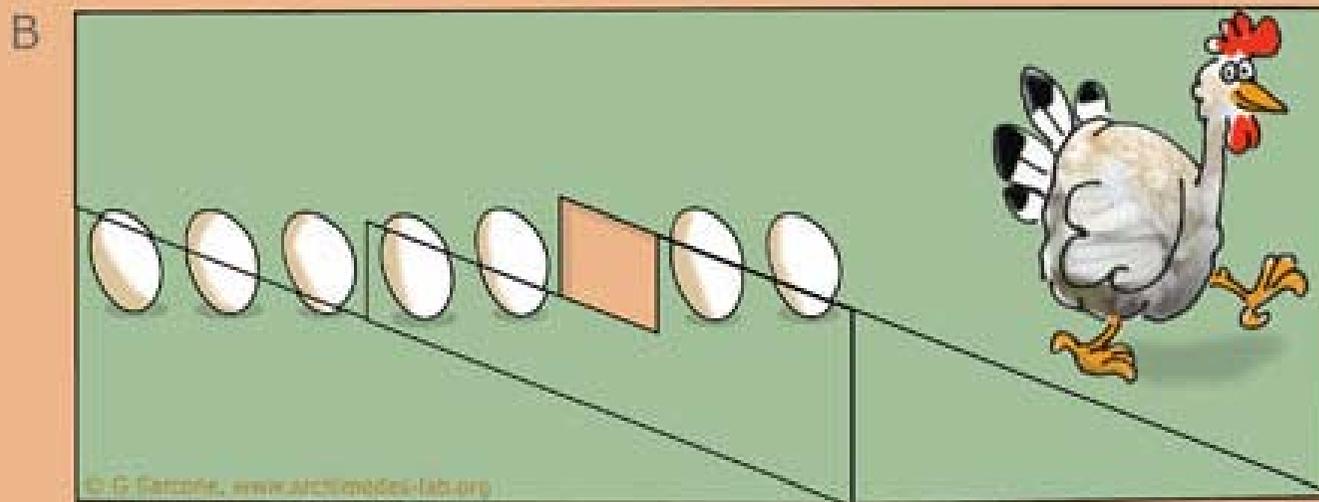
El ángulo agudo del paralelogramo blanco es
 $90^\circ - 68.2^\circ - 20.556^\circ = 1.244^\circ$.

Así, el área del paralelogramo blanco es:
 $8.544 \times \text{sen}(1.244) \times 5.385 = 0.9988\dots$





By permuting the triangular pieces an egg disappears. How does it happen?



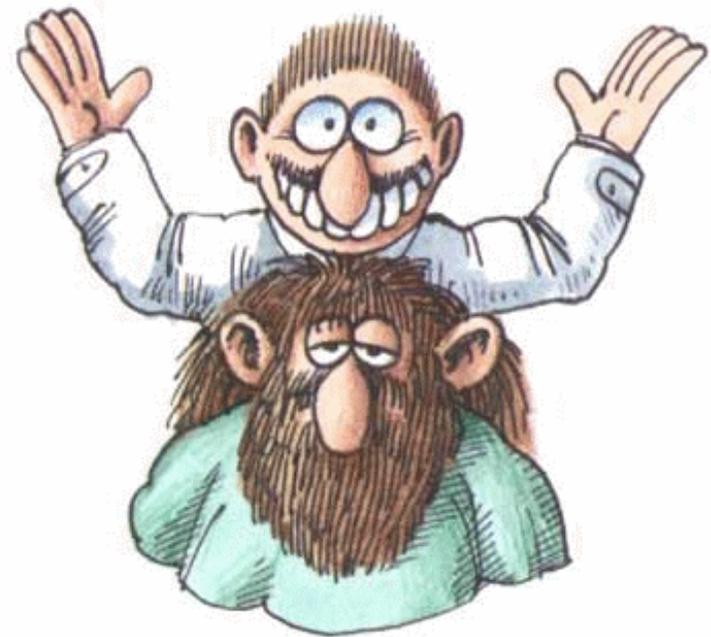
© G. Sarcone, www.archimedes-lab.org

http://www.archimedes-lab.org/Gallery/new_optical_illusions/index.html

Paradoja del barbero

En Barbilandia, hay un único barbero, **Jon**, que afeita a los que no se afeitan a sí mismos.

¿Quién afeita al barbero de Barbilandia?



Si **Jon** no se afeita a sí mismo, será una de las personas de Barbilandia que no se afeitan a sí mismas... con lo cual **Jon** debería de afeitarse, siendo por lo tanto una de las personas que se afeitan a sí mismas... no debiendo por tanto afeitarse.

Solución: Russel define su famosa *teoría de tipos*, donde se eliminan los conjuntos auto-contradictorios, así que **Jon**, el barbero de Barbilandia...

¡... no existe!

Formas geométricas...

¿En que aspecto de la vida aparecen representadas más formas geométricas? ¿En arquitectura? ¿Arte?



Formas geométricas...

¿En que aspecto de la vida aparecen representadas más formas geométricas? ¿En arquitectura? ¿Arte?

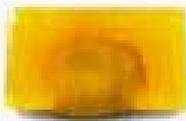
Parece que no... existen unos **350** tipos diferentes de **pasta**... y aparecen cada día más...

Las siguientes son sólo unas muestras (ordenadas alfabéticamente) disponibles en los supermercados italianos...



Alfabeto

Abissini
Acini di pepe
Agnoli
Anellini
Anelloni
Anolini



Agnolotti



Anelli lisci



Anelli rigati



Armелlette



Avemarie



Ballerine



Barbina



Boccolotti (pasta lunga)



Bucatini (pasta lunga)

Bavette
Bombonini
Brichetti



Cappelletti



Cavatappi



Capelli
d'angelo



Chifferi



Conchiglie





Eliche con spinaci



Eliche tricolori



Elicoidali tricolore



Fagottini



Farfalle



Farfalline



Fusilli



Fidelini



Filini



Fettuccine (pasta lunga)



Fagioloni



Farfalle rotonde



Festonati



Fettucce

Farfalloni
Fischietti
Fili d'angelo
Fiori di sambuco
Gentili rigati



Gnocchetti sardi



Gnocchi di patate



Gomiti



Garganelli



Gnocchi





Maccaroni (pasta lunga)



Mafalde

Mista

Malfatti
Maltagliati
Mostaccioli



Nidi fettucce



Nidi Pappardelle



Nidi Capellini



Occhi di pernice



Ondine



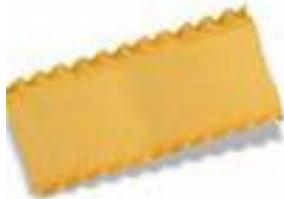
Orecchiette



Orzo



Orecchiette
tricolori



Lasagne



Linguine



Maccaroni



Manicotti

Nocciole
grosse
Occhialini
Occhioni



Panzerotto



Penne lisce



Pennette



Pennette rigate



Pennine lisce



Paglia e fieno



Pennoni rigati



Pepe bucato



Penne zita



Pappardelle



Penne agli spinaci



Perciati

Papardelle
Passatelli
Pater noster
Peperini
Perciatelli
Picagge verdi
Pipe rigate
Pisellini
Pitaloni
Puntette



Quadrucchi



Piombi



Perline



Penne a candela



Ravioli



Ravioloni



Rigatoni



Rocchetti



Regina (pasta lunga)

Raganelle
Risetto
Rosmarino
Rotelloni



Racchette



Ruote



Radiatori



Risone



Rotini



Sigarette



Spaghetti alla chitarra



Stelline col buco



Strigoli



Strozzapreti



semi di melone



Spaghetti (pasta lunga)



Spaghettoni (pasta lunga)



Stellette



Spirali

Sedanini
 Scucuzun
 Semi di cicoria
 Semi di grano
 Semi di peperoni
 Sorpresine
 Stelle

Stivaletti
 Tagliardi
 Tajarin
 Tempesta
 Trebuchi
 Trenette
 Viandina
 Vincisgrassi



Tagliatelle



Tagliolini



Tortellino



Tortiglione



Tagliatelle spianate



Tortiglioni



Trottole



Truciolini



Taglierini al nero di seppia



Trofie



Tubetti



Tagliolini a nido



Tufoli



Tubettini



Tagliatelle zigrinate



Tofe tricolori



Tripoline



Tempestina



Vermicelli (pasta lunga)



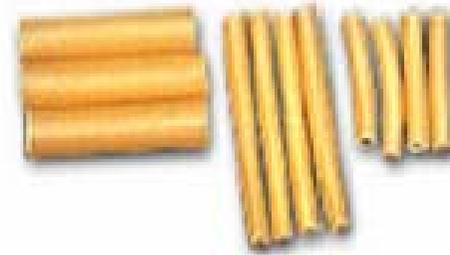
Ziti (pasta lunga)



Zitoni (pasta lunga)



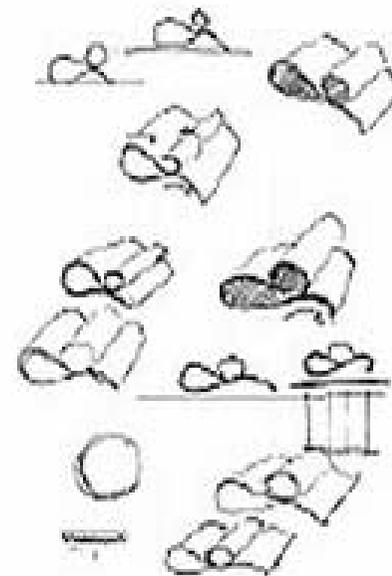
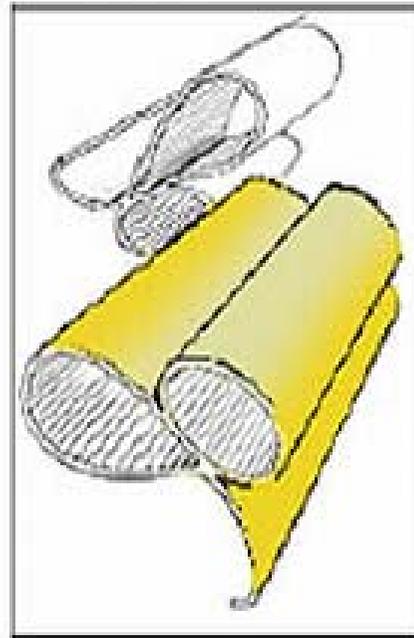
Zitellini



Ziti tagliati

...and to end,
New pasta:
Marille,
designed by
Giorgio Giugiaro

To get more information
about pasta visit also:



La paradoja del condenado

En la Edad Media, un rey de reconocida sinceridad, pronuncia su sentencia:

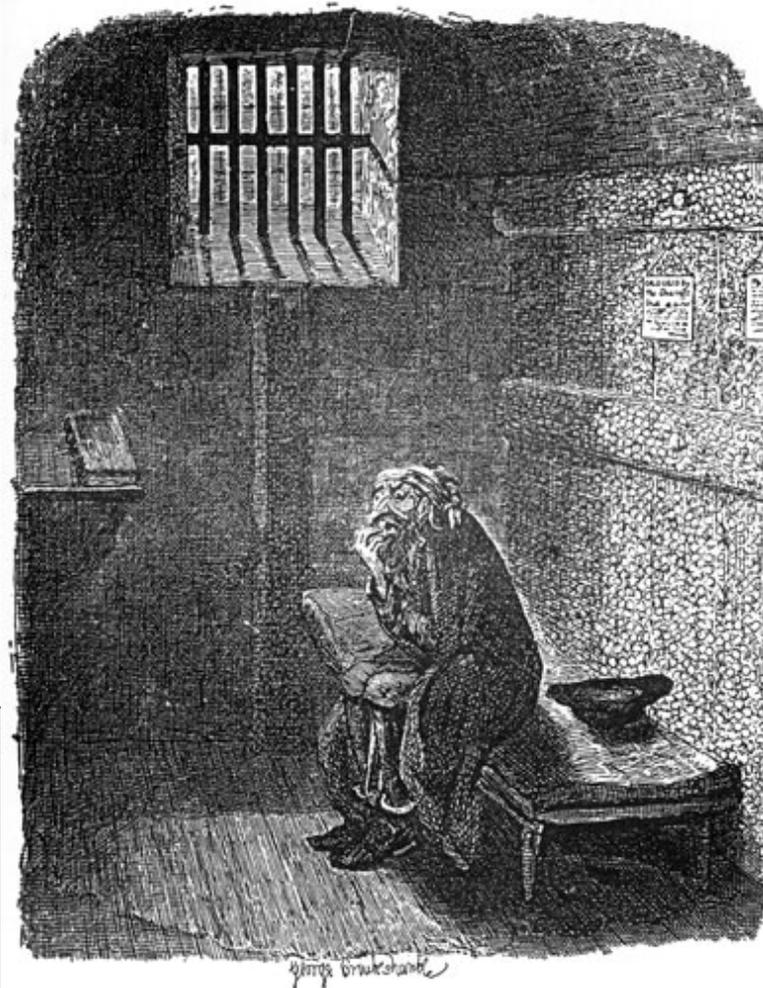


Una mañana de este mes serás ejecutado, pero no lo sabrás hasta esa misma mañana, de modo que cada noche te acostarás con la duda, que presiento terrible, de si esa será tu última sobre la Tierra...

En la soledad de su celda, el reo argumenta:

Si el mes tiene 30 días, es evidente que no podré ser ajusticiado el día 30, ya que el 29 por la noche sabría que a la mañana siguiente habría de morir. Así que el último día posible para cumplir la sentencia es el 29. Pero entonces, el 28 por la noche tendré la certeza de que por la mañana seré ejecutado...

Continuando de este modo, el prisionero concluye triunfalmente que la condena es de **ejecución imposible**, y comienza a dormir aliviado, aguardando que transcurra el mes para pedir su libertad...



Sin embargo, sorpresa, un día cualquiera, por ejemplo el fatídico día **13 (era martes)**, el verdugo, con el hacha afilada en la mano, despierta al reo... que instantes más tarde es decapitado.

La sentencia se cumple literalmente.

¿Dónde ha fallado el razonamiento del condenado?



Una solución puede pasar por la noción fundamental de que no es lo mismo el día 30, más el día 29, más el día 28, etc., que **el mes**.

Un conjunto es diferente y contiene cualidades distintas de la mera adición de sus partes.

El análisis individual, día por día, por parte del prisionero es irreprochable... Pero el defecto de su argumento aparece cuando atribuye al conjunto **(este mes)** las mismas y exclusivas cualidades que poseían sus partes **(cada día)**, no advirtiéndolo que el conjunto **mes** ha incorporado algunas características: entre otras la de contener...

... días sorpresa.

Hacia el siglo III, el filósofo chino Hui Tzu afirmaba:

Un caballo bayo y una vaca parda son tres: el caballo, la vaca, y el conjunto de caballo y vaca.

El razonamiento no es trivial, y es la esencia de la paradoja del condenado.

!



+



= 3!

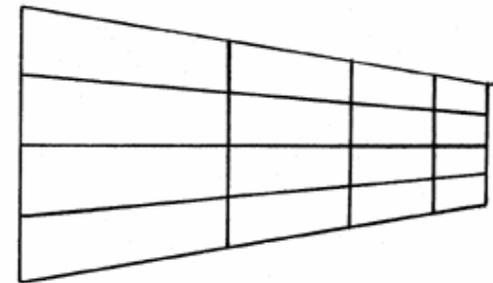
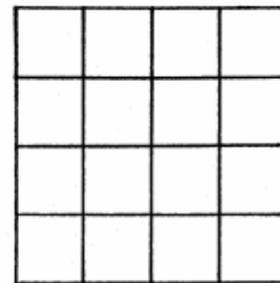
Anamorfosis

Una **anamorfosis** es una deformación reversible de una imagen a través de procedimientos matemáticos u ópticos.

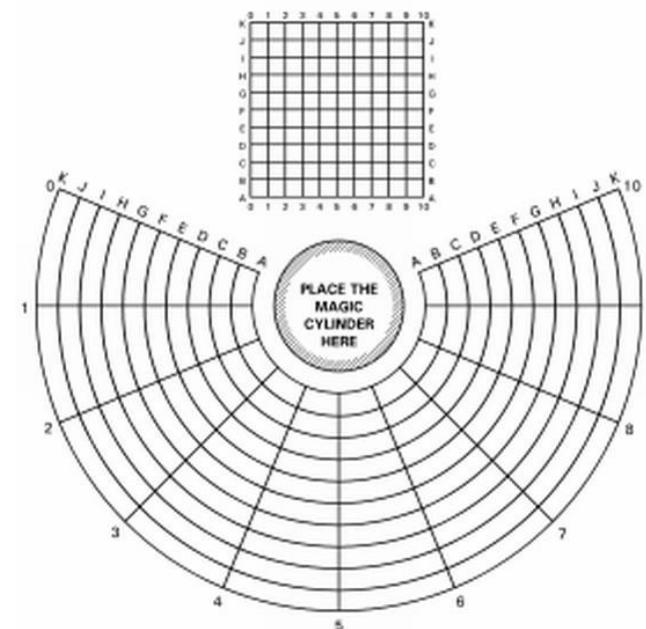
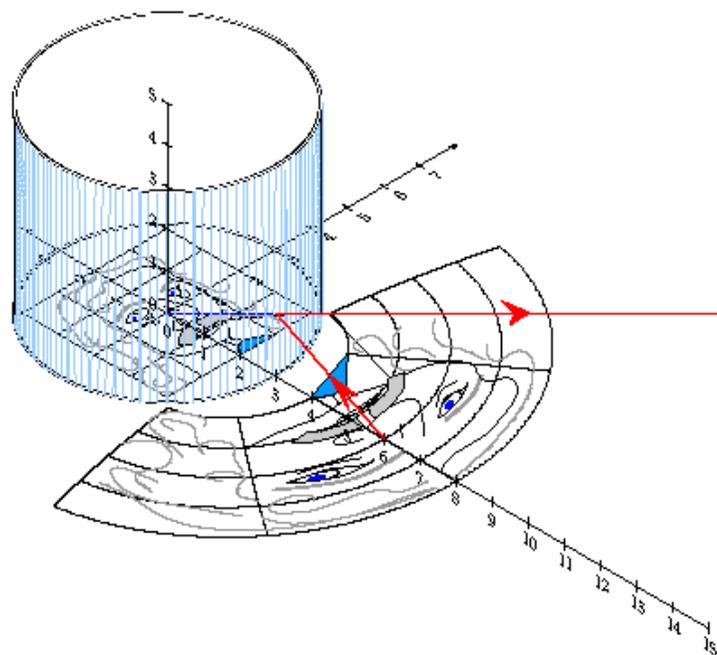


En este grabado de Dürero (velo de Alberti), el artista usa un retículo para guardar las proporciones de la modelo.

¿Y si no se coloca el enrejado de forma perpendicular?

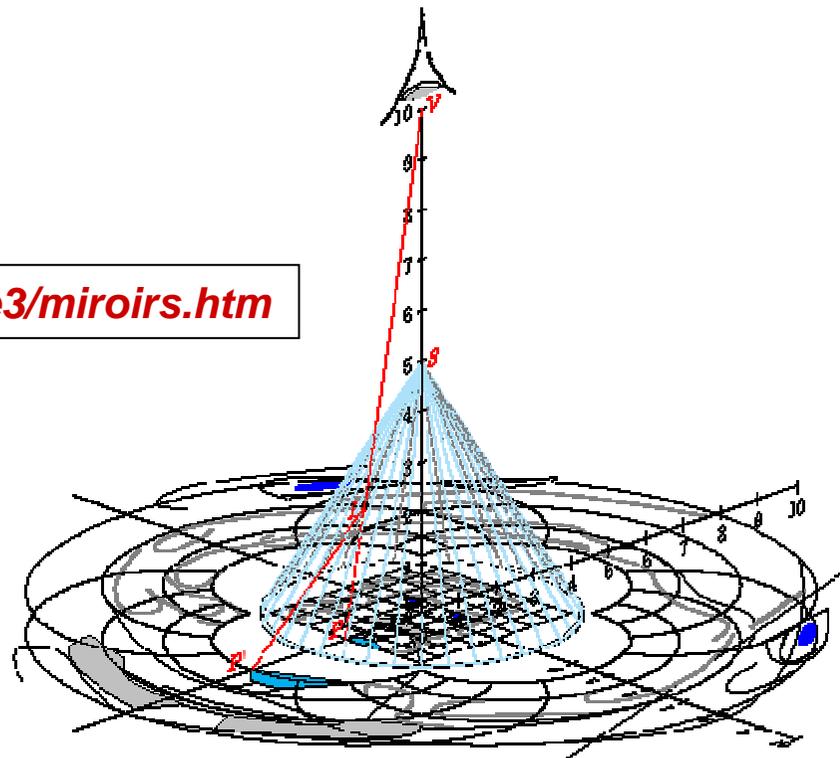


Anamorfosis cilíndrica



<http://members.aol.com/ManuelLuque3/miroirs.htm>

Anamorfosis cónica



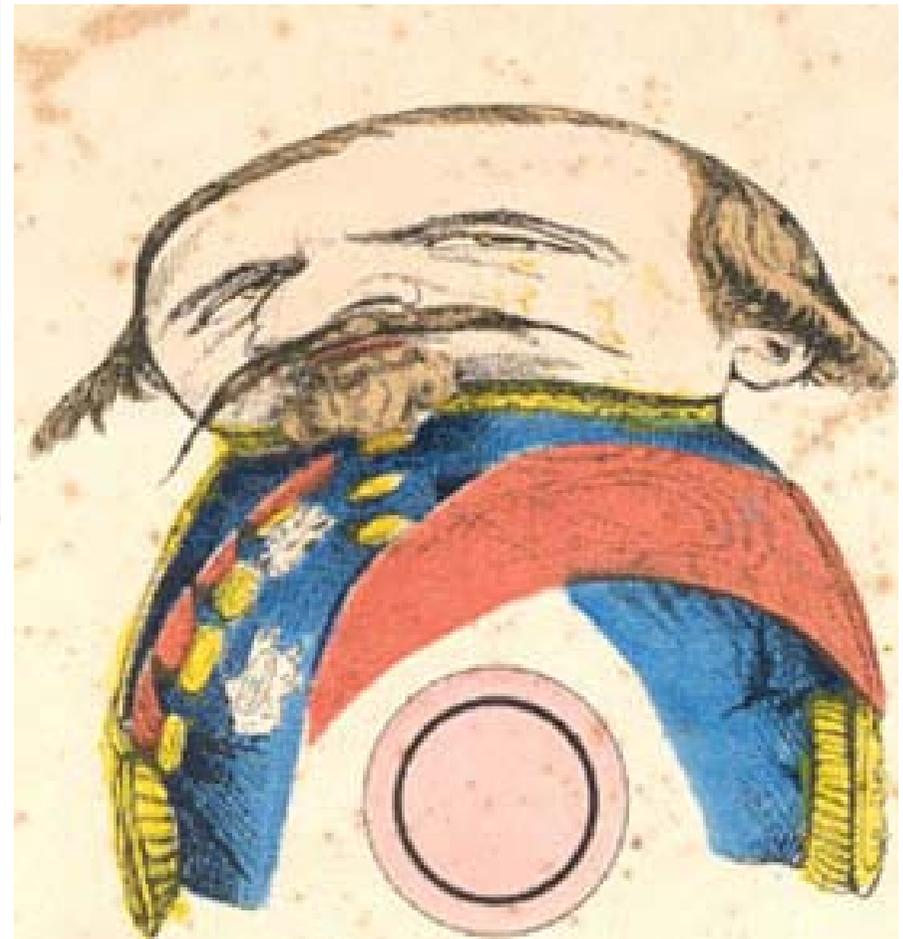
Anamorfosis cilíndrica

Napoleón



Sancho Panza on His Donkey

***Sancho Panza
y su burro***





István Orosz (1951-)

La isla misteriosa y el retrato de Julio Verne

<http://www.geocities.com/SoHo/Museum/8716/>

Video



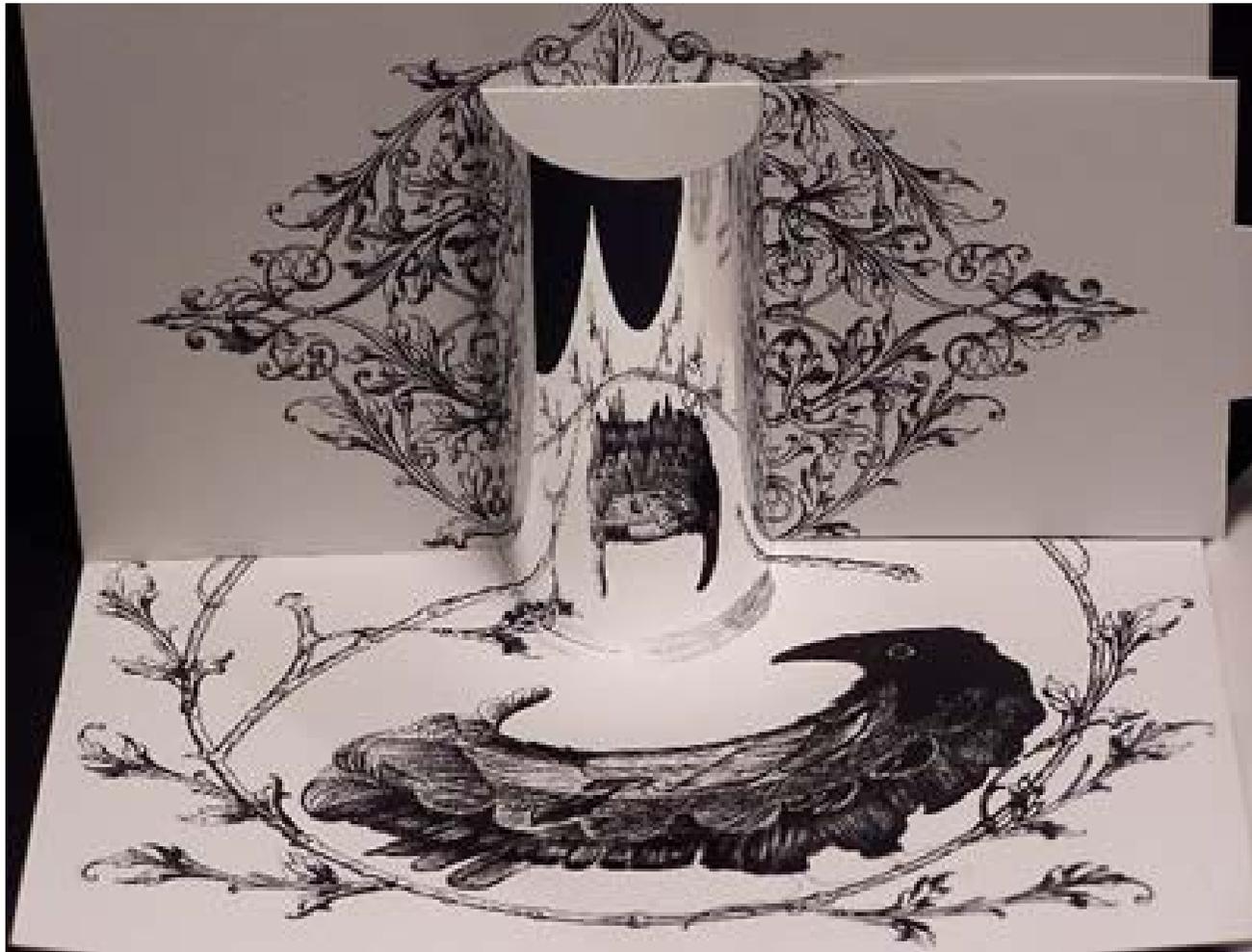
Anna

István Orosz

Pie



10081997 Orovitz



El murciélago



Anamorfosis



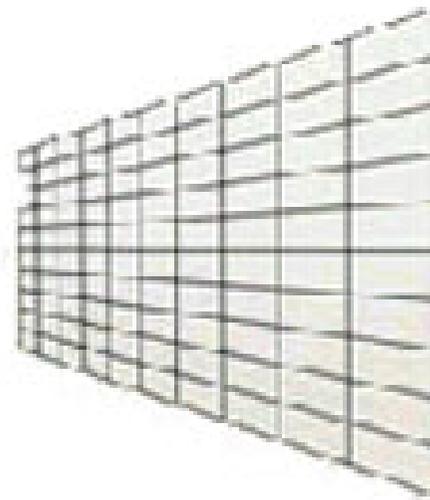
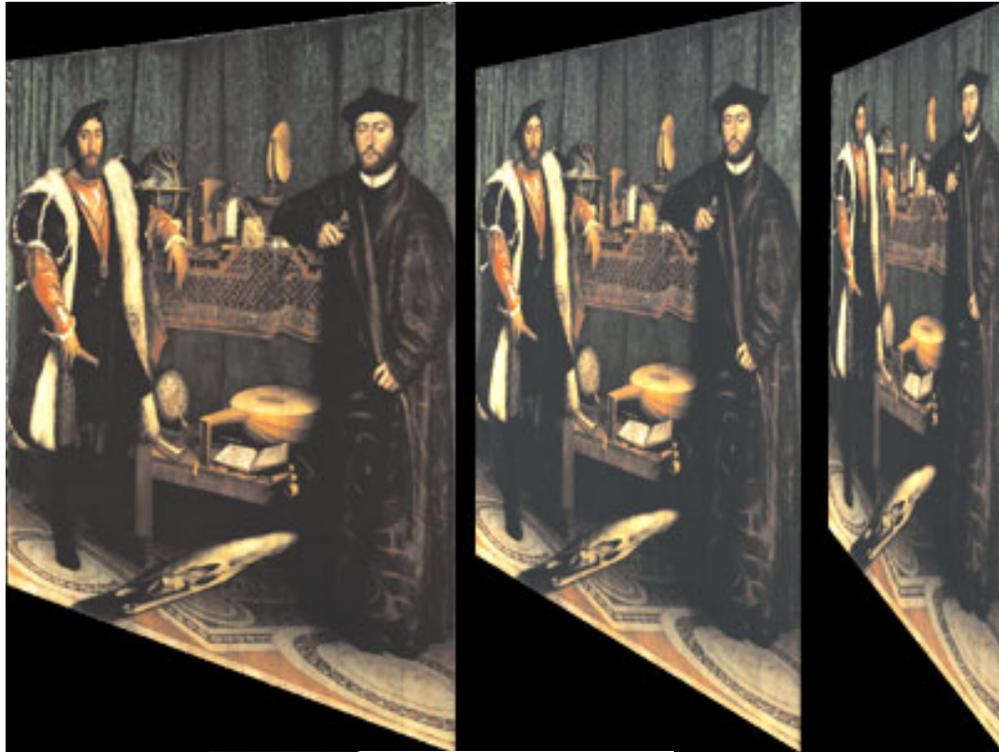
Los Embajadores
(1533)

por

Holbein el joven
(1497-1543)

<http://www.math.nus.edu.sg/~mathelmr/teaching/holbein.html>

Y, al salir de la sala, al mirar el cuadro desde otro punto de vista, aparece...



Video

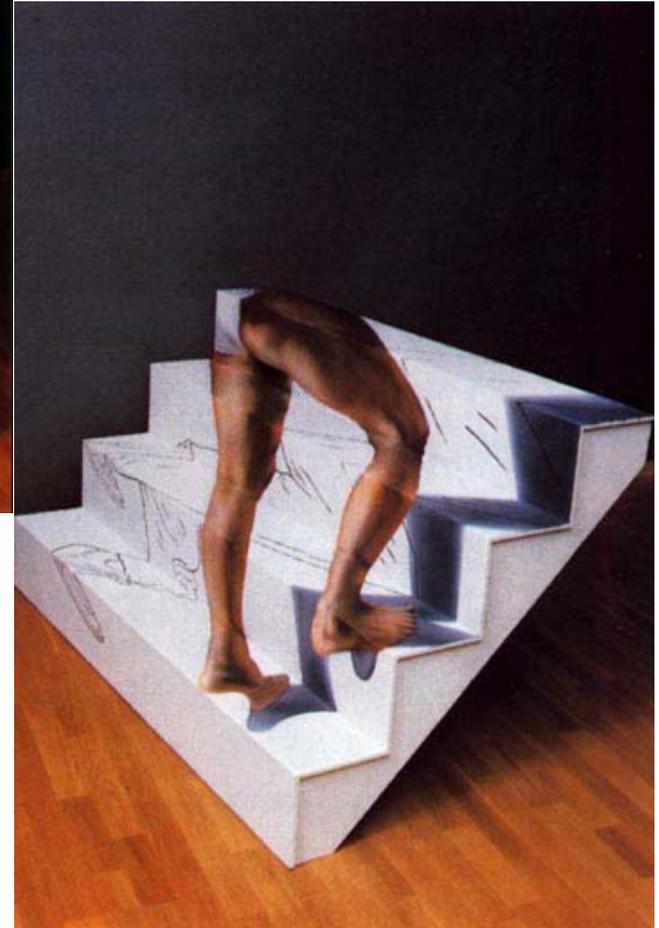




**Vista desde el suelo, la imagen se ve totalmente deformada.
Desde el segundo piso se observa la imagen real.**

"Robotmur" es un robot capaz de reproducir anamorfosis sobre edificios, etc.

<http://jourdain.ifrance.com>



István Orosz

Escalera de dimensión tres, vista desde diferentes ángulos. Los dos primeros revelan una figura que camina sobre las escaleras, un tanto distorsionada. Sólo la figura final resuelve la anamorfosis.



Les Chevaliers de France
solobotmar@alterm.org
ALTERM.ORG/ROBOTMUE



Les Chevaliers de France
solobotmar@alterm.org
ALTERM.ORG/ROBOTMUE



Les Chevaliers de France
solobotmar@alterm.org
ALTERM.ORG/ROBOTMUE



Les Chevaliers de France
solobotmar@alterm.org
ALTERM.ORG/ROBOTMUE



Les Chevaliers de France
solobotmar@alterm.org
ALTERM.ORG/ROBOTMUE



Les Chevaliers de France
solobotmar@alterm.org
ALTERM.ORG/ROBOTMUE



Les Chevaliers de France
solobotmar@alterm.org
ALTERM.ORG/ROBOTMUE



Les Chevaliers de France
solobotmar@alterm.org
ALTERM.ORG/ROBOTMUE



Les Chevaliers de France
solobotmar@alterm.org
ALTERM.ORG/ROBOTMUE



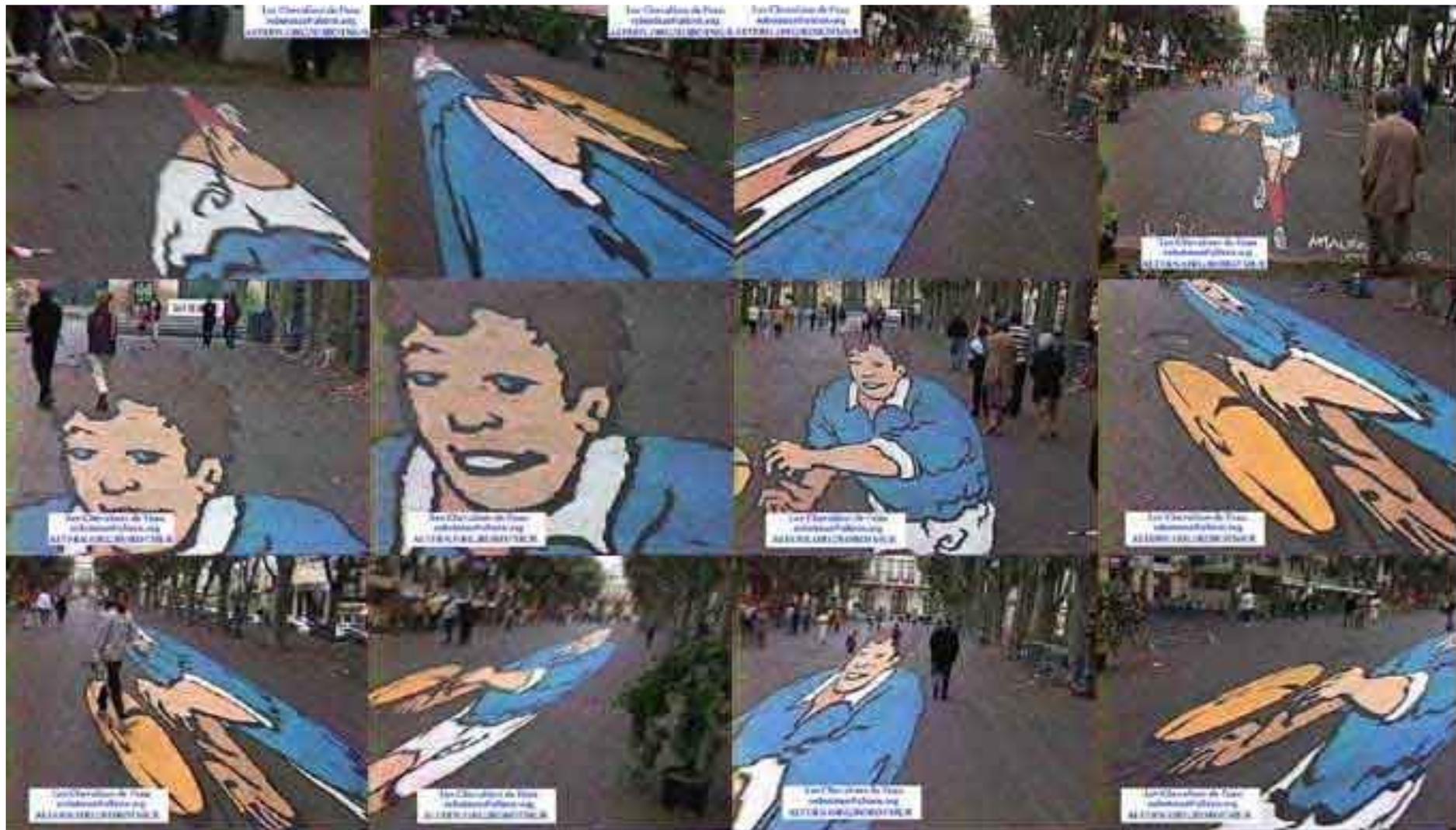
Les Chevaliers de France
solobotmar@alterm.org
ALTERM.ORG/ROBOTMUE



Les Chevaliers de France
solobotmar@alterm.org
ALTERM.ORG/ROBOTMUE



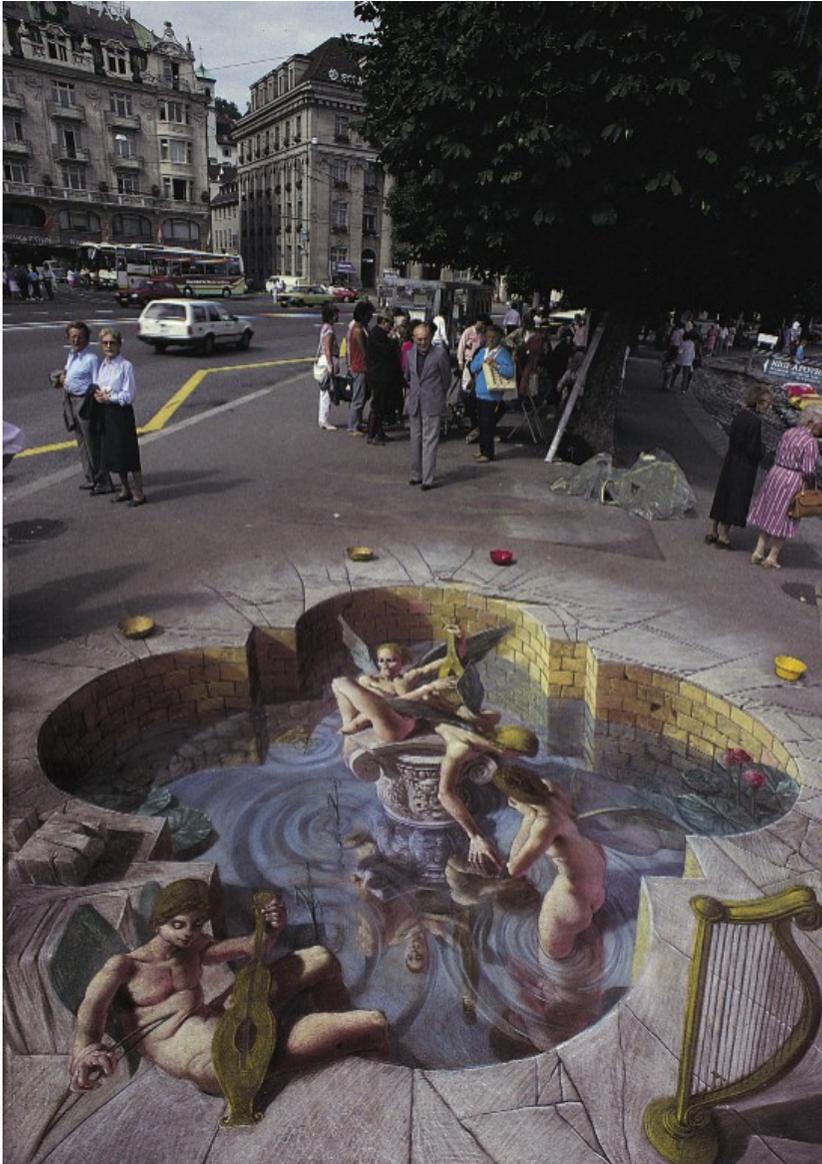
Les Chevaliers de France
solobotmar@alterm.org
ALTERM.ORG/ROBOTMUE



Les Chevaliers de l'eau (<http://jourdain.iffance.com/sommaire.htm>)

Jugador de Rugby de 134,20 metros de largo. Beziers, 30 septiembre de 1999 (apertura de la copa del mundo de Rugby): es la mayor anamorfosis del mundo.

Kurt Wenner



Dies Irae, Italia

<http://www.kurtwenner.com/>

Musas, Suiza



Make Poverty History

Dibujo encargado para la campaña de presión al G8

Vista de frente

Edinburgh City Centre

Visto de lado: 13 metros

Julian Beever

<http://users.skynet.be/J.Beever/pave.htm>



Eduardo Relero



Grandes chorizos



Con la ocasión del
'Museumsnacht' (2004) en
Hamburgo, el Museo de Artes
y Oficios se presentó a sí
mismo con el eslógan ***Todos
los caminos conducen al Arte.***

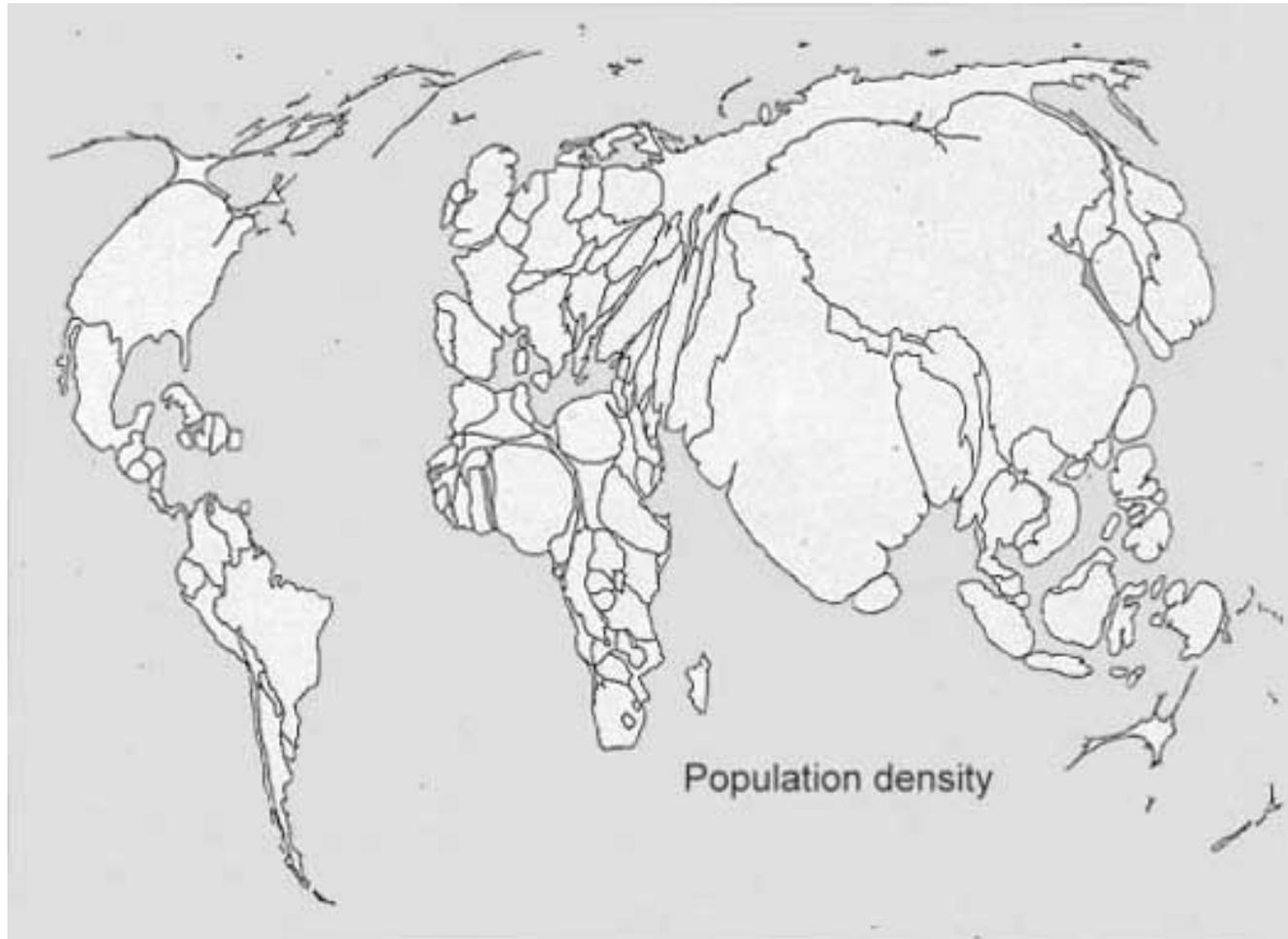


Anamorfosis y señalización



Las anamorfosis se usan a menudo en señales de tráfico, para que las señales sean correctamente interpretadas por los conductores.

Anamorfosis y cartografía estadística



Las anamorfosis se utilizan en cartografía estadística para mostrar la importancia de un fenómeno dado. El mapa ya no representa la realidad geográfica, sino la realidad del fenómeno.

La deformación se realiza usando transformaciones matemáticas.

Paradojas tipo Sorites

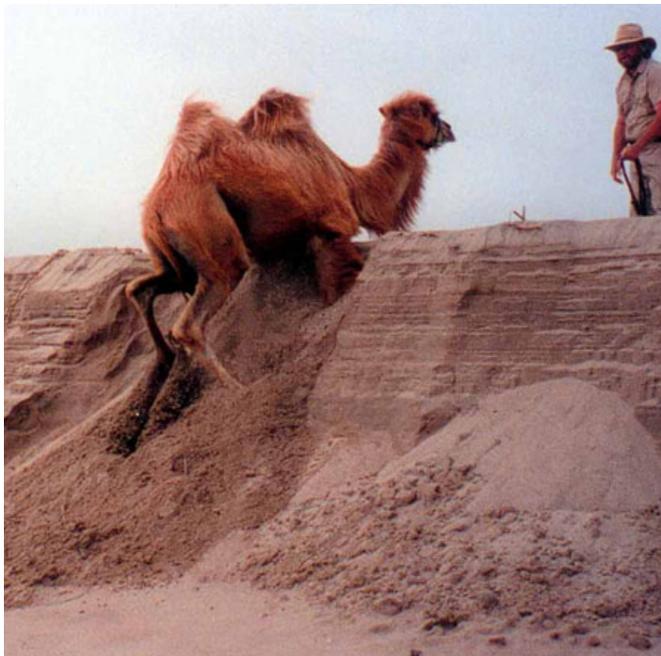
“Sorites” es la palabra griega para “montón” o “pila”. “Sorites” es el nombre dado a una clase argumentos paradójicos, que se derivan de los límites indeterminados de aplicación de los predicados envueltos. Se trata de una serie de puzzles atribuidos al lógico Eubulides de Mileto, que incluyen:

1. **el *hombre calvo***: ¿describirías a un hombre con un pelo en la cabeza como calvo?





2. Un **grano de arena** **no es un montón**, si 1 grano de arena no es un montón, tampoco 2 granos de arena lo son... Si 9.999 granos de arena no son un montón, tampoco los son 10.000 granos. ¿Cuántos granos tiene un montón?



Algunas respuestas a esta paradoja son:

- el acercamiento a un *lenguaje ideal*, cuyo atributo clave es su precisión: la vaguedad del lenguaje natural es un defecto a eliminar (Frege y Russell);
- lógicas multivaluadas (no clásicas), como la *lógica difusa* de Goguen y Zadeh (1969) que sustituye a la usual (dos-valuada), que reconocen para un objeto “los grados” de verdad;
- aceptar la paradoja: ninguna cantidad de granos de arena hace un montón... o en otra versión...

¡ la calvicie no existe !

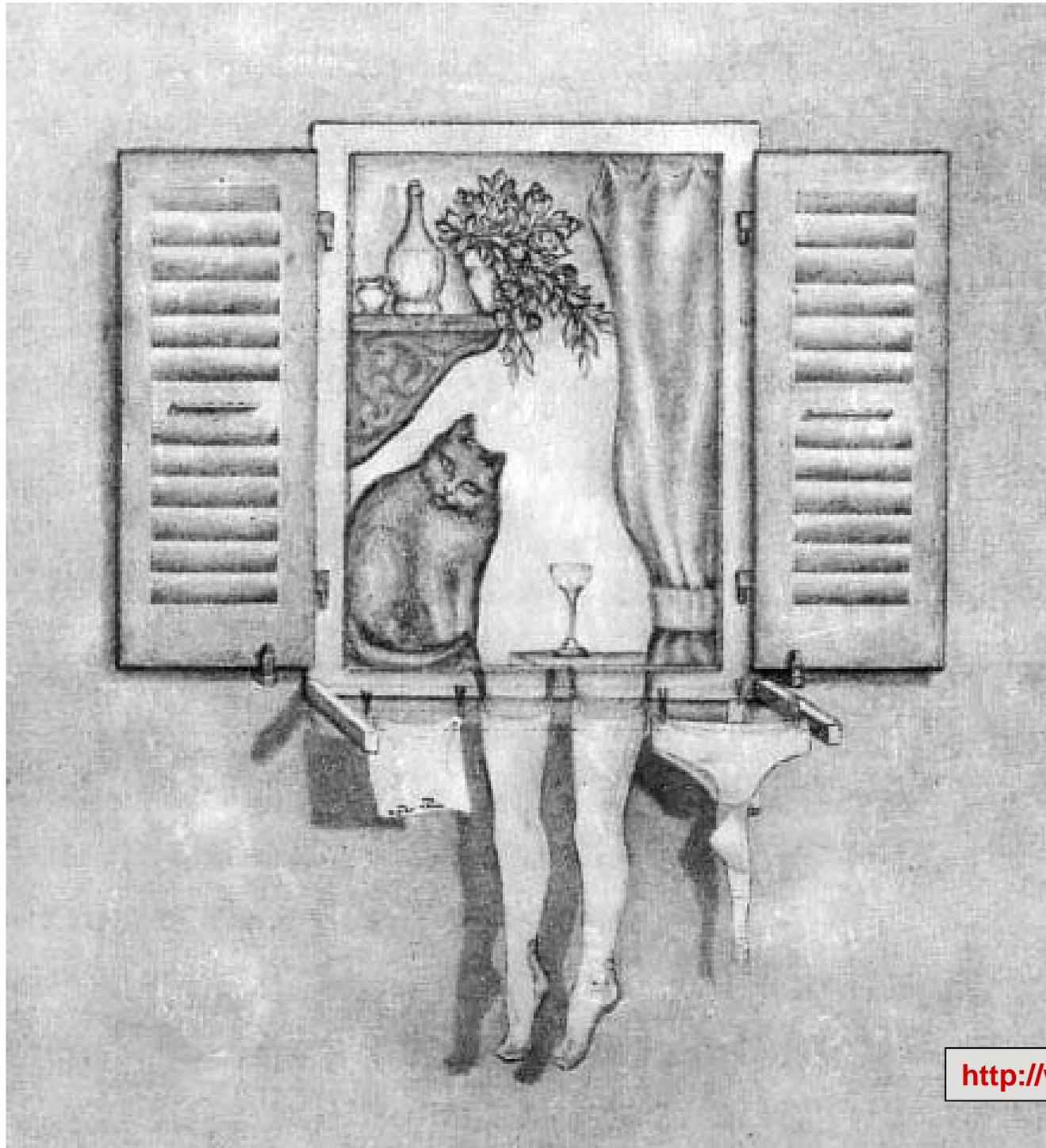
Figuras ambiguas



**Roger N. Shepard
(1929-)**

Sara Nader





**Sandro
del Prete**
(1937-)
*Todo lo que
vemos
puede ser
visto de
otra manera*



<http://www.del-prete.ch/index.html>



El charco

<http://www.mcescher.com>

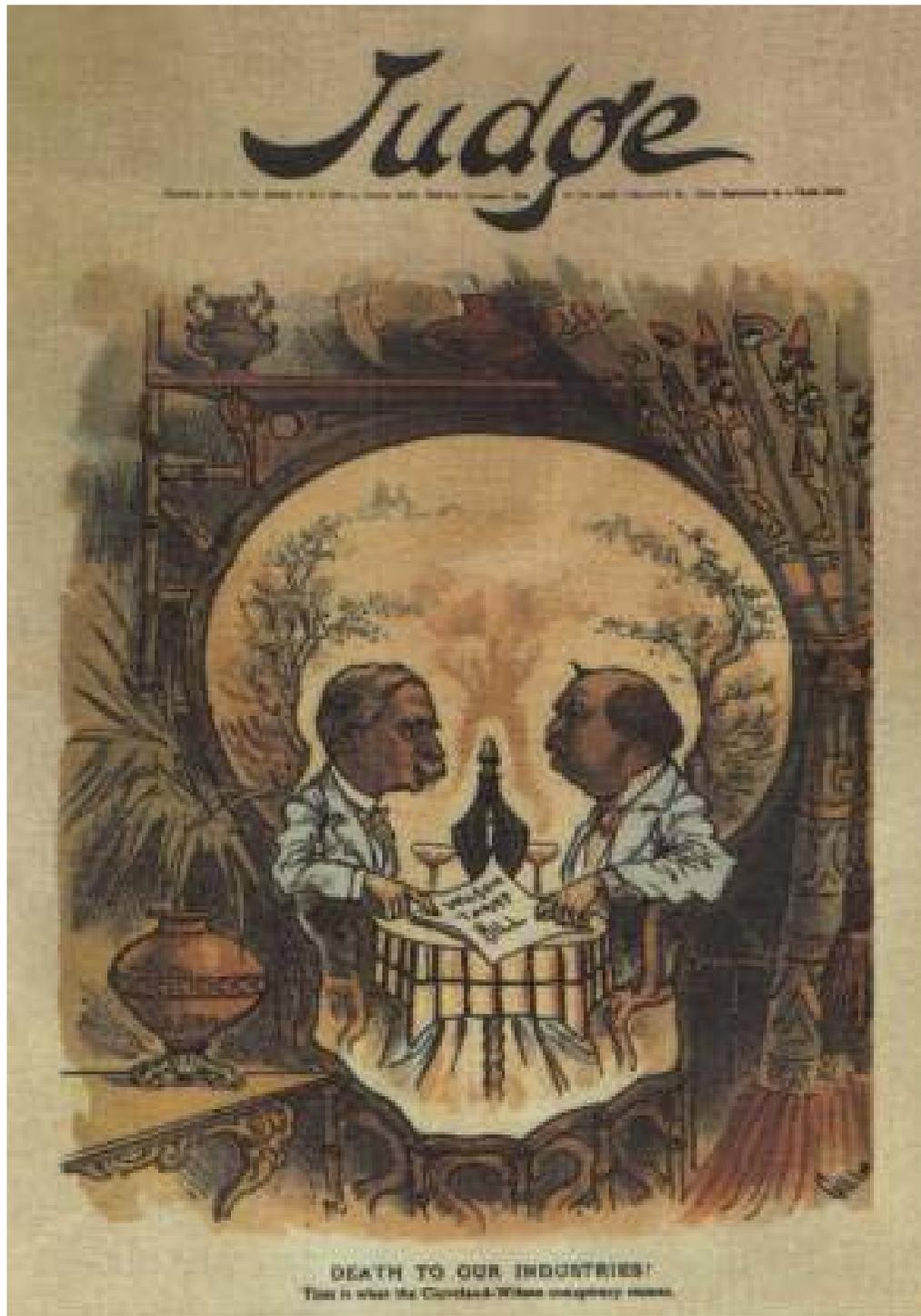
M. Cornelius Escher (1898-1972)

Tres mundos





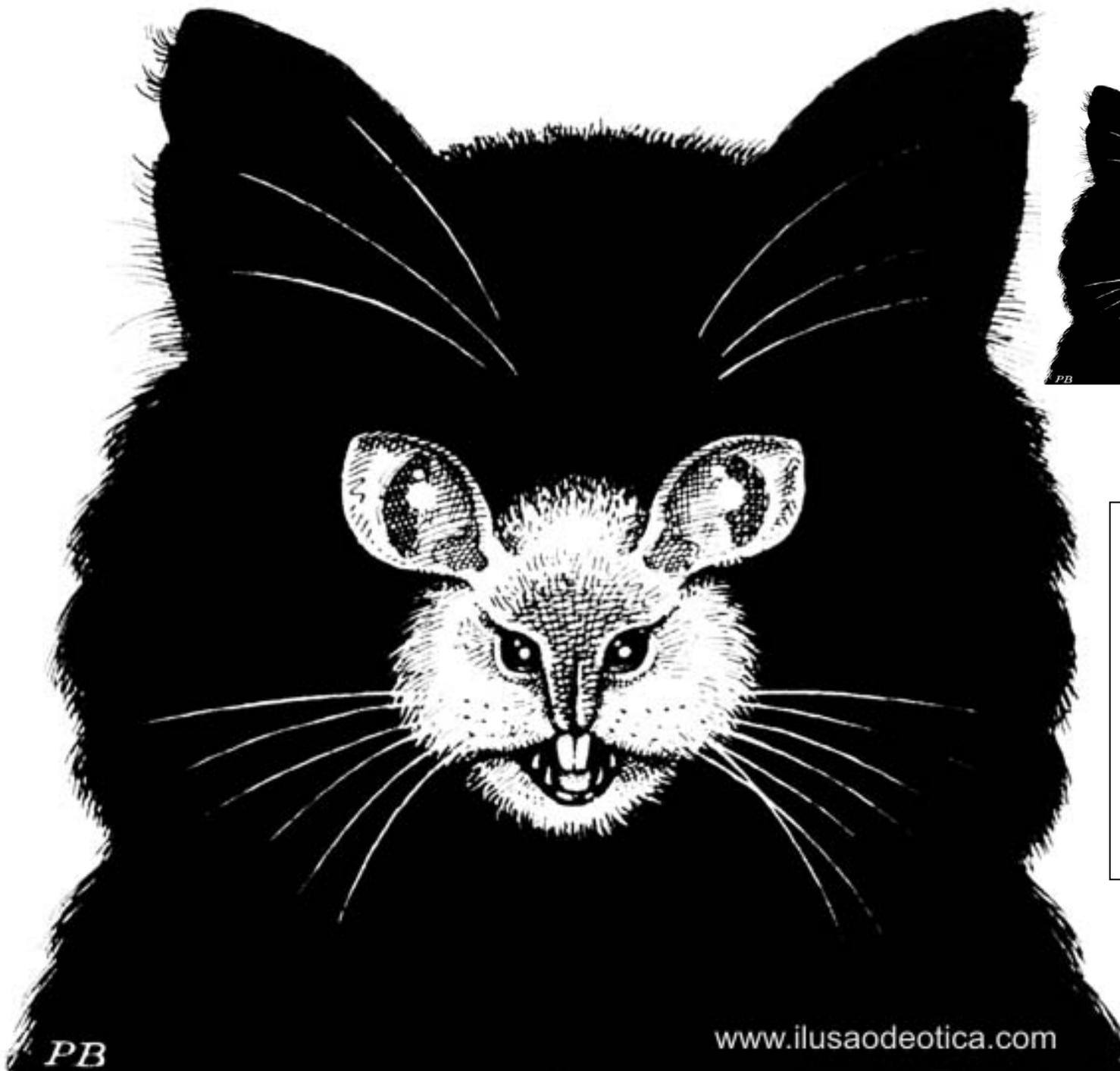
**Caja de cerillas: 12 elefantes y sólo 6 cabezas
(aparte del elefante central)**



Gillam: Cubierta del Magazine
JUDGE 26, 1894
Cartel reivindicativo contra los
aranceles

En el papel del cartel:
“Wilson Tariff Bill”

Base del cartel:
***“Death to our industries.
That is what Cleveland-Wilson
conspiracy means”***



**Peter
Brookes**

**De cerca se
ve el ratón y
de lejos, el
gato**

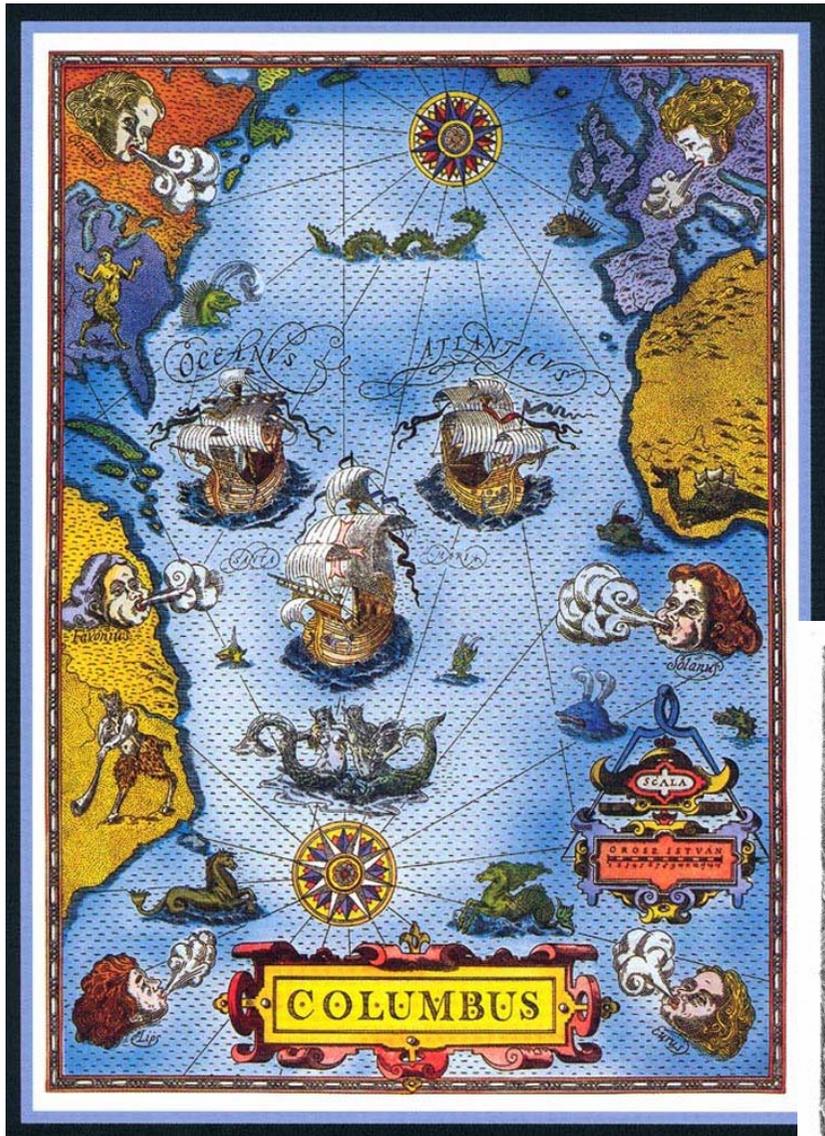
PB

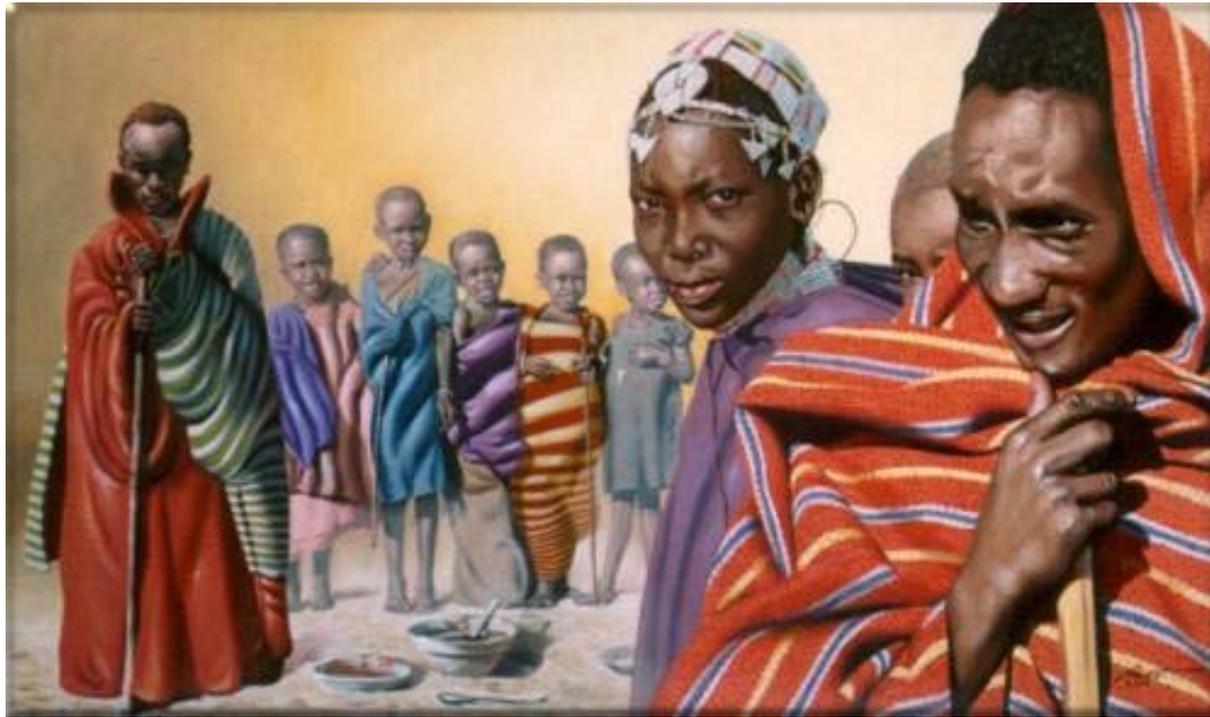
www.ilusaodeotica.com

Columbus

Itsván Orosz

Durero en el bosque





Rusty Rust

10 amigos



León escondido



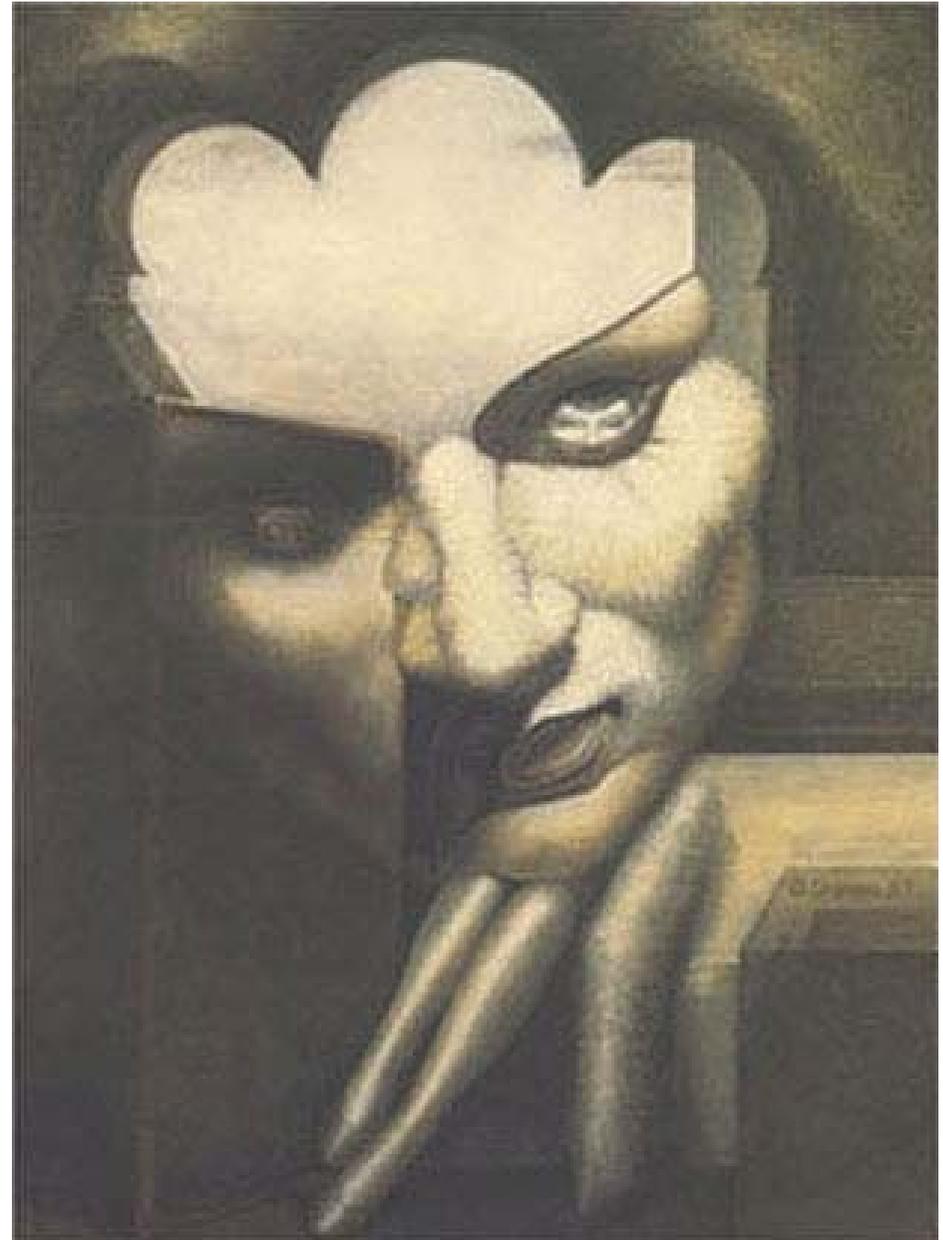
Octavio Ocampo (1943-)

La evolución del hombre



Octavio Ocampo (1943-)

Marlena



Las visiones del Quijote



Octavio Ocampo (1943-)

Se trata de una silla ocupada por tres conejos (uno negro abajo a la izquierda y dos blancos abajo en el centro), un gato está sentado sobre un cojín en el centro y mira al observador.

La silla tiene un respaldo que a primera vista parece la cara de la Mona Lisa, pero si se inspecciona con más cuidado aparecen dos mujeres, un hombre, un ángel,...

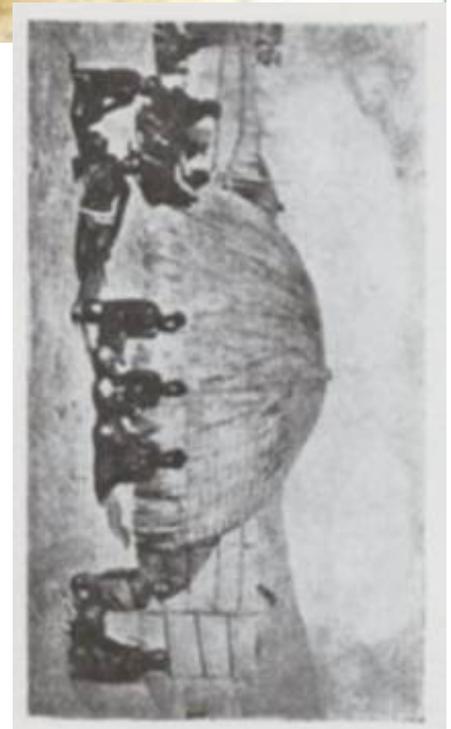
Mona Lisa

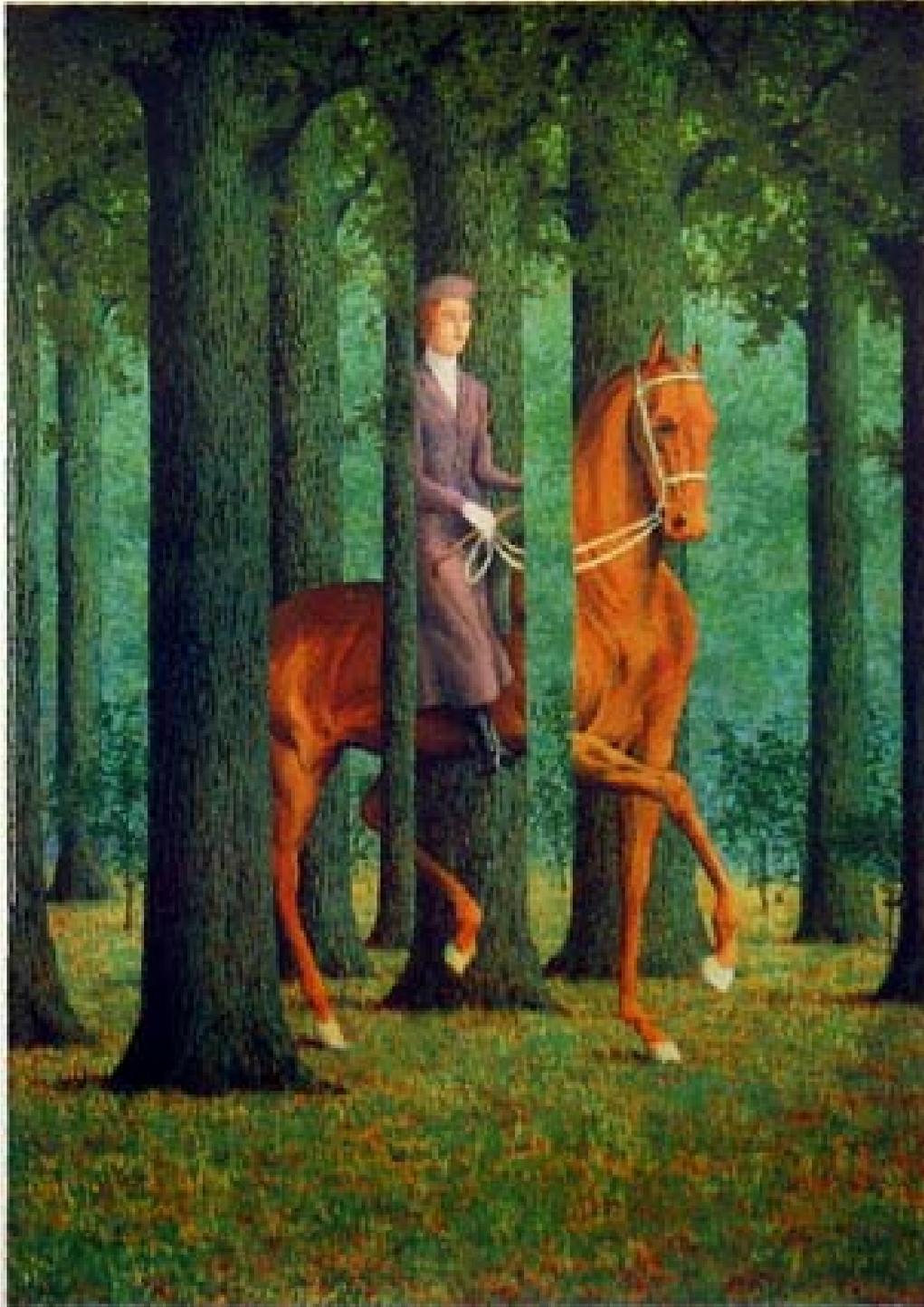


Salvador Dalí (1904-1989)



***Rostro
paranoico: la
tarjeta postal
transformada
en Picasso***

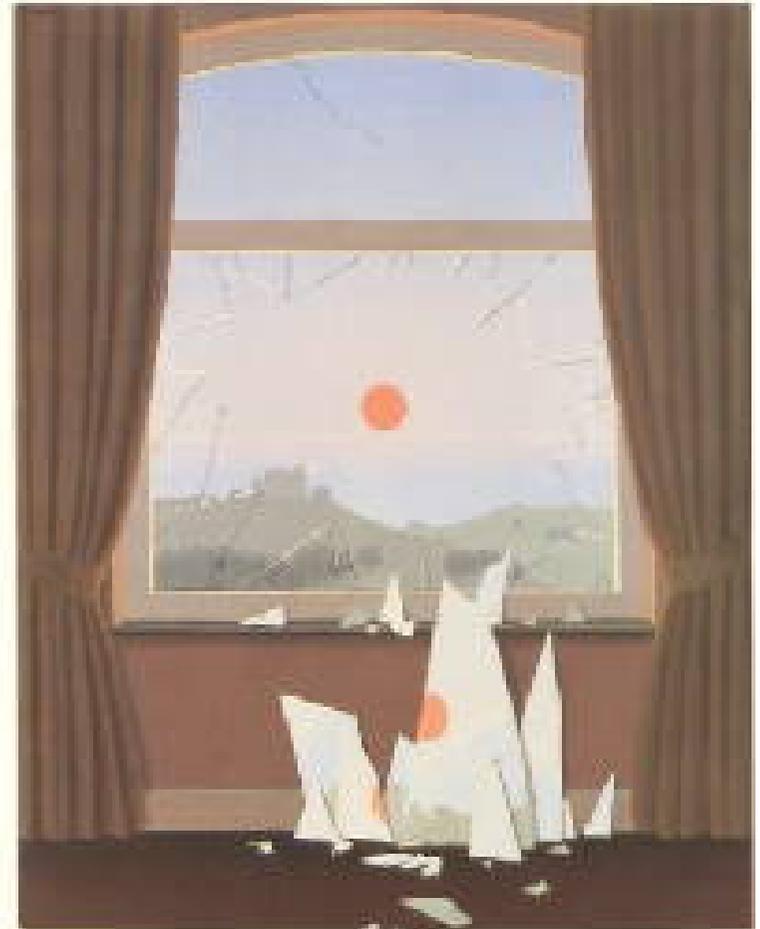




Carte blanche

La noche que cae

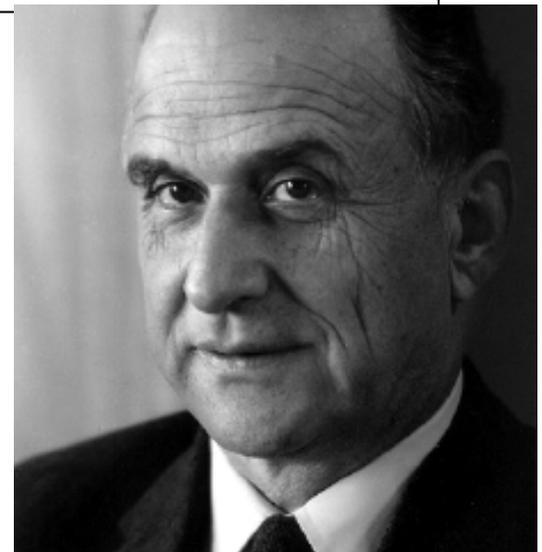
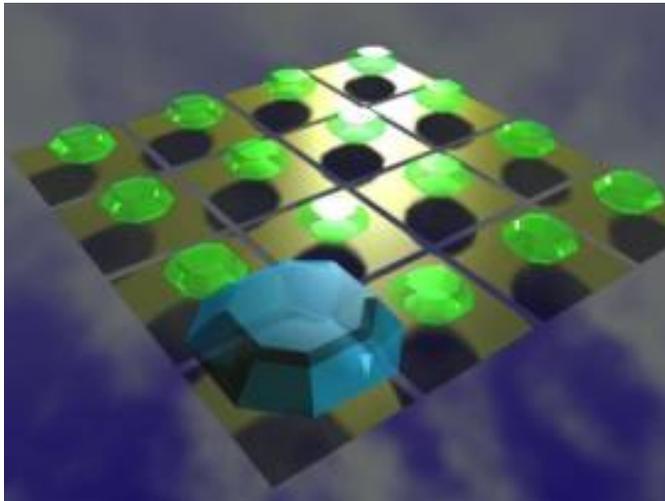
René Magritte (1898-1967)



La paradoja de Goodman

Se define un objeto como *verul*, si observado antes del tiempo t es *verde*, y *azul* después de t .

Si $t = 1$ de enero de 2011, Nelson Goodman (1906-1998) afirma que decir que las esmeraldas son *verdes* o *verules* es igual de consistente... en ambas afirmaciones hay tiempo por medio y ambas se confirman empíricamente...



Continuará...