Foliaciones y geometría no conmutativa

Marta Macho Stadler

UPV/EHU

Valladolid, 13 a 17 de junio de 2011

Índice

Índice

El mundo no conmutativo

Esquema de funcionamiento

En matemática no conmutativa:

El mundo no conmutativo

Esquema de funcionamiento

En matemática no conmutativa:

(i) dado un objeto singular $\mathcal{G}$, se comienza encontrando una *desingularización* $\widetilde{\mathcal{G}}$ que describa $\mathcal{G}$ en el sentido a estudiar (medible, topológico, diferenciable, etc.). En muchos casos, $\widetilde{\mathcal{G}}$ será un grupoide y el cociente del espacio de unidades de $\widetilde{\mathcal{G}}$ por la acción del grupoide *será* $\mathcal{G}$;

El mundo no conmutativo

Esquema de funcionamiento

En matemática no conmutativa:

(i) dado un objeto singular $\mathcal{G}$, se comienza encontrando una *desingularización* $\widetilde{\mathcal{G}}$ que describa $\mathcal{G}$ en el sentido a estudiar (medible, topológico, diferenciable, etc.). En muchos casos, $\widetilde{\mathcal{G}}$ será un grupoide y el cociente del espacio de unidades de $\widetilde{\mathcal{G}}$ por la acción del grupoide *será* $\mathcal{G}$;

(ii) $\widetilde{\mathcal{G}}$ debería tener una *buena* estructura, para definir un álgebra de funciones $C^*(\widetilde{\mathcal{G}})$ cuyas propiedades reflejen las de $\mathcal{G}$;

El mundo no conmutativo

Esquema de funcionamiento

En matemática no conmutativa:

(i) dado un objeto singular $\mathcal{G}$, se comienza encontrando una *desingularización* $\widetilde{\mathcal{G}}$ que describa $\mathcal{G}$ en el sentido a estudiar (medible, topológico, diferenciable, etc.). En muchos casos, $\widetilde{\mathcal{G}}$ será un grupoide y el cociente del espacio de unidades de $\widetilde{\mathcal{G}}$ por la acción del grupoide *será* $\mathcal{G}$;

(ii) $\widetilde{\mathcal{G}}$ debería tener una *buena* estructura, para definir un álgebra de funciones $C^*(\widetilde{\mathcal{G}})$ cuyas propiedades reflejen las de $\mathcal{G}$;

(iii) se trata de investigar el anillo no conmutativo $C^*(\widetilde{\mathcal{G}})$.

Un ejemplo de espacio singular

La acción de un grupo

Supongamos que Γ es un grupo topológico que actúa a derecha sobre un espacio topológico X, $\alpha : X \times \Gamma \to X$:

Un ejemplo de espacio singular

La acción de un grupo

Supongamos que Γ es un grupo topológico que actúa a derecha sobre un espacio topológico X, $\alpha : X \times \Gamma \to X$:

(i) a menudo el cociente $\mathcal{G} = X/\Gamma$ es un objeto singular. Su desingularización natural es *grupoide producto* $\widetilde{\mathcal{G}} = X \times \Gamma$ (de espacio de unidades X, aplicaciones $\alpha(x, \gamma) = x\gamma$, $\beta(x, \gamma) = x$ y producto $(x, \gamma')(x\gamma', \gamma) = (x, \gamma'\gamma)$): el cociente de X por la acción del grupoide es $\mathcal{G} = X/\Gamma$;

Un ejemplo de espacio singular

La acción de un grupo

Supongamos que Γ es un grupo topológico que actúa a derecha sobre un espacio topológico X, $\alpha : X \times \Gamma \to X$:

(i) a menudo el cociente $\mathcal{G} = X/\Gamma$ es un objeto singular. Su desingularización natural es *grupoide producto* $\widetilde{\mathcal{G}} = X \times \Gamma$ (de espacio de unidades X, aplicaciones $\alpha(x, \gamma) = x\gamma$, $\beta(x, \gamma) = x$ y producto $(x, \gamma')(x\gamma', \gamma) = (x, \gamma'\gamma)$): el cociente de X por la acción del grupoide es $\mathcal{G} = X/\Gamma$;

(ii) la *C*-álgebra producto cruzado* $C^*(\widetilde{\mathcal{G}}) = C_0(X) \rtimes_\alpha \Gamma$ es un espacio fácil de calcular;

Un ejemplo de espacio singular

La acción de un grupo

Supongamos que Γ es un grupo topológico que actúa a derecha sobre un espacio topológico X, $\alpha : X \times \Gamma \to X$:

(i) a menudo el cociente $\mathcal{G} = X/\Gamma$ es un objeto singular. Su desingularización natural es *grupoide producto* $\widetilde{\mathcal{G}} = X \times \Gamma$ (de espacio de unidades X, aplicaciones $\alpha(x, \gamma) = x\gamma$, $\beta(x, \gamma) = x$ y producto $(x, \gamma')(x\gamma', \gamma) = (x, \gamma'\gamma)$): el cociente de X por la acción del grupoide es $\mathcal{G} = X/\Gamma$;

(ii) la *C*-álgebra producto cruzado* $C^*(\widetilde{\mathcal{G}}) = C_0(X) \rtimes_\alpha \Gamma$ es un espacio fácil de calcular;

(iii) $C_0(X) \rtimes_\alpha \Gamma$ representará *topológicamente* X/Γ (en K-teoría).

Mecánica clásica

Movimiento de una partícula

Para determinar la trayectoria de una partícula deben conocerse su posición y velocidad iniciales. Estos datos forman un conjunto de 6 parámetros: 3 coordenadas de posición y 3 del momento $p = mv$.

Mecánica clásica

Movimiento de una partícula

Para determinar la trayectoria de una partícula deben conocerse su posición y velocidad iniciales. Estos datos forman un conjunto de 6 parámetros: 3 coordenadas de posición y 3 del momento $p = mv$.

Movimiento de n partículas

Si se trabaja con n partículas, aparece un conjunto de $6n$ parámetros, el *espacio de fases* M del sistema mecánico, cuyos puntos son los *estados* del sistema.

Mecánica clásica

El formalismo hamiltoniano

Los principales objetos de la Mecánica Clásica son:

Mecánica clásica

El formalismo hamiltoniano

Los principales objetos de la Mecánica Clásica son:

(i) el *espacio de fases*, variedad simpléctica de clase C^∞, M;

Mecánica clásica

El formalismo hamiltoniano

Los principales objetos de la Mecánica Clásica son:

(i) el *espacio de fases*, variedad simpléctica de clase C^∞, M;

(ii) las *cantidades observables*, funciones reales sobre M;

Mecánica clásica

El formalismo hamiltoniano

Los principales objetos de la Mecánica Clásica son:

(i) el *espacio de fases*, variedad simpléctica de clase C^∞, M;

(ii) las *cantidades observables*, funciones reales sobre M;

(iii) los *estados*, funcionales lineales sobre los observables;

Mecánica clásica

El formalismo hamiltoniano

Los principales objetos de la Mecánica Clásica son:

(i) el *espacio de fases*, variedad simpléctica de clase C^∞, M;

(ii) las *cantidades observables*, funciones reales sobre M;

(iii) los *estados*, funcionales lineales sobre los observables;

(iv) la *dinámica* de los observables está definida por la *función hamiltoniano* H y la ecuación $\dot{f} = \{H, f\}$;

Mecánica clásica

El formalismo hamiltoniano

Los principales objetos de la Mecánica Clásica son:

(i) el *espacio de fases*, variedad simpléctica de clase C^∞, M;

(ii) las *cantidades observables*, funciones reales sobre M;

(iii) los *estados*, funcionales lineales sobre los observables;

(iv) la *dinámica* de los observables está definida por la *función hamiltoniano* H y la ecuación $\dot{f} = \{H, f\}$;

(v) las *simetrías* del sistema físico actúan sobre observables o estados, vía transformaciones canónicas de M.

Mecánica clásica

El formalismo hamiltoniano

Los principales objetos de la Mecánica Clásica son:

(i) el *espacio de fases*, variedad simpléctica de clase C^∞, M;
(ii) las *cantidades observables*, funciones reales sobre M;
(iii) los *estados*, funcionales lineales sobre los observables;
(iv) la *dinámica* de los observables está definida por la *función hamiltoniano* H y la ecuación $\dot{f} = \{H, f\}$;
(v) las *simetrías* del sistema físico actúan sobre observables o estados, vía transformaciones canónicas de M.

Los observables, la dinámica y la simetría son objetos primarios. El espacio de fases y los estados pueden recuperarse a partir éstos.

Mecánica Clásica

El grupo conmutativo de las frecuencias

En el modelo clásico, el conjunto de las frecuencias de las radiaciones emitidas es un subgrupo aditivo Γ de $\mathbb{R}$.

Mecánica Clásica

El grupo conmutativo de las frecuencias

En el modelo clásico, el conjunto de las frecuencias de las radiaciones emitidas es un subgrupo aditivo Γ de $\mathbb{R}$.

El álgebra conmutativa de convolución

A cada frecuencia emitida le corresponden todos los múltiplos enteros o armónicos. El álgebra de las cantidades físicas observables se lee directamente a partir de Γ: es su *álgebra de convolución*. Como Γ es un grupo conmutativo, el álgebra también lo es.

Mecánica Cuántica

Las frecuencias no forman un grupo

Este resultado teórico está en contra de la experiencia: el conjunto de las frecuencias emitidas por un átomo no forma un grupo, la suma de dos frecuencias no es una de ellas.

Mecánica Cuántica

Las frecuencias no forman un grupo

Este resultado teórico está en contra de la experiencia: el conjunto de las frecuencias emitidas por un átomo no forma un grupo, la suma de dos frecuencias no es una de ellas.

Los resultados experimentales

Se está trabajando de hecho con el *grupoide grosero*:
$\Delta = \{(i,j)\}_{i,j \in I}$, con la regla de composición $(i,j).(j,k) = (i,k)$.

Mecánica Cuántica

Una cantidad física observable ya no conmuta

Está dada por sus coeficientes $\{q(i,j) : (i,j) \in \Delta\}$. La evolución en el tiempo de un observable está dada por el homomorfismo de Δ en $\mathbb{R}$, que lleva cada línea espectral (i,j) en su frecuencia v_{ij}, y se obtiene la fórmula $q_{(i,j)}(t) = q(i,j)e^{2\pi i v_{ij} t}$.

Mecánica Cuántica

En Mecánica Cuántica

Los principales objetos son:

Mecánica Cuántica

En Mecánica Cuántica

Los principales objetos son:

(i) el *espacio de fases*, espacio proyectivo $P(\mathcal{H})$ de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$;

Mecánica Cuántica

En Mecánica Cuántica

Los principales objetos son:

(i) el *espacio de fases*, espacio proyectivo $P(\mathcal{H})$ de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$;

(ii) los *observables*, operadores autoadjuntos sobre $\mathcal{H}$;

Mecánica Cuántica

En Mecánica Cuántica

Los principales objetos son:

(i) el *espacio de fases*, espacio proyectivo $P(\mathcal{H})$ de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$;

(ii) los *observables*, operadores autoadjuntos sobre $\mathcal{H}$;

(iii) los *estados* del sistema, definidos por un vector unitario $\xi \in \mathcal{H}$;

Mecánica Cuántica

En Mecánica Cuántica

Los principales objetos son:

(i) el *espacio de fases*, espacio proyectivo $P(\mathcal{H})$ de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$;

(ii) los *observables*, operadores autoadjuntos sobre $\mathcal{H}$;

(iii) los *estados* del sistema, definidos por un vector unitario $\xi \in \mathcal{H}$;

(iv) la *dinámica* de un observable f está definida por un operador autoadjunto H, vía la *ecuación de Heisenberg* $\dot{f} = \frac{i}{\hbar}[H, f]$ ($\hbar$ es la constante de Plank);

Mecánica Cuántica

En Mecánica Cuántica

Los principales objetos son:

(i) el *espacio de fases*, espacio proyectivo $P(\mathcal{H})$ de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$;

(ii) los *observables*, operadores autoadjuntos sobre $\mathcal{H}$;

(iii) los *estados* del sistema, definidos por un vector unitario $\xi \in \mathcal{H}$;

(iv) la *dinámica* de un observable f está definida por un operador autoadjunto H, vía la *ecuación de Heisenberg* $\dot{f} = \frac{i}{\hbar}[H, f]$ ($\hbar$ es la constante de Plank);

(v) las *simetrías* del sistema físico actúan sobre observables o estados vía operadores unitarios sobre $\mathcal{H}$.

Estudio de espacios

Cuando se mira un espacio en el sentido clásico, hay varios puntos de vista, que ayudan a comprenderlo:

Estudio de espacios

Cuando se mira un espacio en el sentido clásico, hay varios puntos de vista, que ayudan a comprenderlo:

(i) el más "débil" es la *teoría de la medida*: si se conoce el espacio desde este punto de vista, no se conoce esencialmente nada, porque muchos espacios son isomorfos en teoría de la medida (e isomorfos a $[0,1]$ con la medida de Lebesgue);

Estudio de espacios

Cuando se mira un espacio en el sentido clásico, hay varios puntos de vista, que ayudan a comprenderlo:

(i) el más "débil" es la *teoría de la medida*: si se conoce el espacio desde este punto de vista, no se conoce esencialmente nada, porque muchos espacios son isomorfos en teoría de la medida (e isomorfos a $[0,1]$ con la medida de Lebesgue);

(ii) se tienen después la *topología* y *geometría diferenciales* (formas, distribuciones, clases características) no riemannianos;

Estudio de espacios

Cuando se mira un espacio en el sentido clásico, hay varios puntos de vista, que ayudan a comprenderlo:

(i) el más "débil" es la *teoría de la medida*: si se conoce el espacio desde este punto de vista, no se conoce esencialmente nada, porque muchos espacios son isomorfos en teoría de la medida (e isomorfos a $[0,1]$ con la medida de Lebesgue);

(ii) se tienen después la *topología* y *geometría diferenciales* (formas, distribuciones, clases características) no riemannianos;

(iii) el más importante es la *geometría riemanniana*.

Estudio de espacios

Una variedad de clase C^∞, M, puede considerarse desde diferentes puntos de vista:

Estudio de espacios

Una variedad de clase C^∞, M, puede considerarse desde diferentes puntos de vista:

(i) el de la *teoría de la medida*: M aparece como un espacio medible con una clase de medidas fijada (M, μ);

Estudio de espacios

Una variedad de clase C^∞, M, puede considerarse desde diferentes puntos de vista:

(i) el de la *teoría de la medida*: M aparece como un espacio medible con una clase de medidas fijada (M, μ);

(ii) el de la *topología*: M aparece como un espacio localmente compacto;

Estudio de espacios

Una variedad de clase C^∞, M, puede considerarse desde diferentes puntos de vista:

(i) el de la *teoría de la medida*: M aparece como un espacio medible con una clase de medidas fijada (M, μ);

(ii) el de la *topología*: M aparece como un espacio localmente compacto;

(iii) el de la *geometría diferencial*: M aparece como una variedad diferenciable.

Estudio de espacios

Cada una de estas estructuras sobre M está completamente especificada, por la correspondiente álgebra de funciones:

Estudio de espacios

Cada una de estas estructuras sobre M está completamente especificada, por la correspondiente álgebra de funciones:

(i) el *álgebra conmutativa de Von Neumann* $L^\infty(M, \mu)$ de las clases de funciones esencialmente acotadas y medibles sobre M;

Estudio de espacios

Cada una de estas estructuras sobre M está completamente especificada, por la correspondiente álgebra de funciones:

(i) el *álgebra conmutativa de Von Neumann* $L^\infty(M, \mu)$ de las clases de funciones esencialmente acotadas y medibles sobre M;

(ii) la *C*-álgebra* $C_0(M)$ de las funciones continuas sobre M que se anulan en el infinito;

Estudio de espacios

Cada una de estas estructuras sobre M está completamente especificada, por la correspondiente álgebra de funciones:

(i) el *álgebra conmutativa de Von Neumann* $L^\infty(M, \mu)$ de las clases de funciones esencialmente acotadas y medibles sobre M;

(ii) la *C*-álgebra* $C_0(M)$ de las funciones continuas sobre M que se anulan en el infinito;

(iii) el álgebra $C_c^\infty(M)$ de las *funciones de clase C^∞* con soporte compacto.

Índice

Grupoides

Un *grupoide algebraico* está definido por:

Grupoides

Un *grupoide algebraico* está definido por:

(i) un par de conjuntos $(M = G^0, G)$, donde $M \subset G$ es el *espacio de unidades* y G es el *espacio total*,

Grupoides

Un *grupoide algebraico* está definido por:

(i) un par de conjuntos $(M = G^0, G)$, donde $M \subset G$ es el *espacio de unidades* y G es el *espacio total*,

(ii) dos aplicaciones sobreyectivas, $\alpha, \beta \colon G \longrightarrow M$, las *proyecciones*, el *origen* y *extremo* resp., donde si $x \in M$, $\alpha(x) = \beta(x) = x$,

Grupoides

Un *grupoide algebraico* está definido por:

(i) un par de conjuntos $(M = G^0, G)$, donde $M \subset G$ es el *espacio de unidades* y G es el *espacio total*,

(ii) dos aplicaciones sobreyectivas, $\alpha, \beta \colon G \longrightarrow M$, las *proyecciones*, el *origen* y *extremo* resp., donde si $x \in M$, $\alpha(x) = \beta(x) = x$,

(iii) una biyección $i \colon G \longrightarrow G$, la *inversión*, tal que $i = i^{-1}$,

Grupoides

Un *grupoide algebraico* está definido por:

(i) un par de conjuntos $(M = G^0, G)$, donde $M \subset G$ es el *espacio de unidades* y G es el *espacio total*,

(ii) dos aplicaciones sobreyectivas, $\alpha, \beta \colon G \longrightarrow M$, las *proyecciones*, el *origen* y *extremo* resp., donde si $x \in M$, $\alpha(x) = \beta(x) = x$,

(iii) una biyección $i \colon G \longrightarrow G$, la *inversión*, tal que $i = i^{-1}$,

(iv) una ley de composición parcial, $. \colon G^2 \longrightarrow G$, la *multiplicación*, donde G^2 es el conjunto de los *pares componibles*,

$$G^2 = \{(\gamma_2, \gamma_1) \in G \times G : \alpha(\gamma_2) = \beta(\gamma_1)\},$$

y que se denota del modo $\gamma_2.\gamma_1$, y verificando:

Grupoides

y verificando:

Grupoides

y verificando:

(i) *Asociatividad*: si $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in G$ son tales que $((\gamma_2, \gamma_1) \in G^2$ y $(\gamma_3, \gamma_2.\gamma_1) \in G^2)$ ó $((\gamma_3, \gamma_2) \in G^2$ y $(\gamma_3.\gamma_2, \gamma_1) \in G^2)$, entonces son ciertas las identidades: $\gamma_3.(\gamma_2.\gamma_1) = (\gamma_3.\gamma_2).\gamma_1$;

Grupoides

y verificando:

(i) *Asociatividad*: si $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in G$ son tales que $((\gamma_2, \gamma_1) \in G^2$ y $(\gamma_3, \gamma_2.\gamma_1) \in G^2)$ ó $((\gamma_3, \gamma_2) \in G^2$ y $(\gamma_3.\gamma_2, \gamma_1) \in G^2)$, entonces son ciertas las identidades: $\gamma_3.(\gamma_2.\gamma_1) = (\gamma_3.\gamma_2).\gamma_1$;

(ii) *Unidades*: para cada $\gamma \in G$, se verifica que $(\gamma, \alpha(\gamma)) \in G^2$ y $(\beta(\gamma), \gamma) \in G^2$, y entonces $\gamma.\alpha(\gamma) = \gamma = \beta(\gamma).\gamma$;

Grupoides

y verificando:

(i) *Asociatividad*: si $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in G$ son tales que $((\gamma_2, \gamma_1) \in G^2$ y $(\gamma_3, \gamma_2.\gamma_1) \in G^2)$ ó $((\gamma_3, \gamma_2) \in G^2$ y $(\gamma_3.\gamma_2, \gamma_1) \in G^2)$, entonces son ciertas las identidades: $\gamma_3.(\gamma_2.\gamma_1) = (\gamma_3.\gamma_2).\gamma_1$;

(ii) *Unidades*: para cada $\gamma \in G$, se verifica que $(\gamma, \alpha(\gamma)) \in G^2$ y $(\beta(\gamma), \gamma) \in G^2$, y entonces $\gamma.\alpha(\gamma) = \gamma = \beta(\gamma).\gamma$;

(iii) *Inversión*: para cada $\gamma \in G$, se cumple $(\gamma, i(\gamma)) \in G^2$, $(i(\gamma), \gamma) \in G^2$, y son válidas las identidades: $\gamma.i(\gamma) = \beta(\gamma)$, $i(\gamma).\gamma = \alpha(\gamma)$.

Grupoides

y verificando:

(i) *Asociatividad*: si $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in G$ son tales que $((\gamma_2, \gamma_1) \in G^2$ y $(\gamma_3, \gamma_2.\gamma_1) \in G^2)$ ó $((\gamma_3, \gamma_2) \in G^2$ y $(\gamma_3.\gamma_2, \gamma_1) \in G^2)$, entonces son ciertas las identidades: $\gamma_3.(\gamma_2.\gamma_1) = (\gamma_3.\gamma_2).\gamma_1$;

(ii) *Unidades*: para cada $\gamma \in G$, se verifica que $(\gamma, \alpha(\gamma)) \in G^2$ y $(\beta(\gamma), \gamma) \in G^2$, y entonces $\gamma.\alpha(\gamma) = \gamma = \beta(\gamma).\gamma$;

(iii) *Inversión*: para cada $\gamma \in G$, se cumple $(\gamma, i(\gamma)) \in G^2$, $(i(\gamma), \gamma) \in G^2$, y son válidas las identidades: $\gamma.i(\gamma) = \beta(\gamma)$, $i(\gamma).\gamma = \alpha(\gamma)$.

Se expresa del modo $G \overset{\alpha}{\underset{\beta}{\rightrightarrows}} M$.

Grupoides

Las fibras

Dado un grupoide $G \overset{\alpha}{\underset{\beta}{\rightrightarrows}} M$ y $x, y \in M$, se definen:

Grupoides

Las fibras

Dado un grupoide $G \overset{\alpha}{\underset{\beta}{\rightrightarrows}} M$ y $x, y \in M$, se definen:

(i) la *α-fibra sobre* x, $G_x = \{\gamma \in G : \alpha(\gamma) = x\} \subset G$,

Grupoides

Las fibras

Dado un grupoide $G \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} M$ y $x, y \in M$, se definen:

(i) la *α-fibra sobre* x, $G_x = \{\gamma \in G : \alpha(\gamma) = x\} \subset G$,

(ii) la *β-fibra sobre* y, $G^y = \{\gamma \in G : \beta(\gamma) = y\} \subset G$.

Grupoides

Las fibras

Dado un grupoide $G \overset{\alpha}{\underset{\beta}{\rightrightarrows}} M$ y $x, y \in M$, se definen:

(i) la *α-fibra sobre* x, $G_x = \{\gamma \in G : \alpha(\gamma) = x\} \subset G$,

(ii) la *β-fibra sobre* y, $G^y = \{\gamma \in G : \beta(\gamma) = y\} \subset G$.

(iii) $G_x^y = G_x \cap G^y \subset G$.

Grupoides

Las fibras

Dado un grupoide $G \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} M$ y $x, y \in M$, se definen:

(i) la *α-fibra sobre* x, $G_x = \{\gamma \in G : \alpha(\gamma) = x\} \subset G$,

(ii) la *β-fibra sobre* y, $G^y = \{\gamma \in G : \beta(\gamma) = y\} \subset G$.

(iii) $G_x^y = G_x \cap G^y \subset G$.

El conjunto G_x^y puede ser vacío. Pero, para cada $x \in M$, G_x^x es un grupo (de neutro el punto x), el *grupo de isotropía* de G sobre x.

El grupoide de isotropía

Un *subgrupoide*

$G' \underset{\beta'}{\overset{\alpha'}{\rightrightarrows}} M'$ del grupoide $G \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} M$ es $G' \subset G$, cerrado para la multiplicación y la inversión. Se dice *lleno*, si

$$G' = (\alpha')^{-1}(M') = (\beta')^{-1}(M').$$

El grupoide de isotropía

Un *subgrupoide*

$G' \underset{\beta'}{\overset{\alpha'}{\rightrightarrows}} M'$ del grupoide $G \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} M$ es $G' \subset G$, cerrado para la multiplicación y la inversión. Se dice *lleno*, si

$$G' = (\alpha')^{-1}(M') = (\beta')^{-1}(M').$$

El *subgrupoide de isotropía* de $G \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} M$

es $Is(G) \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} M$, con $Is(G) = \{\gamma \in G : \alpha(\gamma) = \beta(\gamma)\} = \bigcup_{x \in M} G_x^x$.

En $Is(G)$, $\alpha = \beta$ y para cada $x \in M$, sus α-fibras (o β-fibras) $Is(G)_x = Is(G)^x = Is(G)_x^x = G_x^x$ son grupos.

Grupoides

Ejemplos

1) Si $M = \{x\}$ es un punto, el grupoide se reduce a un *grupo*.

Grupoides

Ejemplos

1) Si $M = \{x\}$ es un punto, el grupoide se reduce a un *grupo*.
$\{x\}$ es el elemento neutro del grupo.

Grupoides

Ejemplos

1) Si $M = \{x\}$ es un punto, el grupoide se reduce a un *grupo*.
$\{x\}$ es el elemento neutro del grupo.
$\alpha = \beta$ es la aplicación constante igual a x.

Grupoides

Ejemplos

1) Si $M = \{x\}$ es un punto, el grupoide se reduce a un *grupo*.

   $\{x\}$ es el elemento neutro del grupo.

   $\alpha = \beta$ es la aplicación constante igual a x.

   $G_x = G^x = G_x^x = G$.

Grupoides

Ejemplos

2) La unión disjunta de grupos, $G = \bigcup_{i \in I} G_i$, es un grupoide: dados $a, b \in G$, la multiplicación $a.b$ está definida si y sólo si a y b pertenecen al mismo grupo G_i y entonces $a.b$ es el producto de ambos elementos en G_i.

Grupoides

Ejemplos

2) La unión disjunta de grupos, $G = \bigcup_{i \in I} G_i$, es un grupoide: dados $a, b \in G$, la multiplicación $a.b$ está definida si y sólo si a y b pertenecen al mismo grupo G_i y entonces $a.b$ es el producto de ambos elementos en G_i.

Existe una identidad 1_i (el neutro del grupo G_i) para cada $i \in I$.

Grupoides

Ejemplos

2) La unión disjunta de grupos, $G = \bigcup_{i \in I} G_i$, es un grupoide: dados $a, b \in G$, la multiplicación $a.b$ está definida si y sólo si a y b pertenecen al mismo grupo G_i y entonces $a.b$ es el producto de ambos elementos en G_i.

Existe una identidad 1_i (el neutro del grupo G_i) para cada $i \in I$.

Las proyecciones, α y β, coinciden con la aplicación constante de G_i en $\{1_i\}$.

Grupoides

Ejemplos

2) La unión disjunta de grupos, $G = \bigcup_{i \in I} G_i$, es un grupoide: dados $a, b \in G$, la multiplicación $a.b$ está definida si y sólo si a y b pertenecen al mismo grupo G_i y entonces $a.b$ es el producto de ambos elementos en G_i.

Existe una identidad 1_i (el neutro del grupo G_i) para cada $i \in I$.

Las proyecciones, α y β, coinciden con la aplicación constante de G_i en $\{1_i\}$.

$G_{1_i} = G^{1_i} = G_{1_i}^{1_i} = G_i$.

Grupoides

Ejemplos

3) Si $M = G$, $\alpha(\gamma) = \beta(\gamma) = \gamma$ e $i(\gamma) = \gamma$, entonces G^2 es la diagonal de $G \times G$ y se obtiene el *grupoide trivial*.

Grupoides

Ejemplos

3) Si $M = G$, $\alpha(\gamma) = \beta(\gamma) = \gamma$ e $i(\gamma) = \gamma$, entonces G^2 es la diagonal de $G \times G$ y se obtiene el *grupoide trivial*.

$G_\gamma = G^\gamma = G_\gamma^\gamma = \{\gamma\}$.

Grupoides

Ejemplos

4) Dado un conjunto arbitrario X, se considera $G = X \times X$, M es la diagonal de G (identificada con X), y se define $\alpha(y,x) = x$, $\beta(y,x) = y$ e $i(x,y) = (y,x)$.

Grupoides

Ejemplos

4) Dado un conjunto arbitrario X, se considera $G = X \times X$, M es la diagonal de G (identificada con X), y se define $\alpha(y, x) = x$, $\beta(y, x) = y$ e $i(x, y) = (y, x)$.

   El conjunto de los pares componibles es $G^2 = \{((y, x), (x, z)) : x, y, z \in X\}$ y la multiplicación está dada por $(y, x).(x, z) = (y, z)$: es el *grupoide grosero*.

Grupoides

Ejemplos

4) Dado un conjunto arbitrario X, se considera $G = X \times X$, M es la diagonal de G (identificada con X), y se define $\alpha(y,x) = x$, $\beta(y,x) = y$ e $i(x,y) = (y,x)$.

El conjunto de los pares componibles es $G^2 = \{((y,x),(x,z)) : x,y,z \in X\}$ y la multiplicación está dada por $(y,x).(x,z) = (y,z)$: es el *grupoide grosero*.

$G_{(x,y)} = X \times \{y\}$, $G^{(x,y)} = \{x\} \times X$ y $G_{(x,y)}^{(x',y')} = \{(x',y)\}$.

Grupoides

Ejemplos

5) El *grafo G de una relación de equivalencia* R sobre M es un grupoide, donde G^0 es la diagonal y con las operaciones $\alpha(y,x) = x$, $\beta(y,x) = y$ e $i(x,y) = (y,x)$.

Grupoides

Ejemplos

5) El *grafo G de una relación de equivalencia* R sobre M es un grupoide, donde G^0 es la diagonal y con las operaciones $\alpha(y,x) = x$, $\beta(y,x) = y$ e $i(x,y) = (y,x)$.

El conjunto de los pares componibles es $G^2 = \{((y,x),(x,z)) \in G \times G\}$ y la multiplicación está dada por $(y,x).(x,z) = (y,z)$.

Grupoides

Ejemplos

5) El *grafo G de una relación de equivalencia* R sobre M es un grupoide, donde G^0 es la diagonal y con las operaciones $\alpha(y,x)=x$, $\beta(y,x)=y$ e $i(x,y)=(y,x)$.

El conjunto de los pares componibles es $G^2=\{((y,x),(x,z))\in G\times G\}$ y la multiplicación está dada por $(y,x).(x,z)=(y,z)$.

$G_x=\{(y,x):xRy\}$, $G^x=\{(x,y):xRy\}$ y $G_x^y=\{(y,x)\}$ si $\{y,x\}\in G$ y vacío en otro caso.

Homomorfismos de grupoides

Dados dos grupoides $G_1 \underset{\beta_1}{\overset{\alpha_1}{\rightrightarrows}} M_1$ y $G_2 \underset{\beta_2}{\overset{\alpha_2}{\rightrightarrows}} M_2$, un *homomorfismo de grupoides* de G_1 en G_2 es una aplicación $f\colon G_1 \longrightarrow G_2$, tal que:

Homomorfismos de grupoides

Dados dos grupoides $G_1 \underset{\beta_1}{\overset{\alpha_1}{\rightrightarrows}} M_1$ y $G_2 \underset{\beta_2}{\overset{\alpha_2}{\rightrightarrows}} M_2$, un *homomorfismo de grupoides* de G_1 en G_2 es una aplicación $f\colon G_1 \longrightarrow G_2$, tal que:

(i) si $(\gamma_2, \gamma_1) \in G_1^2$, entonces $(f(\gamma_2), f(\gamma_1)) \in G_2^2$, y

Homomorfismos de grupoides

Dados dos grupoides $G_1 \underset{\beta_1}{\overset{\alpha_1}{\rightrightarrows}} M_1$ y $G_2 \underset{\beta_2}{\overset{\alpha_2}{\rightrightarrows}} M_2$, un *homomorfismo de grupoides* de G_1 en G_2 es una aplicación $f\colon G_1 \longrightarrow G_2$, tal que:

(i) si $(\gamma_2, \gamma_1) \in G_1^2$, entonces $(f(\gamma_2), f(\gamma_1)) \in G_2^2$, y

(ii) y en tal caso, se verifica la igualdad $f(\gamma_2.\gamma_1) = f(\gamma_2).f(\gamma_1)$.

Homomorfismos de grupoides

Dados dos grupoides $G_1 \underset{\beta_1}{\overset{\alpha_1}{\rightrightarrows}} M_1$ y $G_2 \underset{\beta_2}{\overset{\alpha_2}{\rightrightarrows}} M_2$, un *homomorfismo de grupoides* de G_1 en G_2 es una aplicación $f\colon G_1 \longrightarrow G_2$, tal que:

(i) si $(\gamma_2, \gamma_1) \in G_1^2$, entonces $(f(\gamma_2), f(\gamma_1)) \in G_2^2$, y

(ii) y en tal caso, se verifica la igualdad $f(\gamma_2.\gamma_1) = f(\gamma_2).f(\gamma_1)$.

Tenemos así la categoría de grupoides y homomorfismos entre ellos.

Grupoides topológicos y de Lie

A partir de ahora, "diferenciable", significará de clase C^∞.

Grupoides topológicos y de Lie

A partir de ahora, "diferenciable", significará de clase C^∞.

$G \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} M$ es un *grupoide topológico localmente compacto* (resp. *de Lie*), si:

Grupoides topológicos y de Lie

A partir de ahora, "diferenciable", significará de clase C^∞.

$G \overset{\alpha}{\underset{\beta}{\rightrightarrows}} M$ es un *grupoide topológico localmente compacto* (resp. *de Lie*), si:

(i) G y M son espacios topológicos localmente compactos (resp., variedades diferenciables), donde M es de Hausdorff,

Grupoides topológicos y de Lie

A partir de ahora, "diferenciable", significará de clase C^∞.

$G \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} M$ es un *grupoide topológico localmente compacto* (resp. *de Lie*), si:

(i) G y M son espacios topológicos localmente compactos (resp., variedades diferenciables), donde M es de Hausdorff,

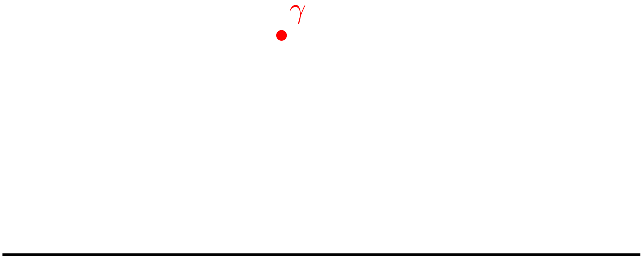
(ii) α, β, i y $\cdot$ son continuas (resp., diferenciables); α, β son abiertas (resp., submersiones) e i es un homeomorfismo (resp., un difeomorfismo).

Grupoides topológicos y de Lie

Un grupoide es *étale* si α y β son homeomorfismos locales.

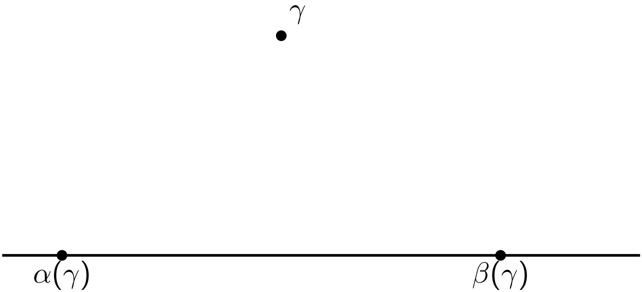
Grupoides topológicos y de Lie

Un grupoide es *étale* si α y β son homeomorfismos locales.



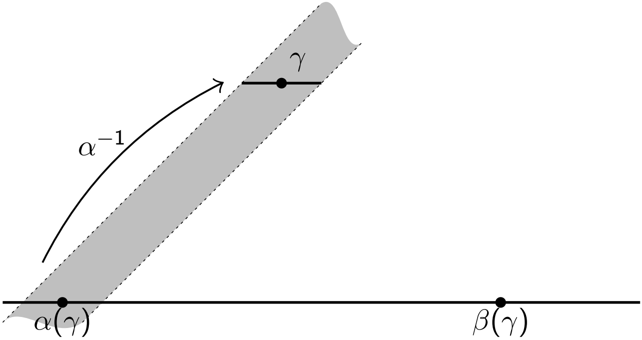
Grupoides topológicos y de Lie

Un grupoide es *étale* si α y β son homeomorfismos locales.



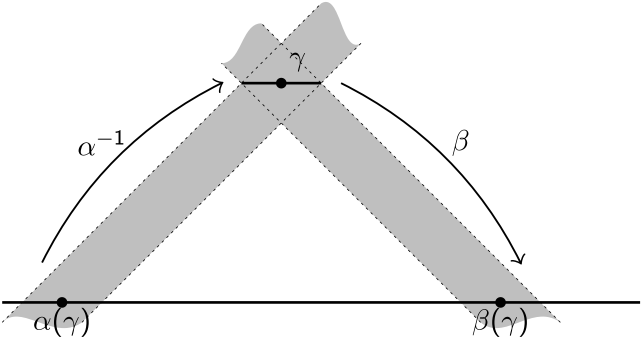
Grupoides topológicos y de Lie

Un grupoide es *étale* si α y β son homeomorfismos locales.



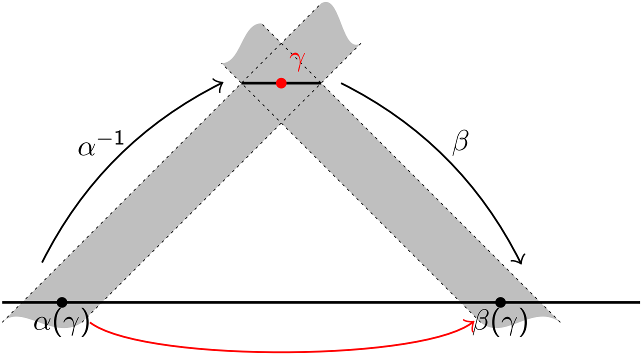
Grupoides topológicos y de Lie

Un grupoide es *étale* si α y β son homeomorfismos locales.



Grupoides topológicos y de Lie

Un grupoide es *étale* si α y β son homeomorfismos locales.



Ejemplos

Acción de un grupo de Lie sobre una variedad

Sea $\Phi \colon \Gamma \times M \longrightarrow M$ una acción diferenciable de un grupo de Lie conexo Γ sobre la variedad M. Queda definido un grupoide de Lie, de espacio total $G = \Gamma \times M$, espacio de unidades M y con las operaciones $\alpha(g,x) = x$, $\beta(g,x) = \Phi(g,x)$, $i(g,x) = (g^{-1}, \Phi(g,x))$ y si $x_2 = \Phi(g_1,x_1)$, la multiplicación está dada por $(g_2,x_2).(g_1,x_1) = (g_2 g_1, x_1)$.

Ejemplos

Acción de un grupo de Lie sobre una variedad

Sea $\Phi\colon \Gamma \times M \longrightarrow M$ una acción diferenciable de un grupo de Lie conexo Γ sobre la variedad M. Queda definido un grupoide de Lie, de espacio total $G = \Gamma \times M$, espacio de unidades M y con las operaciones $\alpha(g, x) = x$, $\beta(g, x) = \Phi(g, x)$, $i(g, x) = (g^{-1}, \Phi(g, x))$ y si $x_2 = \Phi(g_1, x_1)$, la multiplicación está dada por $(g_2, x_2).(g_1, x_1) = (g_2 g_1, x_1)$.

$Is(G)_x$ se puede identificar con el conjunto de los elementos de Γ que dejan a x fijo.

Ejemplos

Grupoide de homotopía de una variedad

Dada M una variedad diferenciable, se considera $\mathcal{P}(M)$ el conjunto de los caminos sobre M, provisto de la topología compacto-abierta.

Ejemplos

Grupoide de homotopía de una variedad

Dada M una variedad diferenciable, se considera $\mathcal{P}(M)$ el conjunto de los caminos sobre M, provisto de la topología compacto-abierta.

Una subbase de esta topología está dada por la familia

$$\sigma = \{(K, U) : K \text{ compacto } \subset [0,1], U \text{ abierto de } M\}$$

donde $(K, U) = \{\gamma \in \mathcal{P}(M) : \gamma(K) \subset U\}$.

Ejemplos

Grupoide de homotopía de una variedad

Sobre $\mathcal{P}(M)$ se define la relación de equivalencia abierta:

$$\gamma \sim \gamma', \text{ si } \gamma \text{ es homótopa a } \gamma' \text{ con extremidades fijas.}$$

Ejemplos

Grupoide de homotopía de una variedad

Sobre $\mathcal{P}(M)$ se define la relación de equivalencia abierta:

$$\gamma \sim \gamma', \text{ si } \gamma \text{ es homótopa a } \gamma' \text{ con extremidades fijas.}$$

Es decir, $\gamma \sim \gamma'$, si existe una aplicación continua $H\colon [0,1] \times [0,1] \longrightarrow M$, tal que $H(t,0) = \gamma(t)$, $H(t,1) = \gamma'(t)$, para cada $t \in [0,1]$ y $H(0,s) = \gamma(0) = \gamma'(0)$, $H(1,s) = \gamma(1) = \gamma'(1)$ para cada $s \in [0,1]$.

Ejemplos

Grupoide de homotopía de una variedad

El cociente por esta relación $\Pi_1(M) = \mathcal{P}(M)/\sim$, es un grupoide localmente compacto, de espacio de unidades M (identificado con las clases de los caminos constantes), $\alpha(\gamma) = \gamma(0)$, $\beta(\gamma) = \gamma(1)$ y la multiplicación y la inversión se obtienen a partir de la composición e inversión usual de caminos (si $\gamma, \gamma' \colon [0,1] \longrightarrow X$, tales que $\gamma(1) = \gamma'(0)$,

$$(\gamma' * \gamma)(t) = \begin{cases} \gamma(2t) & \text{si} \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{2}; \\ \gamma'(2t-1) & \text{si} \quad \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

El opuesto γ es $\gamma^{-1}(t) = \gamma(1-t)$.

Ejemplos

Grupoide de homotopía de una variedad

$(\alpha, \beta) \colon \Pi_1(M) \longrightarrow M \times M$ es una aplicación de revestimiento$*$: así sobre $\Pi_1(M)$ queda definida una estructura de variedad diferenciable -levantada de la de $M \times M$- compatible con la topología cociente, que hace de $\Pi_1(M)$ un grupoide de Lie, el *grupoide fundamental* de M.

Ejemplos

Grupoide de homotopía de una variedad

$(\alpha, \beta) \colon \Pi_1(M) \longrightarrow M \times M$ es una aplicación de revestimiento$*$: así sobre $\Pi_1(M)$ queda definida una estructura de variedad diferenciable -levantada de la de $M \times M$- compatible con la topología cociente, que hace de $\Pi_1(M)$ un grupoide de Lie, el *grupoide fundamental* de M.

$*$ Cada punto $(x, y) \in M \times M$ posee un entorno *distinguido*, es decir, un entorno $U \times V$ tal que $(\alpha, \beta)^{-1}(U \times V) = \bigcup_{i \in I} U_i$ es unión disjunta de abiertos conexos $\{U_i : i \in I\}$, cada uno de los cuales se aplica homeomórficamente sobre $U \times V$ por (α, β).

Ejemplos

Grupoide de homotopía de una variedad

Si $x \in M$, $\alpha\colon \Pi_1(M)^x \longrightarrow M$ (resp., $\beta\colon \Pi_1(M)_x \longrightarrow M$) es el revestimiento universal de M.

Ejemplos

Grupoide de homotopía de una variedad

Si $x \in M$, $\alpha\colon \Pi_1(M)^x \longrightarrow M$ (resp., $\beta\colon \Pi_1(M)_x \longrightarrow M$) es el revestimiento universal de M.

Para cada $x \in M$, $Is(\Pi_1(M))_x = \pi_1(M, x)$.

Homomorfismos de grupoides topológicos y de Lie

Dados dos grupoides topológicos (resp., de Lie) $G_1 \underset{\beta_1}{\overset{\alpha_1}{\rightrightarrows}} M_1$ y $G_2 \underset{\beta_2}{\overset{\alpha_2}{\rightrightarrows}} M_2$ un *homomorfismo* entre ellos, $f : G_1 \longrightarrow G_2$, es una aplicación continua (resp., diferenciable), que es además un homomorfismo de grupoides.

Homomorfismos de grupoides topológicos y de Lie

Dados dos grupoides topológicos (resp., de Lie) $G_1 \underset{\beta_1}{\overset{\alpha_1}{\rightrightarrows}} M_1$ y $G_2 \underset{\beta_2}{\overset{\alpha_2}{\rightrightarrows}} M_2$ un *homomorfismo* entre ellos, $f : G_1 \longrightarrow G_2$, es una aplicación continua (resp., diferenciable), que es además un homomorfismo de grupoides.

Tenemos así definidas las categorías de grupoides topológicos y de Lie (con los morfismos respectivos).

Homomorfismos de grupoides topológicos y de Lie

Dados dos grupoides topológicos (resp., de Lie) $G_1 \underset{\beta_1}{\overset{\alpha_1}{\rightrightarrows}} M_1$ y $G_2 \underset{\beta_2}{\overset{\alpha_2}{\rightrightarrows}} M_2$ un *homomorfismo* entre ellos, $f : G_1 \longrightarrow G_2$, es una aplicación continua (resp., diferenciable), que es además un homomorfismo de grupoides.

Tenemos así definidas las categorías de grupoides topológicos y de Lie (con los morfismos respectivos).

Pero hay *pocos* isomorfismos en las categorías anteriores.

La equivalencia de Morita

La noción de *equivalencia de Morita* es la adecuada para trabajar con C*-álgebras y K-teoría.

La equivalencia de Morita

La noción de *equivalencia de Morita* es la adecuada para trabajar con C*-álgebras y K-teoría.

Acciones de grupoides

Por brevedad, vamos a trabajar con grupoides de Lie (se hace de manera análoga para grupoides topológicos).

La equivalencia de Morita

La noción de *equivalencia de Morita* es la adecuada para trabajar con C*-álgebras y K-teoría.

Acciones de grupoides

Por brevedad, vamos a trabajar con grupoides de Lie (se hace de manera análoga para grupoides topológicos).

Sea $G \overset{\alpha}{\underset{\beta}{\rightrightarrows}} M$ un grupoide de Lie y Z una variedad localmente compacta, eventualmente no separada, diferenciable y provista de una aplicación diferenciable, $\rho\colon Z \longrightarrow M$.

La equivalencia de Morita

Sea $Z *_M G = \{(z, \gamma) \in Z \times G : \rho(z) = \beta(\gamma)\}$.

La equivalencia de Morita

Sea $Z *_M G = \{(z, \gamma) \in Z \times G : \rho(z) = \beta(\gamma)\}$.

Una *acción diferenciable a la derecha* de G sobre Z (una *G-acción a la derecha*) es una aplicación diferenciable: $\Phi \colon Z *_M G \longrightarrow Z$, denotada por $\Phi(z, \gamma) = z.\gamma$, tal que:

La equivalencia de Morita

Sea $Z *_M G = \{(z,\gamma) \in Z \times G : \rho(z) = \beta(\gamma)\}$.

Una *acción diferenciable a la derecha* de G sobre Z (una G-*acción a la derecha*) es una aplicación diferenciable: $\Phi\colon Z *_M G \longrightarrow Z$, denotada por $\Phi(z,\gamma) = z.\gamma$, tal que:

(i) $\rho(z.\gamma) = \alpha(\gamma)$, para cada $(z,\gamma) \in Z *_M G$,

La equivalencia de Morita

Sea $Z *_M G = \{(z,\gamma) \in Z \times G : \rho(z) = \beta(\gamma)\}$.

Una *acción diferenciable a la derecha* de G sobre Z (una *G-acción a la derecha*) es una aplicación diferenciable: $\Phi \colon Z *_M G \longrightarrow Z$, denotada por $\Phi(z,\gamma) = z.\gamma$, tal que:

(i) $\rho(z.\gamma) = \alpha(\gamma)$, para cada $(z,\gamma) \in Z *_M G$,

(ii) si una de las expresiones $(z.\gamma).\gamma'$ ó $z.(\gamma.\gamma')$ está definida, la otra también lo está y coinciden,

La equivalencia de Morita

Sea $Z *_M G = \{(z, \gamma) \in Z \times G : \rho(z) = \beta(\gamma)\}$.

Una *acción diferenciable a la derecha* de G sobre Z (una *G-acción a la derecha*) es una aplicación diferenciable: $\Phi\colon Z *_M G \longrightarrow Z$, denotada por $\Phi(z, \gamma) = z.\gamma$, tal que:

(i) $\rho(z.\gamma) = \alpha(\gamma)$, para cada $(z, \gamma) \in Z *_M G$,

(ii) si una de las expresiones $(z.\gamma).\gamma'$ ó $z.(\gamma.\gamma')$ está definida, la otra también lo está y coinciden,

(iii) para cada $z \in Z$, se tiene $z.\rho(z) = z$.

La equivalencia de Morita

Sea $Z *_M G = \{(z, \gamma) \in Z \times G : \rho(z) = \beta(\gamma)\}$.

Una *acción diferenciable a la derecha* de G sobre Z (una G-*acción a la derecha*) es una aplicación diferenciable: $\Phi\colon Z *_M G \longrightarrow Z$, denotada por $\Phi(z, \gamma) = z.\gamma$, tal que:

(i) $\rho(z.\gamma) = \alpha(\gamma)$, para cada $(z, \gamma) \in Z *_M G$,

(ii) si una de las expresiones $(z.\gamma).\gamma'$ ó $z.(\gamma.\gamma')$ está definida, la otra también lo está y coinciden,

(iii) para cada $z \in Z$, se tiene $z.\rho(z) = z$.

La órbita de $z \in Z$ bajo esta acción es $G(z) = \{z.\gamma : \gamma \in G\}$.

La equivalencia de Morita

Se dice que Z es un *G-espacio a la derecha* diferenciable, si Z es una variedad, no separada, diferenciable, con una G-acción diferenciable a la derecha dada.

La equivalencia de Morita

Se dice que Z es un *G-espacio a la derecha* diferenciable, si Z es una variedad, no separada, diferenciable, con una G-acción diferenciable a la derecha dada.

Ejemplo

Si se toman $Z = M$ y $\rho = id_M$, se tiene el conjunto $M *_M G = \{(x, \gamma) \in M \times G : \beta(\gamma) = x\}$. Se puede definir la G-acción $\Phi(x, \gamma) = \alpha(\gamma)$, para $(x, \gamma) \in M *_M G$.
Así, M es un G-espacio y para cada $x \in M$, la órbita de x es $G(x) = \alpha(G^x)$.

La equivalencia de Morita

Dados Z_1 y Z_2, dos G-espacios diferenciables a la derecha, una *G-aplicación diferenciable*, $f : Z_1 \longrightarrow Z_2$, es una aplicación diferenciable y G-equivariante, es decir, si $(z_1, \gamma) \in Z_1 *_M G$, entonces

La equivalencia de Morita

Dados Z_1 y Z_2, dos G-espacios diferenciables a la derecha, una *G-aplicación diferenciable*, $f: Z_1 \longrightarrow Z_2$, es una aplicación diferenciable y G-equivariante, es decir, si $(z_1, \gamma) \in Z_1 *_M G$, entonces

(i) $(f(z_1), \gamma) \in Z_2 *_M G$ y

La equivalencia de Morita

Dados Z_1 y Z_2, dos G-espacios diferenciables a la derecha, una *G-aplicación diferenciable*, $f : Z_1 \longrightarrow Z_2$, es una aplicación diferenciable y G-equivariante, es decir, si $(z_1, \gamma) \in Z_1 *_M G$, entonces

(i) $(f(z_1), \gamma) \in Z_2 *_M G$ y

(ii) $f(z_1.\gamma) = f(z_1).\gamma$.

La equivalencia de Morita

Si Z es un G-espacio, un *G-fibrado vectorial* sobre Z está definido por un G-espacio E y una G-aplicación, la *proyección*, $p\colon E \longrightarrow Z$, tales que:

La equivalencia de Morita

Si Z es un G-espacio, un *G-fibrado vectorial* sobre Z está definido por un G-espacio E y una G-aplicación, la *proyección*, $p\colon E \longrightarrow Z$, tales que:

(i) $p\colon E \longrightarrow Z$ es un fibrado vectorial complejo,

La equivalencia de Morita

Si Z es un G-espacio, un *G-fibrado vectorial* sobre Z está definido por un G-espacio E y una G-aplicación, la *proyección*, $p\colon E \longrightarrow Z$, tales que:

(i) $p\colon E \longrightarrow Z$ es un fibrado vectorial complejo,

(ii) para cada par $(z, \gamma) \in Z *_M G$, la aplicación $\phi\colon E_z \longrightarrow E_{z.\gamma}$ dada por $\phi(u) = u.\gamma$ es lineal.

La equivalencia de Morita

La acción de G sobre Z es *libre*, si dado $(z, \gamma) \in Z *_M G$, es $\gamma.z = z$ si y sólo si $\gamma \in M$.

La equivalencia de Morita

La acción de G sobre Z es *libre*, si dado $(z, \gamma) \in Z *_M G$, es $\gamma.z = z$ si y sólo si $\gamma \in M$.

Un G-espacio Z se dice *principal* si:

La equivalencia de Morita

La acción de G sobre Z es *libre*, si dado $(z, \gamma) \in Z *_M G$, es $\gamma.z = z$ si y sólo si $\gamma \in M$.

Un G-espacio Z se dice *principal* si:

(i) la aplicación $\Psi\colon Z *_M G \longrightarrow Z \times Z$, $\Psi(z, \gamma) = (z, z.\gamma)$ es propia (la imagen inversa de todo conjunto compacto es compacto),

La equivalencia de Morita

La acción de G sobre Z es *libre*, si dado $(z, \gamma) \in Z *_M G$, es $\gamma.z = z$ si y sólo si $\gamma \in M$.

Un G-espacio Z se dice *principal* si:

(i) la aplicación $\Psi \colon Z *_M G \longrightarrow Z \times Z$, $\Psi(z, \gamma) = (z, z.\gamma)$ es propia (la imagen inversa de todo conjunto compacto es compacto),

(ii) la acción es libre.

La equivalencia de Morita

La acción de G sobre Z es *libre*, si dado $(z, \gamma) \in Z *_M G$, es $\gamma.z = z$ si y sólo si $\gamma \in M$.

Un G-espacio Z se dice *principal* si:

(i) la aplicación $\Psi \colon Z *_M G \longrightarrow Z \times Z$, $\Psi(z, \gamma) = (z, z.\gamma)$ es propia (la imagen inversa de todo conjunto compacto es compacto),

(ii) la acción es libre.

En este caso, la proyección canónica $\pi \colon Z \longrightarrow {}^{Z}/_{G}$ es una submersión y el cociente ${}^{Z}/_{G}$ es localmente compacto y separado.

La equivalencia de Morita

Ejemplo

Si $G \overset{\alpha}{\underset{\beta}{\rightrightarrows}} M$ es un grupoide de Lie, y se considera $Z = G$ y $\rho = \alpha$, entonces $Z *_M G = G^2$.

La equivalencia de Morita

Ejemplo

Si $G \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} M$ es un grupoide de Lie, y se considera $Z = G$ y $\rho = \alpha$, entonces $Z *_M G = G^2$.

La multiplicación del grupoide es una G-acción natural a la derecha de G sobre si mismo. Esta acción es libre y G es un G-espacio principal.

La equivalencia de Morita

Ejemplo

Si $G \overset{\alpha}{\underset{\beta}{\rightrightarrows}} M$ es un grupoide de Lie, y se considera $Z = G$ y $\rho = \alpha$, entonces $Z *_M G = G^2$.

La multiplicación del grupoide es una G-acción natural a la derecha de G sobre si mismo. Esta acción es libre y G es un G-espacio principal.

Si $x \in M$, la órbita de este punto por la acción es $G(x) = G^x$.

La equivalencia de Morita

Una *equivalencia de Morita* entre dos grupoides de Lie G_1 y G_2 está dada por:

La equivalencia de Morita

Una *equivalencia de Morita* entre dos grupoides de Lie G_1 y G_2 está dada por:

(i) una variedad Z_f no separada, localmente compacta y diferenciable, provista de dos submersiones $r\colon Z_f \longrightarrow M_1$ y $s\colon Z_f \longrightarrow M_2$;

La equivalencia de Morita

Una *equivalencia de Morita* entre dos grupoides de Lie G_1 y G_2 está dada por:

(i) una variedad Z_f no separada, localmente compacta y diferenciable, provista de dos submersiones $r\colon Z_f \longrightarrow M_1$ y $s\colon Z_f \longrightarrow M_2$;

(ii) Z_f es un G_1-espacio principal a izquierda y un G_2-espacio principal a derecha;

La equivalencia de Morita

Una *equivalencia de Morita* entre dos grupoides de Lie G_1 y G_2 está dada por:

(i) una variedad Z_f no separada, localmente compacta y diferenciable, provista de dos submersiones $r\colon Z_f \longrightarrow M_1$ y $s\colon Z_f \longrightarrow M_2$;

(ii) Z_f es un G_1-espacio principal a izquierda y un G_2-espacio principal a derecha;

(iii) las dos acciones conmutan;

La equivalencia de Morita

Una *equivalencia de Morita* entre dos grupoides de Lie G_1 y G_2 está dada por:

(i) una variedad Z_f no separada, localmente compacta y diferenciable, provista de dos submersiones $r\colon Z_f \longrightarrow M_1$ y $s\colon Z_f \longrightarrow M_2$;

(ii) Z_f es un G_1-espacio principal a izquierda y un G_2-espacio principal a derecha;

(iii) las dos acciones conmutan;

(iv) r induce un difeomorfismo entre Z_f/G_2 y M_1 y s induce un difeomorfismo entre $G_1 \backslash Z_f$ y M_2.

Índice

La categoría de C*-álgebras

Una *C*-álgebra* A es un álgebra de Banach[(1)] compleja de norma $\|\cdot\|$ con una involución $(\cdot)^*$ tal que para cada $a \in A$ es $\|aa^*\| = \|a\|^2$.

La categoría de C*-álgebras

Una *C*-álgebra* A es un álgebra de Banach$^{(1)}$ compleja de norma $\|\cdot\|$ con una involución $(\cdot)^*$ tal que para cada $a \in A$ es $\|aa^*\| = \|a\|^2$.

$^{(1)}$ Es decir, es un álgebra provista de una norma $\|\cdot\|$, que verifica $\|ab\| \leq \|a\|\|b\|$, para $a, b \in A$ (lo que garantiza la continuidad de la norma) y respecto a la cual es completa.

La categoría de C*-álgebras

Una *C*-álgebra* A es un álgebra de Banach[(1)] compleja de norma $\|\cdot\|$ con una involución $(\cdot)^*$ tal que para cada $a \in A$ es $\|aa^*\| = \|a\|^2$.

[(1)] Es decir, es un álgebra provista de una norma $\|\cdot\|$, que verifica $\|ab\| \leq \|a\|\|b\|$, para $a, b \in A$ (lo que garantiza la continuidad de la norma) y respecto a la cual es completa.

Si A posee una unidad 1_A para el producto se dice que A es *unitaria*.

La categoría de C*-álgebras

Una involución es una operación $\cdot^* : A \to A$, tal que $(a+b)^* = a^* + b^*$, $(\lambda a)^* = \overline{\lambda} a^*$, $(ab)^* = b^* a^*$ y $(a^*)^* = a$ para $a, b \in A$ y $\lambda \in \mathbb{C}$.

La categoría de C*-álgebras

Una involución es una operación $\cdot^* : A \to A$, tal que $(a+b)^* = a^* + b^*$, $(\lambda a)^* = \overline{\lambda} a^*$, $(ab)^* = b^* a^*$ y $(a^*)^* = a$ para $a, b \in A$ y $\lambda \in \mathbb{C}$.

En el caso de C*-álgebras, la involución es una isometría de A: $\|a\|^2 = \|aa^*\| \leq \|a\| \|a^*\|$, luego $\|a\| \leq \|a^*\|$. Del mismo modo, $\|a^*\| \leq \|a^{**}\| = \|a\|$, es decir, es $\|a^*\| = \|a\|$.

La categoría de C*-álgebras

Un contrajemplo: *-álgebra de Banach que no es una C*-álgebra

Sea el álgebra de funciones continuas $C[-1,1]$ con la norma $\|f\| = \sup_{|t|\leq 1} |f(t)|$. Se define la involución $f^*(t) = \overline{f(-t)}$.

$C[-1,1]$ es una *-álgebra de Banach, tal que $\|f^*\| = \|f\|$ para cada $f \in C[-1,1]$.

La categoría de C*-álgebras

Un contrajemplo: *-álgebra de Banach que no es una C*-álgebra

Sea el álgebra de funciones continuas $C[-1,1]$ con la norma $\|f\| = \sup_{|t|\leq 1} |f(t)|$. Se define la involución $f^*(t) = \overline{f(-t)}$.
$C[-1,1]$ es una *-álgebra de Banach, tal que $\|f^*\| = \|f\|$ para cada $f \in C[-1,1]$.

No es una C*-álgebra: la aplicación

$$f(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t \leq 0 \\ t \text{ si } t \geq 0 \end{cases}$$

tiene norma 1 y $f^* f = 0$.

El ejemplo básico

Los operadores lineales acotados sobre un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$

Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert. Se toma $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ el conjunto de los operadores lineales acotados de $\mathcal{H}$, es decir: $f : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ es $f \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ si y sólo si $\|f\|_{\text{op}} = \sup_{\|x\| \leq 1} \|f(x)\|$ es finita.

El ejemplo básico

Los operadores lineales acotados sobre un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$

Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert. Se toma $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ el conjunto de los operadores lineales acotados de $\mathcal{H}$, es decir: $f : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ es $f \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ si y sólo si $\|f\|_{\text{op}} = \sup_{\|x\| \leq 1} \|f(x)\|$ es finita.

Se dota a $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ de las operaciones suma y producto punto a punto y la adjunción usual como involución (si $f \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$, f^* se define como $\langle f(x), x\rangle = \langle x, f^*(x)\rangle$).

El ejemplo básico

Los operadores lineales acotados sobre un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$

Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert. Se toma $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ el conjunto de los operadores lineales acotados de $\mathcal{H}$, es decir: $f : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ es $f \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ si y sólo si $\|f\|_{\text{op}} = \sup\limits_{\|x\| \leq 1} \|f(x)\|$ es finita.

Se dota a $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ de las operaciones suma y producto punto a punto y la adjunción usual como involución (si $f \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$, f^* se define como $\langle f(x), x \rangle = \langle x, f^*(x) \rangle$).

Con estas operaciones y la norma $\|\cdot\|_{\text{op}}$, $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ es una C*-álgebra.

La categoría de C*-álgebras

*-homomorfismos

Una aplicación $\phi : A \to B$ entre C*-álgebras es un **-homomorfismo* si es lineal, multiplicativa y $\phi(a^*) = \phi(a)^*$.

La categoría de C*-álgebras

*-homomorfismos

Una aplicación $\phi : A \to B$ entre C*-álgebras es un **-homomorfismo* si es lineal, multiplicativa y $\phi(a^*) = \phi(a)^*$.

Si A y B son unitarias y ϕ preserva la unidad, se dice que ϕ es unitario.

La categoría de C*-álgebras

*-homomorfismos

Una aplicación $\phi : A \to B$ entre C*-álgebras es un **-homomorfismo* si es lineal, multiplicativa y $\phi(a^*) = \phi(a)^*$.

Si A y B son unitarias y ϕ preserva la unidad, se dice que ϕ es unitario.

Un *-homomorfismo $\phi : A \to B$ es siempre contractivo, es decir, $\|\phi(a)\| \leq \|a\|$. Además, ϕ es inyectiva si y sólo si ϕ es una isometría.

Sub-C*-álgebras

Un subconjunto B de una C*-álgebra A es una *sub-*-álgebra* de A si es una subálgebra cerrada para la involución ($B^* \subseteq B$).

Sub-C*-álgebras

Un subconjunto B de una C*-álgebra A es una *sub-*-álgebra* de A si es una subálgebra cerrada para la involución ($B^* \subseteq B$).

Si además B es completo, se llama *sub-C*-álgebra* (B es una sub-*-álgebra cerrada).

Sub-C*-álgebras

Un subconjunto B de una C*-álgebra A es una *sub-*-álgebra* de A si es una subálgebra cerrada para la involución ($B^* \subseteq B$).

Si además B es completo, se llama *sub-C*-álgebra* (B es una sub-*-álgebra cerrada).

La clausura de una sub-*-álgebra es una C*-álgebra, ya que las operaciones algebraicas son continuas.

Sub-C*-álgebras

Un subconjunto B de una C*-álgebra A es una *sub-*-álgebra* de A si es una subálgebra cerrada para la involución ($B^* \subseteq B$).

Si además B es completo, se llama *sub-C*-álgebra* (B es una sub-*-álgebra cerrada).

La clausura de una sub-*-álgebra es una C*-álgebra, ya que las operaciones algebraicas son continuas.

La *C*-álgebra generada por un conjunto* $F \subseteq A$, $C^*(F)$, es la menor sub-C*-álgebra de A que contiene a F (la intersección de todas las sub-C*-álgebras de A que contienen a F).

Otro ejemplo importante

Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert. Un operador $u \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ se dice *compacto* si $u(D)$ es relativamente compacto, siendo D la bola unidad. El conjunto de los operadores compactos $\mathfrak{K}(\mathcal{H})$ es una sub-C*-álgebra de $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$.

Otro ejemplo importante

Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert. Un operador $u \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ se dice *compacto* si $u(D)$ es relativamente compacto, siendo D la bola unidad. El conjunto de los operadores compactos $\mathfrak{K}(\mathcal{H})$ es una sub-C*-álgebra de $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$.

$\mathfrak{K}(\mathcal{H})$ es la C*-álgebra generada por $\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n(\mathbb{C})$, donde $M_n(\mathbb{C})$ es el álgebra de las matrices cuadradas $n \times n$.

Otro ejemplo importante

Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert. Un operador $u \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ se dice *compacto* si $u(D)$ es relativamente compacto, siendo D la bola unidad. El conjunto de los operadores compactos $\mathfrak{K}(\mathcal{H})$ es una sub-C*-álgebra de $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$.

$\mathfrak{K}(\mathcal{H})$ es la C*-álgebra generada por $\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n(\mathbb{C})$, donde $M_n(\mathbb{C})$ es el álgebra de las matrices cuadradas $n \times n$.

Si $\mathcal{H}$ es de dimensión n, entonces todo operador acotado es compacto, y $\mathfrak{B}(\mathcal{H}) = \mathfrak{K}(\mathcal{H})$ se puede identificar con $M_n(\mathbb{C})$.

Unitarización

Toda C*-álgebra no unitaria se puede incluir como sub-C*-álgebra en un C*-álgebra unitaria: si A es no unitaria, se toma $\widetilde{A} = A \times \mathbb{C}$ con la suma coordenada a coordenada y el producto

$$(a, \alpha) \cdot (b, \beta) = (ab + \alpha b + \beta a, \alpha\beta).$$

Unitarización

Toda C*-álgebra no unitaria se puede incluir como sub-C*-álgebra en un C*-álgebra unitaria: si A es no unitaria, se toma $\widetilde{A} = A \times \mathbb{C}$ con la suma coordenada a coordenada y el producto

$$(a, \alpha) \cdot (b, \beta) = (ab + \alpha b + \beta a, \alpha\beta).$$

Se define en $\widetilde{A}$ la norma usual en el producto $\|(a, \alpha)\| = \|a\| + |\alpha|$ y la involución $(a, \alpha)^* = (a^*, \overline{\alpha})$.

Unitarización

Toda C*-álgebra no unitaria se puede incluir como sub-C*-álgebra en un C*-álgebra unitaria: si A es no unitaria, se toma $\widetilde{A} = A \times \mathbb{C}$ con la suma coordenada a coordenada y el producto

$$(a, \alpha) \cdot (b, \beta) = (ab + \alpha b + \beta a, \alpha\beta).$$

Se define en $\widetilde{A}$ la norma usual en el producto $\|(a, \alpha)\| = \|a\| + |\alpha|$ y la involución $(a, \alpha)^* = (a^*, \overline{\alpha})$.

Con estas operaciones norma e involución, $\widetilde{A}$ es una C*-álgebra unitaria con unidad $(0, 1)$.

Unitarización

La aplicación $i : A \to \widetilde{A}$, $a \mapsto (a, 0)$, es un *-monomorfismo isométrico que identifica A con $\{(a, 0)\}_{a \in A}$, que es un ideal de $\widetilde{A}$.

Unitarización

La aplicación $i : A \to \widetilde{A}$, $a \mapsto (a, 0)$, es un *-monomorfismo isométrico que identifica A con $\{(a, 0)\}_{a \in A}$, que es un ideal de $\widetilde{A}$.

De hecho se tiene la sucesión exacta corta *escindida*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\ i\ } \widetilde{A} \underset{\lambda}{\overset{\pi}{\rightleftarrows}} \mathbb{C} \cong \widetilde{A}/A \longrightarrow 0$$

donde $\pi(a, \alpha) = \alpha$ y $\lambda(\alpha) = (0, \alpha)$.

Unitarización

La aplicación $i : A \to \widetilde{A}$, $a \mapsto (a, 0)$, es un *-monomorfismo isométrico que identifica A con $\{(a,0)\}_{a \in A}$, que es un ideal de $\widetilde{A}$.

De hecho se tiene la sucesión exacta corta *escindida*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\ i\ } \widetilde{A} \underset{\lambda}{\overset{\pi}{\rightleftarrows}} \mathbb{C} \cong \widetilde{A}/A \longrightarrow 0$$

donde $\pi(a, \alpha) = \alpha$ y $\lambda(\alpha) = (0, \alpha)$.

Este proceso también se puede realizar para un álgebra unitaria, y $\widetilde{A}$ es *-isomorfa a $A \oplus \mathbb{C}$ con las operaciones coordenada a coordenada.

Representaciones

Toda C*-álgebra puede pensarse como una subálgebra autoadjunta y cerrada para la norma de $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$, donde $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert. Para probarlo, debemos hablar de *representaciones*.

Representaciones

Toda C*-álgebra puede pensarse como una subálgebra autoadjunta y cerrada para la norma de $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$, donde $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert. Para probarlo, debemos hablar de *representaciones*.

Una *representación* de una C*-álgebra A

es un par $(\pi, \mathcal{H})$, donde $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert y π es un $*$-homomorfismo de A en $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$.

Representaciones

Se llama *no degenerada* si el subespacio $\pi(A)\mathcal{H}$ es denso en $\mathcal{H}$, i.e., para cada $\xi \in \mathcal{H}$ no nulo, existe $x \in \pi(A)$ tal que $x\xi \neq 0$.

Representaciones

Se llama *no degenerada* si el subespacio $\pi(A)\mathcal{H}$ es denso en $\mathcal{H}$, i.e., para cada $\xi \in \mathcal{H}$ no nulo, existe $x \in \pi(A)$ tal que $x\xi \neq 0$.

Se llama *irreducible* si la subálgebra $\pi(A)$ de $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ no posee subespacios cerrados invariantes (excepto $\mathcal{H}$ y el subespacio nulo). Se denota por $Irr(A)$ el conjunto de las representaciones irreducibles de A.

Los estados de una C*-álgebra

El caracter positivo juega un importante papel en el estudio de las C*-álgebras: un elemento $x \in A$ se llama *positivo* si $x = a^*a$ para algún $a \in A$. El conjunto de los elementos positivos forma un cono convexo (es decir, si x es positivo λx lo es para cada $\lambda \geq 0$), cerrado en A.

Los estados de una C*-álgebra

El caracter positivo juega un importante papel en el estudio de las C*-álgebras: un elemento $x \in A$ se llama *positivo* si $x = a^* a$ para algún $a \in A$. El conjunto de los elementos positivos forma un cono convexo (es decir, si x es positivo λx lo es para cada $\lambda \geq 0$), cerrado en A.

Los *estados* de A, $S(A)$, son los funcionales continuos sobre A, $f\colon A \longrightarrow \mathbb{C}$ de norma 1 y positivos (llevan elementos positivos en elementos positivos).

La construcción de Gelfand-Naimark-Segal (GNS)

Dada una representación no degenerada $(\pi, \mathcal{H})$ de A y $\xi \in \mathcal{H}$ de norma 1, se puede definir $f \in S(A)$ por $f(a) = \langle \pi(a)\xi, \xi \rangle$.

La construcción de Gelfand-Naimark-Segal (GNS)

Dada una representación no degenerada $(\pi, \mathcal{H})$ de A y $\xi \in \mathcal{H}$ de norma 1, se puede definir $f \in S(A)$ por $f(a) = \langle \pi(a)\xi, \xi \rangle$.

Construcción de GNS

Recíprocamente, para cada $f \in S(A)$, existe una representación $(\pi_f, \mathcal{H}_f)$ de A, tal que $f(a) = \langle \pi_f(a)\xi, \xi \rangle$, para un vector adecuado $\xi \in \mathcal{H}_f$.

La construcción de Gelfand-Naimark-Segal (GNS)

Dada una representación no degenerada $(\pi, \mathcal{H})$ de A y $\xi \in \mathcal{H}$ de norma 1, se puede definir $f \in S(A)$ por $f(a) = \langle \pi(a)\xi, \xi \rangle$.

Construcción de GNS

Recíprocamente, para cada $f \in S(A)$, existe una representación $(\pi_f, \mathcal{H}_f)$ de A, tal que $f(a) = \langle \pi_f(a)\xi, \xi \rangle$, para un vector adecuado $\xi \in \mathcal{H}_f$.

En efecto:

Se define el producto preescalar sobre A: $\langle a, b \rangle_f = f(b^* a)$.

La construcción de Gelfand-Naimark-Segal (GNS)

Construcción de GNS

Se define el ideal a izquierda de A, $N = \{a \in A : f(a^*a) = 0\}$, de modo que la multiplicación a izquierda por elementos de A pasa al espacio prehilbertiano cociente A/N, que induce una representación $(\pi_f, \mathcal{H}_f)$ de A, sobre la compleción $\mathcal{H}_f$ de A/N.

La construcción de Gelfand-Naimark-Segal (GNS)

Construcción de GNS

Se define el ideal a izquierda de A, $N = \{a \in A : f(a^*a) = 0\}$, de modo que la multiplicación a izquierda por elementos de A pasa al espacio prehilbertiano cociente A/N, que induce una representación $(\pi_f, \mathcal{H}_f)$ de A, sobre la compleción $\mathcal{H}_f$ de A/N.

Si ξ es la imagen de la unidad de A en $\mathcal{H}_f$, entonces $f \in S(A)$ se recupera como $f(a) = \langle \pi_f(a)\xi, \xi \rangle$.

La construcción de Gelfand-Naimark-Segal (GNS)

Construcción de GNS

Se define el ideal a izquierda de A, $N = \{a \in A : f(a^*a) = 0\}$, de modo que la multiplicación a izquierda por elementos de A pasa al espacio prehilbertiano cociente A/N, que induce una representación $(\pi_f, \mathcal{H}_f)$ de A, sobre la compleción $\mathcal{H}_f$ de A/N.

Si ξ es la imagen de la unidad de A en $\mathcal{H}_f$, entonces $f \in S(A)$ se recupera como $f(a) = \langle \pi_f(a)\xi, \xi \rangle$.

Las representaciones irreducibles de A corresponden a los puntos extremos de $S(A)$ y se llaman *estados puros*.

La construcción de Gelfand-Naimark-Segal (GNS)

Un ejemplo

Toda medida de probabilidad μ sobre un espacio compacto separado M define el estado f sobre $C(M)$ dado por $f(a) = \int_M a d\mu$ (teorema de representación de Riesz).

La construcción de Gelfand-Naimark-Segal (GNS)

Un ejemplo

Toda medida de probabilidad μ sobre un espacio compacto separado M define el estado f sobre $C(M)$ dado por $f(a) = \int_M a d\mu$ (teorema de representación de Riesz).

Utilizando la construcción de GNS para este estado, $C(M)$ actúa por multiplicación de operadores sobre el espacio de Hilbert $L^2(M, \mu)$, y esto proporciona una representación $(\pi, L^2(M, \mu))$ de $C(M)$.

La categoría de C*-álgebras

Utilizando el teorema de Hahn-Banach, se puede probar que existen muchos estados sobre una C*-álgebra dada A.

La categoría de C*-álgebras

Utilizando el teorema de Hahn-Banach, se puede probar que existen muchos estados sobre una C*-álgebra dada A.

Teorema de Hahn-Banach: *Cualquier funcional lineal continuo* f *definido en un subespacio de un espacio vectorial normado tiene una extensión continua* $\hat{f}$ *a todo el espacio, de manera que el funcional y su extensión tienen la misma norma.*

La categoría de C*-álgebras

Combinando este hecho con la construcción de GNS, se deduce que toda C*-álgebra es isomorfa a una subálgebra autoadjunta y cerrada para la norma de $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$, más concretamente:

La categoría de C*-álgebras

Combinando este hecho con la construcción de GNS, se deduce que toda C*-álgebra es isomorfa a una subálgebra autoadjunta y cerrada para la norma de $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$, más concretamente:

Toda C-álgebra A posee una representación inyectiva como álgebra de operadores en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$.*
Si A es separable, $\mathcal{H}$ puede elegirse separable.

El caso conmutativo

Si M es un espacio localmente compacto, el álgebra

$$C_0(M) = \{f : M \to \mathbb{C} : \forall \epsilon > 0, \exists K_\epsilon \text{ compacto } \subset X$$

$$\text{tal que } |f(x)| < \epsilon, \text{ si } x \notin K_\epsilon\},$$

con la involución $f^*(x) = \overline{f(x)}$, para $x \in M$, es una C*-álgebra conmutativa. $C_0(M)$ es la compleción de $C_c(M)$.

El caso conmutativo

Si M es un espacio localmente compacto, el álgebra

$$C_0(M) = \{f : M \to \mathbb{C} : \forall \epsilon > 0, \exists K_\epsilon \text{ compacto } \subset X$$

$$\text{tal que } |f(x)| < \epsilon, \text{ si } x \notin K_\epsilon\},$$

con la involución $f^*(x) = \overline{f(x)}$, para $x \in M$, es una C*-álgebra conmutativa. $C_0(M)$ es la compleción de $C_c(M)$.

Teorema de Gelfand

Toda C-álgebra conmutativa es de la forma $C_0(M)$, para algún espacio localmente compacto y separado M*, es decir, la categoría de las C*-álgebras conmutativas y $*$-homomorfismos, es dual de la espacios localmente compactos y aplicaciones propias.

El caso conmutativo

Idea

Dada una C*-álgebra A, llamamos *espectro simple de A*, $Sp(A)$ a la familia de funcionales continuos sobre A, $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$ de norma menor o igual a 1. Si $A = C_0(M)$, $Sp(A) = \{\chi_x : x \in M\}$, donde $\chi_x \colon C_0(M) \longrightarrow \mathbb{C}$ se define por $\chi_x(f) = f(x)$. Esto nos da la idea para el caso general.

El caso conmutativo

Idea

Dada una C*-álgebra A, llamamos *espectro simple de A*, $Sp(A)$ a la familia de funcionales continuos sobre A, $f\colon A \longrightarrow \mathbb{C}$ de norma menor o igual a 1. Si $A = C_0(M)$, $Sp(A) = \{\chi_x : x \in M\}$, donde $\chi_x\colon C_0(M) \longrightarrow \mathbb{C}$ se define por $\chi_x(f) = f(x)$. Esto nos da la idea para el caso general.

Si A es una C*-álgebra conmutativa y $a \in A$, la aplicación $\hat{a}\colon Sp(A) \longrightarrow \mathbb{C}$, definida por $\hat{a}(\chi) = \chi(a)$ es continua.

El caso conmutativo

La *transformación de Gelfand* $\mathfrak{g}\colon A \longrightarrow C_0(Sp(A))$ se define por $\mathfrak{g}(a) = \hat{a}$.

El caso conmutativo

La *transformación de Gelfand* $\mathfrak{g}\colon A \longrightarrow C_0(Sp(A))$ se define por $\mathfrak{g}(a) = \hat{a}$.

$\mathfrak{g}$ es una isometría de C*-álgebras y la conmutatividad implica que $\chi \in Sp(A)$ es hermítico ($\overline{\chi(f)} = \chi(f^*)$).

El caso conmutativo

La *transformación de Gelfand* $\mathfrak{g}\colon A \longrightarrow C_0(Sp(A))$ se define por $\mathfrak{g}(a) = \hat{a}$.

$\mathfrak{g}$ es una isometría de C*-álgebras y la conmutatividad implica que $\chi \in Sp(A)$ es hermítico ($\overline{\chi(f)} = \chi(f^*)$).

Toda C-álgebra conmutativa es de la forma $C_0(M)$, para algún espacio localmente compacto y separado M.*

Generalización al caso no conmutativo

Dos representaciones irreducibles $(\pi_i, \mathcal{H}_i)$ $(i = 1, 2)$ de A, se llaman *unitariamente equivalentes* si existe un operador unitario $u\colon \mathcal{H}_2 \longrightarrow \mathcal{H}_1$, tal que $\pi_1(a) = u\pi_2(a)u^*$, para $a \in A$.

Generalización al caso no conmutativo

Dos representaciones irreducibles $(\pi_i, \mathcal{H}_i)$ $(i = 1, 2)$ de A, se llaman *unitariamente equivalentes* si existe un operador unitario $u \colon \mathcal{H}_2 \longrightarrow \mathcal{H}_1$, tal que $\pi_1(a) = u\pi_2(a)u^*$, para $a \in A$.

El *espectro de A*, $\widehat{A}$, es el conjunto de las clases de representaciones irreducibles unitariamente equivalentes de A.

Generalización al caso no conmutativo

El *espectro primitivo* de A, $Prim(A)$, es el conjunto de los ideales biláteros cerrados de A, que se obtienen como los núcleos de representaciones irreducibles de A.

Generalización al caso no conmutativo

El *espectro primitivo* de A, $Prim(A)$, es el conjunto de los ideales biláteros cerrados de A, que se obtienen como los núcleos de representaciones irreducibles de A.

Observación

Un ideal bilátero y cerrado I es siempre autoadjunto, y por lo tanto es una sub-C*-álgebra de A. El *álgebra cociente* A/I es una C*-álgebra con la norma $\|a+I\| = \text{ínf}\{\|a+x\| \mid x \in I\}$ y la aplicación cociente $\pi : A \to A/I$ es un *-homomorfismo.

Generalización al caso no conmutativo

$Prim(A)$ es un espacio topológico localmente compacto y no separado, con la topología de Jacobson: la clausura de un subconjunto $T \subset Prim(A)$ es $\overline{T} = \{I \in Prim(A) : \bigcap_{J \in T} J \subset I\}$.

Generalización al caso no conmutativo

$Prim(A)$ es un espacio topológico localmente compacto y no separado, con la topología de Jacobson: la clausura de un subconjunto $T \subset Prim(A)$ es $\overline{T} = \{I \in Prim(A) : \bigcap_{J \in T} J \subset I\}$.

Existe una aplicación canónica de $\widehat{A}$ en $Prim(A)$, que lleva una representación irreducible en su núcleo (se dota a $\widehat{A}$ de la topología imagen inversa de la topología de Jacobson).

Generalización al caso no conmutativo

Teorema de Gelfand: nueva versión

*Si A es conmutativa, entonces $\widehat{A}$ es localmente compacto y separado. Además, A es isométricamente *-isomorfa a $C_0(\widehat{A})$.*

Generalización al caso no conmutativo

Teorema de Gelfand: nueva versión

*Si A es conmutativa, entonces $\widehat{A}$ es localmente compacto y separado. Además, A es isométricamente *-isomorfa a $C_0(\widehat{A})$.*

Nota

Si A es conmutativa, entonces $S(A) \simeq \widehat{A} \simeq Prim(A)$.

Generalización al caso no conmutativo

Si A no es conmutativa, $\widehat{A}$ no será nunca separado, por ello $C_0(\widehat{A})$ *no dará suficiente información* sobre $\widehat{A}$.

Generalización al caso no conmutativo

Si A no es conmutativa, $\widehat{A}$ no será nunca separado, por ello $C_0(\widehat{A})$ *no dará suficiente información* sobre $\widehat{A}$.

A pesar de todo, A puede pensarse como en un álgebra de funciones con valores en un espacio de operadores, definidas sobre el espectro $\widehat{A}$.

Generalización al caso no conmutativo

Si A no es conmutativa, $\widehat{A}$ no será nunca separado, por ello $C_0(\widehat{A})$ *no dará suficiente información* sobre $\widehat{A}$.

A pesar de todo, A puede pensarse como en un álgebra de funciones con valores en un espacio de operadores, definidas sobre el espectro $\widehat{A}$.

De hecho, cada $a \in A$ da lugar a una aplicación $\widehat{a}$ sobre $\widehat{A}$, que lleva π en $\widehat{a}(\pi) = \pi(a)$. La aplicación $\pi \rightarrow \|\widehat{a}(\pi)\|$ es semicontinua inferiormente, y es continua si y sólo si $\widehat{A}$ es separado.

Generalización al caso no conmutativo

Ejemplo

Sea M un espacio topológico y R una relación de equivalencia sobre M. El espacio cociente M/R puede ser muy singular (pueden no existir funciones continuas no constantes sobre él).

Generalización al caso no conmutativo

Ejemplo

Sea M un espacio topológico y R una relación de equivalencia sobre M. El espacio cociente M/R puede ser muy singular (pueden no existir funciones continuas no constantes sobre él).

Ejemplo: $M = \{x, y\}$ y $R = M \times M$

La clave es que la operación conjuntista que identifica x e y, se traslada algebraicamente en la sustitución del álgebra conmutativa $C(\{x, y\})$ por la C*-álgebra:

$$M_2(\mathbb{C}) = \left\{ a = \begin{pmatrix} a_{xx} & a_{xy} \\ a_{yx} & a_{yy} \end{pmatrix} : a_{xx}, a_{xy}, a_{yx}, a_{yy} \in \mathbb{C} \right\}.$$

Generalización al caso no conmutativo

Ejemplo

Para el álgebra $C(\{x, y\})$, los estados puros correspondientes a x e y dan lugar (vía la construcción de GNS) a dos representaciones no equivalentes.

Generalización al caso no conmutativo

Ejemplo

Para el álgebra $C(\{x, y\})$, los estados puros correspondientes a x e y dan lugar (vía la construcción de GNS) a dos representaciones no equivalentes.

A diferencia de esto, los estados puros $\omega_x(a) = a_{xx}$ y $\omega_y(a) = a_{yy}$ de $M_2(\mathbb{C})$ conducen a representaciones irreducibles equivalentes, de donde la identificación $x \sim y$.

El cambio de los puntos por las funciones

Mundo conmutativo	Mundo no conmutativo
$M \equiv C_0(M)$	A C*-álgebra no commutativa
aplicación propia	morfismo
homeomorfismo	automorfismo
abierto en M	ideal en A
punto en M	ideal maximal en A
abierto denso en M	ideal esencial en A
cerrado en M	cociente en A
medida sobre M	estado sobre A

El cambio de los puntos por las funciones

Mundo conmutativo	**Mundo no conmutativo**
compacto en M	unitario de A
compactificación	adjunción de unidad
C_{II}	separabilidad
conexión	no existe idempotente no trivial
fibrado vectorial sobre M	módulo proyect. tipo finito en A
forma diferenciable de grado k	ciclo de Hochschild de dim k
Corriente de DeRham dim k	cociclo de Hochschild de dim k
homología de DeRham	cohomología cíclica de A

El cambio de los puntos por las funciones

Según el diccionario dos espacios topológicos X e Y (localmente compactos y Hausdorff) son homeomorfos si y sólo si $C_0(X)$ y $C_0(Y)$ son *-isomorfas.

El cambio de los puntos por las funciones

Según el diccionario dos espacios topológicos X e Y (localmente compactos y Hausdorff) son homeomorfos si y sólo si $C_0(X)$ y $C_0(Y)$ son *-isomorfas.

En el caso de un espacio X no localmente compacto y/o no separado, el problema es que $C_0(X)$ es un álgebra demasiado pequeña para contener información sobre X.

El cambio de los puntos por las funciones

Para espacios no Hausdorff esta forma de atacar el problema ya no funciona: dado el conjunto $\mathbf{3} = \{1, 2, 3\}$ y las topologías sobre él $\tau_1 = \{\mathbf{3}, \emptyset, \{1, 2\}\}$ y $\tau_2 = \{\mathbf{3}, \emptyset\}$, las C*-álgebras $C_0(\mathbf{3}, \tau_1)$ y $C_0(\mathbf{3}, \tau_2)$ son ambas *-isomorfas a $\mathbb{C}$.

El cambio de los puntos por las funciones

Para espacios no Hausdorff esta forma de atacar el problema ya no funciona: dado el conjunto $\mathbf{3} = \{1, 2, 3\}$ y las topologías sobre él $\tau_1 = \{\mathbf{3}, \emptyset, \{1, 2\}\}$ y $\tau_2 = \{\mathbf{3}, \emptyset\}$, las C*-álgebras $C_0(\mathbf{3}, \tau_1)$ y $C_0(\mathbf{3}, \tau_2)$ son ambas *-isomorfas a $\mathbb{C}$.

La condición de compacidad local es necesaria: existen ejemplos de espacios Hausdorff donde todas las aplicaciones continuas son constantes.

C*-álgebra de un grupo discreto $C^*(\Gamma)$

Sea Γ un grupo discreto. Se considera el espacio lineal $C[\Gamma]$ de todas las sumas finitas de la forma $\sum \lambda_g u_g$, con $\lambda_g \in \mathbb{C}$ y u_g un símbolo. Existe una única estructura de $*$-álgebra tal que $u_{g^{-1}} = u_g^*$ y $u_{gh} = u_g u_h$.

C*-álgebra de un grupo discreto $C^*(\Gamma)$

Sea Γ un grupo discreto. Se considera el espacio lineal $C[\Gamma]$ de todas las sumas finitas de la forma $\sum \lambda_g u_g$, con $\lambda_g \in \mathbb{C}$ y u_g un símbolo. Existe una única estructura de $*$-álgebra tal que $u_{g^{-1}} = u_g^*$ y $u_{gh} = u_g u_h$.

Se define la norma

$$\| \sum \lambda_g u_g \| = \sup\{ \| \sum \lambda_g \pi(g) \| : \pi \text{ representación unitaria de } \Gamma \}$$

La compleción de $C[\Gamma]$ para esta norma es $C^*(\Gamma)$.

Ejemplos

$C(\mathbb{S}^1)$

La C*-álgebra engendrada por un único generador u con las relaciones $u^*u = uu^* = 1$, es decir $C^*(\mathbb{Z})$, es isomorfa a $C(\mathbb{S}^1)$.

Ejemplos

$C(\mathbb{S}^1)$

La C*-álgebra engendrada por un único generador u con las relaciones $u^*u = uu^* = 1$, es decir $C^*(\mathbb{Z})$, es isomorfa a $C(\mathbb{S}^1)$.

$C(\mathbb{T}^n)$

La C*-álgebra engendrada por $\{u_1, \cdots, u_n\}$, con las relaciones $u_i^* u_i = u_i u_i^* = 1$ y $u_i u_j = u_j u_i$, es decir $C^*(\mathbb{Z}^n)$, es $C(\mathbb{T}^n)$.

Ejemplos

Nota

Esto tiene mucho que ver con los *caracteres de grupos abelianos* (localmente compactos) Γ: si $\widehat{\Gamma} = \{c \colon \Gamma \longrightarrow \mathbb{S}^1 : \text{ lineal}\}$, dotado de cierta topología (*grupo dual* de Γ), se demuestra que $C^*(\Gamma) = C_0(\widehat{\Gamma})$. Y $\widehat{\mathbb{Z}} = \mathbb{S}^1$ ($\theta \in \mathbb{S}^1$ induce $c_\theta \in \widehat{\mathbb{Z}}$ por $c_\theta(n) = \theta^n$).

Ejemplos

Nota

Esto tiene mucho que ver con los *caracteres de grupos abelianos* (localmente compactos) Γ: si $\widehat{\Gamma} = \{c : \Gamma \longrightarrow \mathbb{S}^1 : \text{ lineal}\}$, dotado de cierta topología (*grupo dual* de Γ), se demuestra que $C^*(\Gamma) = C_0(\widehat{\Gamma})$. Y $\widehat{\mathbb{Z}} = \mathbb{S}^1$ ($\theta \in \mathbb{S}^1$ induce $c_\theta \in \widehat{\mathbb{Z}}$ por $c_\theta(n) = \theta^n$).

$C(\mathbb{S}^n)$

La C*-álgebra engendrada por $\{h_0, \cdots, h_n\}$, con las relaciones

$h_i = h_i^*$, $h_i h_j = h_j h_i$ y $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} h_i^2 = 1$, es $C(\mathbb{S}^n)$.

Ejemplos

$A \rtimes_\alpha \Gamma$

Si Γ es un grupo discreto que actúa por automorfismos $\{\alpha_g : g \in \Gamma\}$ sobre una C*-álgebra A, el producto cruzado $A \rtimes_\alpha \Gamma$ es el ideal engendrado por A en la C*-álgebra $C^*(A, \Gamma)$, con generadores $\{a \in A, u_g : g \in \Gamma\}$, y relaciones las de A, las de $C^*(\Gamma)$ y además $u_g a u_g^* = \alpha_g(a)$, si $a \in A$ y $g \in \Gamma$.

C*-álgebra de un grupo

Sea G un grupo localmente compacto. Sea el álgebra involutiva $C_c(G)$ de las funciones continuas con valores complejos y con soporte compacto sobre G. La multiplicación viene dada por el producto convolución:

$$a * b(s) = \int_G a(t)b(t^{-1}s)dt$$

y la involución se define por $a^*(s) = \overline{a(s^{-1})}\Delta(s)^{-1}$, donde ds es la medida de Haar a izquierda sobre G y Δ es la función modular.

C*-álgebra de un grupo

Nota 1

La *medida de Haar* a izquierda sobre G es la única (salvo multiplicación por constantes positivas) medida de Borel sobre G invariante por traslaciones a izquierda.

C*-álgebra de un grupo

Nota 1

La *medida de Haar* a izquierda sobre G es la única (salvo multiplicación por constantes positivas) medida de Borel sobre G invariante por traslaciones a izquierda.

Nota 2

La traslación a derecha de una medida de Haar invariante a izquierda es también invariante a izquierda. Por ello, existe una única función Δ, la *función modular*, que verifica que para cada conjunto de Borel A es $ds(At^{-1}) = \Delta(t)ds(A)$.

C*-álgebra de un grupo

El álgebra de Banach (que en general no es una C*-álgebra) $L^1(G)$ es la compleción de $C_c(G)$ con respecto a la norma

$$\|a\|_1 = \int_G \|a(s)\| ds.$$

C*-álgebra de un grupo

El álgebra de Banach (que en general no es una C*-álgebra) $L^1(G)$ es la compleción de $C_c(G)$ con respecto a la norma

$$\|a\|_1 = \int_G \|a(s)\| ds.$$

La *C*-álgebra de grupo* $C^*(G)$, es la compleción de $L^1(G)$ con respecto a la norma $\|a\| = \sup_\pi \|\pi(a)\|$, donde el supremo se toma sobre todas las representaciones no degeneradas $(\pi, \mathcal{H})$ de $L^1(G)$.

C*-álgebra de un grupo

Si se define el espectro $\widehat{G}$ de G como el conjunto de todas las representaciones unitarias$^{(1)}$ irreducibles continuas de G, la aplicación de $\widehat{G}$ en $\widehat{C^*(G)}$ dada por: $U \to \pi_U$ ($\pi_U(a) = \int_G a(s)U(s)ds \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$, $a(s) \in \mathbb{C}$ y $U(s) \in \mathfrak{U}(\mathcal{H})$) es una biyección: esto prueba que $C^*(G)$ contiene toda la información sobre las representaciones unitarias de G y es un buen sustituto del espacio dual de G en el caso no conmutativo.

C*-álgebra de un grupo

Si se define el espectro $\widehat{G}$ de G como el conjunto de todas las representaciones unitarias[1] irreducibles continuas de G, la aplicación de $\widehat{G}$ en $\widehat{C^*(G)}$ dada por: $U \to \pi_U$ ($\pi_U(a) = \int_G a(s)U(s)ds \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$, $a(s) \in \mathbb{C}$ y $U(s) \in \mathfrak{U}(\mathcal{H})$) es una biyección: esto prueba que $C^*(G)$ contiene toda la información sobre las representaciones unitarias de G y es un buen sustituto del espacio dual de G en el caso no conmutativo.

[1] Son representaciones que toman valores en los operadores unitarios de un espacio de Hilbert $\mathfrak{U}(\mathcal{H})$, donde $f \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ es unitario, si $f^*f = ff^* = 1_{\mathcal{H}}$.

C*-álgebra reducida de un grupo

Sea la *representación regular izquierda* $(\lambda, L^2(G))$ de $L^1(G)$, dada por $\lambda(a)\xi = a * \xi$, para $a \in L^1(G)$ y $\xi \in L^2(G)$: está bien definido, porque $L^1(G) * L^2(G) \subset L^2(G)$ y $\|a * \xi\|_2 \leq \|a\|_1 \|\xi\|_2$.

C*-álgebra reducida de un grupo

Sea la *representación regular izquierda* $(\lambda, L^2(G))$ de $L^1(G)$, dada por $\lambda(a)\xi = a * \xi$, para $a \in L^1(G)$ y $\xi \in L^2(G)$: está bien definido, porque $L^1(G) * L^2(G) \subset L^2(G)$ y $\|a * \xi\|_2 \leq \|a\|_1 \|\xi\|_2$.

La representación regular izquierda es inyectiva; corresponde a la representación del grupo $U\colon G \longrightarrow \mathfrak{B}(L^2(G))$ dada por $U(s)\xi(t) = \xi(s^{-1}t)$.

C*-álgebra reducida de un grupo

La *C*-álgebra reducida*

$C_r^*(G)$ es la C*-subálgebra de $\mathfrak{B}(L^2(G))$ generada por $\lambda(L^1(G))$.

C*-álgebra reducida de un grupo

La *C*-álgebra reducida*

$C_r^*(G)$ es la C*-subálgebra de $\mathfrak{B}(L^2(G))$ generada por $\lambda(L^1(G))$.

La aplicación identidad de $L^1(G)$ induce una sobreyección canónica de $C^*(G)$ en $C_r^*(G)$, que es un isomorfismo si y sólo si G es un grupo *promediable*, es decir, si existe un funcional continuo no nulo F sobre $L^\infty(G)$ que es invariante a izquierda ($F(f_s) = F(f)$, donde $f_s(t) = f(s^{-1}t)$).

Grupos mediables

Una caracterización equivalente del *caracter promediable* es que cada representación irreducible de G está débilmente contenida en la representación regular izquierda o que el conjunto $\{\lambda\}$ es denso en $\widehat{G}$, provisto de la topología de Jacobson.

Grupos mediables

Una caracterización equivalente del *caracter promediable* es que cada representación irreducible de G está débilmente contenida en la representación regular izquierda o que el conjunto $\{\lambda\}$ es denso en $\widehat{G}$, provisto de la topología de Jacobson.

Los grupos abelianos, los compactos y los resolubles son promediables.

Grupos mediables

Una caracterización equivalente del *caracter promediable* es que cada representación irreducible de G está débilmente contenida en la representación regular izquierda o que el conjunto $\{\lambda\}$ es denso en $\widehat{G}$, provisto de la topología de Jacobson.

Los grupos abelianos, los compactos y los resolubles son promediables.

Los grupos de Lie semisimples no compactos y los grupos libres no abelianos son no promediables.

C*-álgebra de una acción

Un *sistema dinámico* es una terna (A, G, α), donde A es una C*-álgebra, G un grupo localmente compacto y $\alpha \colon G \longrightarrow Aut(A)$ un homomorfismo de grupos, de modo que la aplicación $s \to \alpha_s(a)$ de G en A es continua, para cada $a \in A$.

C*-álgebra de una acción

Un *sistema dinámico* es una terna (A, G, α), donde A es una C*-álgebra, G un grupo localmente compacto y $\alpha \colon G \longrightarrow Aut(A)$ un homomorfismo de grupos, de modo que la aplicación $s \to \alpha_s(a)$ de G en A es continua, para cada $a \in A$.

Esta definición está motivada por el hecho de que una acción continua de un grupo G sobre un espacio compacto M, da lugar a una acción continua de G sobre la C*-álgebra $C(M)$.

C*-álgebra de una acción

La C*-álgebra *producto cruzado* $A \rtimes_\alpha G$ es una especie de álgebra de grupo *torcida* con coeficientes en A. Si $A = \mathbb{C}$, el producto cruzado será isomorfo a $C^*(G)$.

C*-álgebra de una acción

La C*-álgebra *producto cruzado* $A \rtimes_\alpha G$ es una especie de álgebra de grupo *torcida* con coeficientes en A. Si $A = \mathbb{C}$, el producto cruzado será isomorfo a $C^*(G)$.

Sea $C_c(G, A)$ el espacio lineal de las funciones continuas de G en A con soporte compacto. Se hace de $C_c(G, A)$ una $*$-álgebra definiendo el producto $a * b(s) = \int_G a(t)\alpha_t(b(t^{-1}s))dt$ y la involución $a^*(s) = \alpha_s(a(s^{-1})^*)\Delta(s^{-1})$.

C*-álgebra de una acción

La norma L^1 sobre $C_c(G, A)$ viene dada por $\|a\|_1 = \int_G \|a(t)\| dt$. La compleción de $C_c(G, A)$ con respecto a la norma L^1 se denota por $L^1(G, A)$, y es un álgebra de Banach involutiva.

C*-álgebra de una acción

La norma L^1 sobre $C_c(G, A)$ viene dada por $\|a\|_1 = \int_G \|a(t)\| dt$. La compleción de $C_c(G, A)$ con respecto a la norma L^1 se denota por $L^1(G, A)$, y es un álgebra de Banach involutiva.

El producto cruzado $A \rtimes_\alpha G$ es la compleción de $L^1(G, A)$ con respecto a la norma $\|a\| = \sup_\pi \|\pi(a)\|$, donde $(\pi, \mathcal{H})$ recorre el conjunto de las representaciones no degeneradas de $L^1(G, A)$.

C*-álgebra de una acción

La correspondencia biunívoca entre las representaciones unitarias de un grupo G y las representaciones no degeneradas de $C^*(G)$, se generaliza a los productos cruzados:

C*-álgebra de una acción

La correspondencia biunívoca entre las representaciones unitarias de un grupo G y las representaciones no degeneradas de $C^*(G)$, se generaliza a los productos cruzados:

Una *representación covariante* de (A, G, α) es un par (π, U), donde $(\pi, \mathcal{H})$ es una representación de A y $U \colon G \longrightarrow \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ es una representación unitaria, satisfaciendo $\pi(\alpha_s(a)) = U(s)\pi(a)U(s)^*$ para cada $s \in G$ y $a \in A$.

C*-álgebra de una acción

Para cada representación no degenerada, $(\widetilde{\pi}, \mathcal{H})$ de $A \rtimes_\alpha G$, existe una única representación covariante (π, U) de (A, G, α) tal que:

$$\widetilde{\pi}(f) = \int_G \pi(f(t))U(t)dt,$$

para cada $f \in L^1(G)$.

C*-álgebra de una acción

Para cada representación no degenerada, $(\widetilde{\pi}, \mathcal{H})$ de $A \rtimes_\alpha G$, existe una única representación covariante (π, U) de (A, G, α) tal que:

$$\widetilde{\pi}(f) = \int_G \pi(f(t))U(t)dt,$$

para cada $f \in L^1(G)$.

Recíprocamente, para cada representación covariante, la fórmula anterior define una representación única no degenerada del producto cruzado.

C*-álgebra reducida de una acción

Sea una representación inyectiva $(\pi, \mathcal{H})$ de A. Se puede definir una representación, $(\pi', L^2(G, \mathcal{H}))$ de A, por la fórmula

$$\pi'(a)\xi(t) = \pi(\alpha_{t^{-1}}(a))(\xi)(t).$$

C*-álgebra reducida de una acción

Sea una representación inyectiva $(\pi, \mathcal{H})$ de A. Se puede definir una representación, $(\pi', L^2(G, \mathcal{H}))$ de A, por la fórmula

$$\pi'(a)\xi(t) = \pi(\alpha_{t^{-1}}(a))(\xi)(t).$$

Sea $U \colon G \longrightarrow \mathfrak{B}(L^2(G, \mathcal{H}))$ la representación unitaria dada por $U(s)\xi(t) = \xi(s^{-1}t)$. Tras identificar $L^2(G, \mathcal{H})$ con $L^2(G) \otimes \mathcal{H}$, se tiene $U(s) = \lambda(s) \otimes id_H$, donde λ es la representación regular izquierda de G.

C*-álgebra reducida de una acción

El par (π', U) es una representación covariante del sistema dinámico (A, G, α). Sea $(\widetilde{\pi}, L^2(G, \mathcal{H}))$ la representación de $L^1(G, A)$ definida por la anterior.

C*-álgebra reducida de una acción

El par (π', U) es una representación covariante del sistema dinámico (A, G, α). Sea $(\widetilde{\pi}, L^2(G, \mathcal{H}))$ la representación de $L^1(G, A)$ definida por la anterior.

El producto cruzado reducido $A \rtimes_{\alpha,r} G$ es la C*-álgebra de operadores actuando sobre $\mathfrak{B}(L^2(G, \mathcal{H}))$ generada por $\widetilde{\pi}(L^1(G, A))$. Coincide con $\widetilde{\pi}(A \rtimes_{\alpha} G)$.

C*-álgebra reducida de una acción

El par (π', U) es una representación covariante del sistema dinámico (A, G, α). Sea $(\widetilde{\pi}, L^2(G, \mathcal{H}))$ la representación de $L^1(G, A)$ definida por la anterior.

El producto cruzado reducido $A \rtimes_{\alpha,r} G$ es la C*-álgebra de operadores actuando sobre $\mathfrak{B}(L^2(G, \mathcal{H}))$ generada por $\widetilde{\pi}(L^1(G, A))$. Coincide con $\widetilde{\pi}(A \rtimes_\alpha G)$.

Existe una sobreyección canónica de $A \rtimes_\alpha G$ en $A \rtimes_{\alpha,r} G$. Se puede probar que esta aplicación es un isomorfismo, si G es promediable (si y sólo si G actúa sobre A de *manera promediable*).

Ejemplos

Si $A = \mathbb{C}$ y α es trivial, el producto cruzado $\mathbb{C} \rtimes_\alpha G$ es $C^*(G)$;

Ejemplos

Si $A = \mathbb{C}$ y α es trivial, el producto cruzado $\mathbb{C} \rtimes_\alpha G$ es $C^*(G)$;

Si G actúa por homeomorfismos sobre un espacio localmente compacto M (por $*$-automorfismos sobre $C_0(M)$), $C_0(M) \rtimes G$ es la C*-álgebra *grupo de transformaciones*. Si la acción es libre y propia, $C_0(M) \rtimes G$ es isomorfa a $C_0(M/G) \otimes \mathfrak{K}(L^2(G))$;

Ejemplos

Si $A = \mathbb{C}$ y α es trivial, el producto cruzado $\mathbb{C} \rtimes_\alpha G$ es $C^*(G)$;

Si G actúa por homeomorfismos sobre un espacio localmente compacto M (por $*$-automorfismos sobre $C_0(M)$), $C_0(M) \rtimes G$ es la C*-álgebra *grupo de transformaciones*. Si la acción es libre y propia, $C_0(M) \rtimes G$ es isomorfa a $C_0(M/G) \otimes \mathfrak{K}(L^2(G))$;

Si A y G son arbitrarias y α es trivial, el producto cruzado es el producto tensorial $A \otimes C^*(G)$.

La equivalencia de Morita entre C*-álgebras

Sea A una C*-álgebra y $\mathcal{E}$ un A-módulo a derecha. Se dice que $\mathcal{E}$ es un *A-módulo de Hilbert*, si está provisto de un producto interior con valores en A, $\langle , \rangle_A \colon \mathcal{E} \times \mathcal{E} \longrightarrow A$, lineal con respecto a la segunda variable ($\lambda\langle\xi,\eta\rangle_A = \langle\xi,\lambda\eta\rangle_A$) y antilineal con respecto a la primera ($\lambda\langle\xi,\eta\rangle_A = \langle\overline{\lambda}\xi,\eta\rangle_A$), tal que, si $\xi,\eta \in \mathcal{E}$ y $a \in A$, entonces:

La equivalencia de Morita entre C*-álgebras

Sea A una C*-álgebra y $\mathcal{E}$ un A-módulo a derecha. Se dice que $\mathcal{E}$ es un *A-módulo de Hilbert*, si está provisto de un producto interior con valores en A, $\langle , \rangle_A \colon \mathcal{E} \times \mathcal{E} \longrightarrow A$, lineal con respecto a la segunda variable ($\lambda\langle \xi, \eta \rangle_A = \langle \xi, \lambda\eta \rangle_A$) y antilineal con respecto a la primera ($\lambda\langle \xi, \eta \rangle_A = \langle \overline{\lambda}\xi, \eta \rangle_A$), tal que, si $\xi, \eta \in \mathcal{E}$ y $a \in A$, entonces:

(i) $\langle \xi, \eta \rangle_A = \langle \eta, \xi \rangle_A^*$;

La equivalencia de Morita entre C*-álgebras

Sea A una C*-álgebra y $\mathcal{E}$ un A-módulo a derecha. Se dice que $\mathcal{E}$ es un *A-módulo de Hilbert*, si está provisto de un producto interior con valores en A, $\langle , \rangle_A \colon \mathcal{E} \times \mathcal{E} \longrightarrow A$, lineal con respecto a la segunda variable ($\lambda\langle\xi,\eta\rangle_A = \langle\xi,\lambda\eta\rangle_A$) y antilineal con respecto a la primera ($\lambda\langle\xi,\eta\rangle_A = \langle\overline{\lambda}\xi,\eta\rangle_A$), tal que, si $\xi,\eta \in \mathcal{E}$ y $a \in A$, entonces:

(i) $\langle\xi,\eta\rangle_A = \langle\eta,\xi\rangle_A^*$;

(ii) $\langle\xi,\eta a\rangle_A = \langle\xi,\eta\rangle_A a$ y $\langle\xi a,\eta\rangle_A = a^*\langle\xi,\eta\rangle_A$;

La equivalencia de Morita entre C*-álgebras

Sea A una C*-álgebra y $\mathcal{E}$ un A-módulo a derecha. Se dice que $\mathcal{E}$ es un *A-módulo de Hilbert*, si está provisto de un producto interior con valores en A, $\langle , \rangle_A \colon \mathcal{E} \times \mathcal{E} \longrightarrow A$, lineal con respecto a la segunda variable ($\lambda\langle \xi, \eta \rangle_A = \langle \xi, \lambda\eta \rangle_A$) y antilineal con respecto a la primera ($\lambda\langle \xi, \eta \rangle_A = \langle \overline{\lambda}\xi, \eta \rangle_A$), tal que, si $\xi, \eta \in \mathcal{E}$ y $a \in A$, entonces:

(i) $\langle \xi, \eta \rangle_A = \langle \eta, \xi \rangle_A^*$;

(ii) $\langle \xi, \eta a \rangle_A = \langle \xi, \eta \rangle_A a$ y $\langle \xi a, \eta \rangle_A = a^* \langle \xi, \eta \rangle_A$;

(iii) $\langle \xi, \xi \rangle_A \geq 0$ ($\langle \xi, \xi \rangle_A$ es positivo como elemento de A) y $\langle \xi, \xi \rangle_A = 0$ si y sólo si $\xi = 0$;

La equivalencia de Morita entre C*-álgebras

Sea A una C*-álgebra y $\mathcal{E}$ un A-módulo a derecha. Se dice que $\mathcal{E}$ es un *A-módulo de Hilbert*, si está provisto de un producto interior con valores en A, $\langle , \rangle_A \colon \mathcal{E} \times \mathcal{E} \longrightarrow A$, lineal con respecto a la segunda variable ($\lambda\langle \xi, \eta\rangle_A = \langle \xi, \lambda\eta\rangle_A$) y antilineal con respecto a la primera ($\lambda\langle \xi, \eta\rangle_A = \langle \overline{\lambda}\xi, \eta\rangle_A$), tal que, si $\xi, \eta \in \mathcal{E}$ y $a \in A$, entonces:

(i) $\langle \xi, \eta\rangle_A = \langle \eta, \xi\rangle_A^*$;

(ii) $\langle \xi, \eta a\rangle_A = \langle \xi, \eta\rangle_A a$ y $\langle \xi a, \eta\rangle_A = a^*\langle \xi, \eta\rangle_A$;

(iii) $\langle \xi, \xi\rangle_A \geq 0$ ($\langle \xi, \xi\rangle_A$ es positivo como elemento de A) y $\langle \xi, \xi\rangle_A = 0$ si y sólo si $\xi = 0$;

(iv) la aplicación $n \colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $n(\xi) = \|\langle \xi, \xi\rangle_A\|^{1/2}$, es una norma de espacio vectorial completo sobre $\mathcal{E}$.

La equivalencia de Morita entre C*-álgebras

Un A-módulo de Hilbert $\mathcal{E}$ es *lleno*, si el producto interior sobre $\mathcal{E}$ con valores en A, $\langle , \rangle_A$, genera A como ideal bilátero cerrado.

La equivalencia de Morita entre C*-álgebras

Un A-módulo de Hilbert $\mathcal{E}$ es *lleno*, si el producto interior sobre $\mathcal{E}$ con valores en A, $\langle , \rangle_A$, genera A como ideal bilátero cerrado.

Dos C*-álgebras A y B son *Morita-equivalentes*, si existe un B-módulo de Hilbert lleno $\mathcal{E}$, tal que A es isomorfo a $\mathfrak{K}_B(\mathcal{E})$, i.e. si coinciden *salvo matrices finitas* (como $\mathbb{C}$ y $M_2(\mathbb{C})$), equivalentemente, si es $A \otimes \mathfrak{K} \simeq B \otimes \mathfrak{K}$.

La equivalencia de Morita entre C*-álgebras

Un A-módulo de Hilbert $\mathcal{E}$ es *lleno*, si el producto interior sobre $\mathcal{E}$ con valores en A, $\langle , \rangle_A$, genera A como ideal bilátero cerrado.

Dos C*-álgebras A y B son *Morita-equivalentes*, si existe un B-módulo de Hilbert lleno $\mathcal{E}$, tal que A es isomorfo a $\mathfrak{K}_B(\mathcal{E})$, i.e. si coinciden *salvo matrices finitas* (como $\mathbb{C}$ y $M_2(\mathbb{C})$), equivalentemente, si es $A \otimes \mathfrak{K} \simeq B \otimes \mathfrak{K}$.

Es la buena noción de equivalencia, ya que la K-teoría *no distingue* C*-álgebras Morita-equivalentes.

Índice

Sistemas de Haar sobre grupoides

Sobre grupos existe la noción de *medida de Haar*, que debemos generalizar al caso de grupoides.

Sistemas de Haar sobre grupoides

Sobre grupos existe la noción de *medida de Haar*, que debemos generalizar al caso de grupoides.

Sea G un grupoide localmente compacto. Un *sistema de Haar a izquierda* es un conjunto de medidas $\{\lambda^u \mid u \in G^0\}$ cumpliendo:

Sistemas de Haar sobre grupoides

Sobre grupos existe la noción de *medida de Haar*, que debemos generalizar al caso de grupoides.

Sea G un grupoide localmente compacto. Un *sistema de Haar a izquierda* es un conjunto de medidas $\{\lambda^u \mid u \in G^0\}$ cumpliendo:

(i) el soporte de la medida λ^u es $\alpha^{-1}(u)$;

Sistemas de Haar sobre grupoides

Sobre grupos existe la noción de *medida de Haar*, que debemos generalizar al caso de grupoides.

Sea G un grupoide localmente compacto. Un *sistema de Haar a izquierda* es un conjunto de medidas $\{\lambda^u \mid u \in G^0\}$ cumpliendo:

(i) el soporte de la medida λ^u es $\alpha^{-1}(u)$;

(ii) *continuidad* $\forall f \in C_c(G)$, $\lambda(f) : G^0 \to \mathbb{C}$ dada por $\lambda(f)(u) = \int f d\lambda^u$ es continua;

Sistemas de Haar sobre grupoides

Sobre grupos existe la noción de *medida de Haar*, que debemos generalizar al caso de grupoides.

Sea G un grupoide localmente compacto. Un *sistema de Haar a izquierda* es un conjunto de medidas $\{\lambda^u \mid u \in G^0\}$ cumpliendo:

(i) el soporte de la medida λ^u es $\alpha^{-1}(u)$;

(ii) *continuidad* $\forall f \in C_c(G)$, $\lambda(f) : G^0 \to \mathbb{C}$ dada por $\lambda(f)(u) = \int f d\lambda^u$ es continua;

(iii) *invariancia a izquierda* para $x \in G$ y $f \in C_c(G)$

$$\int f(x.y) d\lambda^{\alpha(x)}(y) = \int f(y) d\lambda^{\beta(x)}(y)$$

Sistemas de Haar sobre grupoides

La integral está bien definida: $f(x.y)$ sólo está definido cuando $(x, y) \in G^2$; por (i), $sop(\lambda^{\alpha(x)}) = \beta^{-1} \circ \alpha(x)$, luego sólo los puntos $y \in \beta^{-1} \circ \alpha(x)$ son importantes para esta integral, y para ellos $\beta(y) = \alpha(x)$.

Sistemas de Haar sobre grupoides

La integral está bien definida: $f(x.y)$ sólo está definido cuando $(x, y) \in G^2$; por (i), $sop(\lambda^{\alpha(x)}) = \beta^{-1} \circ \alpha(x)$, luego sólo los puntos $y \in \beta^{-1} \circ \alpha(x)$ son importantes para esta integral, y para ellos $\beta(y) = \alpha(x)$.

Existe la noción de sistema de Haar a derecha $\{\lambda_u\}$, análoga a la dada, salvo que en (iii) se sustituye $x.y$ por $y.x$. En cierto sentido, ambas nociones son equivalentes, ya que se puede obtener un sistema de Haar a derecha a partir de uno a izquierda sin más que tomar las medidas $\lambda_u = \lambda^u$.
Obviamente, haciendo la misma transformación, se obtiene un sistema de Haar a izquierda a partir de uno a derecha.

Sistemas de Haar sobre grupoides

Los grupoides topológicos no poseen de manera automática sistemas de Haar. Y además, de tenerlos, pueden ser esencialmente distintos.

Sistemas de Haar sobre grupoides

Los grupoides topológicos no poseen de manera automática sistemas de Haar. Y además, de tenerlos, pueden ser esencialmente distintos.

Sea G un grupoide en el que G^0 es abierto entonces se cumplen:

(i) para cada $u \in G^0$, los conjuntos G^u y G_u son discretos;

Sistemas de Haar sobre grupoides

Los grupoides topológicos no poseen de manera autómática sistemas de Haar. Y además, de tenerlos, pueden ser esencialmente distintos.

Sea G un grupoide en el que G^0 es abierto entonces se cumplen:

(i) para cada $u \in G^0$, los conjuntos G^u y G_u son discretos;

(ii) si existe un sistema de Haar, es precisamente el sistema de las medidas de contar salvo reescalado por una función positiva;

Sistemas de Haar sobre grupoides

Los grupoides topológicos no poseen de manera autómática sistemas de Haar. Y además, de tenerlos, pueden ser esencialmente distintos.

Sea G un grupoide en el que G^0 es abierto entonces se cumplen:

(i) para cada $u \in G^0$, los conjuntos G^u y G_u son discretos;

(ii) si existe un sistema de Haar, es precisamente el sistema de las medidas de contar salvo reescalado por una función positiva;

(iii) si existe un sistema de Haar a izquierda (o derecha), G es étale.

Sistemas de Haar sobre grupoides

Dado G un grupoide, un G-conjunto es un subconjunto O de G tal que α y β son inyectivas sobre él. Es equivalente exigir que $O.i(O) = i(O).O \subseteq G^0$.

Sistemas de Haar sobre grupoides

Dado G un grupoide, un G-conjunto es un subconjunto O de G tal que α y β son inyectivas sobre él. Es equivalente exigir que $O.i(O) = i(O).O \subseteq G^0$.

Dado un grupoide localmente compacto y Hausdorff G, son equivalentes:

Sistemas de Haar sobre grupoides

Dado G un grupoide, un G-conjunto es un subconjunto O de G tal que α y β son inyectivas sobre él. Es equivalente exigir que $O.i(O) = i(O).O \subseteq G^0$.

Dado un grupoide localmente compacto y Hausdorff G, son equivalentes:

(i) G^0 es abierto en G y admite un sistema de Haar a izquierda;

Sistemas de Haar sobre grupoides

Dado G un grupoide, un G-conjunto es un subconjunto O de G tal que α y β son inyectivas sobre él. Es equivalente exigir que $O.i(O) = i(O).O \subseteq G^0$.

Dado un grupoide localmente compacto y Hausdorff G, son equivalentes:

(i) G^0 es abierto en G y admite un sistema de Haar a izquierda;

(ii) β es un homeomorfismo local;

Sistemas de Haar sobre grupoides

Dado G un grupoide, un G-conjunto es un subconjunto O de G tal que α y β son inyectivas sobre él. Es equivalente exigir que $O.i(O) = i(O).O \subseteq G^0$.

Dado un grupoide localmente compacto y Hausdorff G, son equivalentes:

(i) G^0 es abierto en G y admite un sistema de Haar a izquierda;
(ii) β es un homeomorfismo local;
(iii) la aplicación producto $. : G^2 \to G$ es un homeomorfismo local;

Sistemas de Haar sobre grupoides

Dado G un grupoide, un G-conjunto es un subconjunto O de G tal que α y β son inyectivas sobre él. Es equivalente exigir que $O.i(O) = i(O).O \subseteq G^0$.

Dado un grupoide localmente compacto y Hausdorff G, son equivalentes:

(i) G^0 es abierto en G y admite un sistema de Haar a izquierda;
(ii) β es un homeomorfismo local;
(iii) la aplicación producto $. : G^2 \rightarrow G$ es un homeomorfismo local;
(iv) G posee una base de G-conjuntos.

La C*-álgebra de un grupoide

Sea G un grupoide étale, Hausdorff y localmente compacto. Como G es Hausdorff, G^0 es cerrado en G y G^2 es cerrado en $G \times G$.

La C*-álgebra de un grupoide

Sea G un grupoide étale, Hausdorff y localmente compacto. Como G es Hausdorff, G^0 es cerrado en G y G^2 es cerrado en $G \times G$.

Se toma $C_c(G)$ el espacio vectorial complejo de las aplicaciones continuas de soporte compacto definidas sobre G. En este conjunto se puede definir una convolución

$$f * g(x) = \int f(x,y) g\big(i(y)\big) d\lambda^{\alpha(x)}(y),$$

y una involución $f^*(x) = \overline{f\big(i(x)\big)}$.

La C*-álgebra de un grupoide

El espacio vectorial $C_c(G)$ con la convolución como producto y la involución dada es una *-álgebra.

La C*-álgebra de un grupoide

El espacio vectorial $C_c(G)$ con la convolución como producto y la involución dada es una *-álgebra.

Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert. Para cada $x, y \in \mathcal{H}$ se tiene una *seminorma* dada por $\|u\|_{x,y} = |\langle u(x), y \rangle|$.

La C*-álgebra de un grupoide

El espacio vectorial $C_c(G)$ con la convolución como producto y la involución dada es una *-álgebra.

Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert. Para cada $x, y \in \mathcal{H}$ se tiene una *seminorma* dada por $\|u\|_{x,y} = |\langle u(x), y \rangle|$.

Se dota a $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ de la topología generada por estas seminormas (una sucesión de operadores en $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$, $\{A_n\}$ converge a $A \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ si y sólo si $\{\langle A_n(x), y \rangle\}$ converge a $\langle A(x), y \rangle$ para $x, y \in \mathcal{H}$.
La topología así generada es la *topología débil de operadores*.

La C*-álgebra de un grupoide

Sea $K \subset G$ compacto. Se define una *seminorma* en $C_c(G)$ como

$$\|f\|_K = \sup_{x \in K} |f(x)|.$$

La *topología límite inductivo* sobre $C_c(G)$ viene dada por la convergencia: $f_n \to f$ si y sólo si $\|f - f_n\|_K \to 0$ para cada compacto $K \subset G$.

La C*-álgebra de un grupoide

Sea $K \subset G$ compacto. Se define una *seminorma* en $C_c(G)$ como

$$\|f\|_K = \sup_{x \in K} |f(x)|.$$

La *topología límite inductivo* sobre $C_c(G)$ viene dada por la convergencia: $f_n \to f$ si y sólo si $\|f - f_n\|_K \to 0$ para cada compacto $K \subset G$.

Acabamos de dotar a $C_c(G)$ y a $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ de dos topologías, a partir de las cuales se introduce el concepto de *representación*, que permitirá definir una norma en $C_c(G)$.

La C*-álgebra de un grupoide

Sea G un grupoide localmente compacto y Hausdorff con un sistema de Haar a izquierda $\{\lambda^u\}$. Una *representación* de $C_c(G)$ en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es un *-homomorfismo continuo $\pi : C_c(G) \to \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ tal que el espacio generado por la imagen $\langle \pi(f)(x) \mid f \in C_c(G), x \in \mathcal{H} \rangle$ sea denso en $\mathcal{H}$.

La C*-álgebra de un grupoide

Sea G un grupoide localmente compacto y Hausdorff con un sistema de Haar a izquierda $\{\lambda^u\}$. Una *representación* de $C_c(G)$ en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es un *-homomorfismo continuo $\pi : C_c(G) \to \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ tal que el espacio generado por la imagen $\langle \pi(f)(x) \mid f \in C_c(G), x \in \mathcal{H} \rangle$ sea denso en $\mathcal{H}$.

La representación es *acotada* si $\|\pi(f)\|_{\text{op}} \leq \|f\|_{\text{I}}$ para cada $f \in C_c(G)$, donde

$$\|f\|_{\text{I}} = \text{máx}\left\{ \sup_{u \in G^0} \int |f| d\lambda^u, \sup_{u \in G^0} \int |f| d\lambda_u \right\}.$$

La C*-álgebra de un grupoide

Se define en $C_c(G)$ la norma:

$$\|f\| = \sup\{\|\pi(f)\|_{op} \mid \pi \text{ es una representación acotada de } C_c(G)\}.$$

La C*-álgebra de un grupoide

Se define en $C_c(G)$ la norma:

$$\|f\| = \sup\{\|\pi(f)\|_{\text{op}} \mid \pi \text{ es una representación acotada de } C_c(G)\}.$$

Bajo ciertas condiciones sobre G se puede asegurar que todas las representaciones son acotadas.

La C*-álgebra de un grupoide

Se define en $C_c(G)$ la norma:

$$\|f\| = \sup\{\|\pi(f)\|_{\text{op}} \mid \pi \text{ es una representación acotada de } C_c(G)\}.$$

Bajo ciertas condiciones sobre G se puede asegurar que todas las representaciones son acotadas.

Las operaciones de $C_c(G)$ son continuas para esta norma, lo que permite asegurar que la compleción de $C_c(G)$ con respecto a la norma anterior es una C*-álgebra, $C^*(G)$, la *C*-álgebra (maximal) de G*.

La C*-álgebra de un grupoide

Propiedad universal de $C^*(G)$

Sea $\phi : C_c(G) \to A$ un *-homomorfismo, donde A es una C*-álgebra. Existe un único *-homomorfismo $\phi^* : C^*(G) \to A$ que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd} C_c(G) \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, "i"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & A \\ & C^*(G) \arrow[ur, "\phi^*"'] & \end{tikzcd}$$

donde $i : C_c(G) \to C^*(G)$ es la inclusión natural.

La C*-álgebra de un grupoide

Propiedad universal de $C^*(G)$

Si

$$0 \longrightarrow C_c(G_1) \xrightarrow{F} C_c(G_2) \xrightarrow{G} C_c(G_3) \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta, la sucesión

$$0 \longrightarrow C^*(G_1) \xrightarrow{F^*} C^*(G_2) \xrightarrow{G^*} C^*(G_3) \longrightarrow 0$$

también lo es.

La C*-álgebra reducida de un grupoide

Se considera otra norma distinta en $C_c(G)$ (suponemos que todas las representaciones de $C_c(G)$ son acotadas): para cada $u \in G^0$, sean $\mathcal{H}_u = L^2(G_u, \lambda^u)$ y la *representación reducida* $\pi_u : C_c(G) \to \mathfrak{B}(\mathcal{H}_u)$

$$\big(\pi_u(f)(\phi)\big)(x) = \int_{G^u} f(x.y)\phi\big(i(y)\big)d\lambda^u(y),$$

donde $f \in C_c(G)$, $\phi \in L^2(G_u, \lambda^u)$ y $x \in G_u$. Como $x \in G_u$ y $y \in sop(\lambda^u) = G^u$, es $\alpha(x) = \beta(y)$ y por lo tanto $x.y$ está definido. Equivalentemente, se puede definir la representación reducida como $\pi_u(f)(\phi) = f * \phi|_{s^{-1}(u)}$.

La C*-álgebra reducida de un grupoide

Con este conjunto de representaciones se define la *norma reducida* como $\|f\|_{\mathrm{red}} = \sup\{\|\pi_u(f)\|_{\mathrm{op}} \mid u \in G^0\}$.

La C*-álgebra reducida de un grupoide

Con este conjunto de representaciones se define la *norma reducida* como $\|f\|_{\mathrm{red}} = \sup\{\|\pi_u(f)\|_{\mathrm{op}} \mid u \in G^0\}$.

La compleción de $C_c(G)$ con la norma reducida, $C^*_{\mathrm{red}}(G)$, es la *C*-álgebra reducida de G*.

La C*-álgebra reducida de un grupoide

Con este conjunto de representaciones se define la *norma reducida* como $\|f\|_{\text{red}} = \sup\{\|\pi_u(f)\|_{\text{op}} \mid u \in G^0\}$.

La compleción de $C_c(G)$ con la norma reducida, $C^*_{\text{red}}(G)$, es la *C*-álgebra reducida de* G.

Al haber supuesto que todas las normas son acotadas se tiene que $\|f\|_{\text{red}} \leq \|f\|$ para cada $f \in C_c(G)$. Si $\{f_n\}$ es de Cauchy para la norma $\|\cdot\|$, es también de Cauchy para la norma reducida.
Así existe un *-epimorfismo (puede verse como una aplicación cociente) $C^*(G) \longrightarrow C^*_{\text{red}}(G)$, definido por $[\{f_n\}] \mapsto [\{f_n\}]_{\text{red}}$.

La C*-álgebra reducida de un grupoide

$C^*_{\text{red}}(G)$ tiene como ventaja frente a $C^*(G)$, la sencillez de la norma, lo que permite hacer cálculos concretos.

La C*-álgebra reducida de un grupoide

$C^*_{\text{red}}(G)$ tiene como ventaja frente a $C^*(G)$, la sencillez de la norma, lo que permite hacer cálculos concretos.

$C^*(G)$ y $C^*_{\text{red}}(G)$ son isomorfas en algunos casos, lo que permite aprovechar la sencillez de la norma reducida y la propiedad universal de $C^*(G)$.
Por ejemplo, si G es un grupoide *promediable* (generalización del concepto del mismo nombre para grupos), sus C*-álgebras reducida y maximal son iguales.

La equivalencia de Morita

Proposición

Si $G_1 \overset{\alpha_1}{\underset{\beta_1}{\rightrightarrows}} M_1$ *y* $G_2 \overset{\alpha_2}{\underset{\beta_2}{\rightrightarrows}} M_2$ *son grupoides Morita-equivalentes, entonces* $C^*_{red}(G_1)$ *y* $C^*_{red}(G_2)$ *son C*-álgebras Morita-equivalentes.*

Ejemplo: acción de un grupo

Una acción continua Φ de un grupo localmente compacto Γ sobre un espacio localmente compacto M, puede mirarse como un grupoide topológico con un sistema de Haar: se toma $\Gamma_\Phi = \Gamma \times M$, $\Gamma_\Phi^0 = M$, $\alpha(g,x) = x$, $\beta(g,x) = \Phi(g,x)$, el inverso de (g,x) es $(g^{-1}, \Phi(g,x))$ y el producto $(g, \Phi(h,x))(h,x) = (gh,x)$.

Ejemplo: acción de un grupo

Una acción continua Φ de un grupo localmente compacto Γ sobre un espacio localmente compacto M, puede mirarse como un grupoide topológico con un sistema de Haar: se toma $\Gamma_\Phi = \Gamma \times M$, $\Gamma_\Phi^0 = M$, $\alpha(g,x) = x$, $\beta(g,x) = \Phi(g,x)$, el inverso de (g,x) es $(g^{-1}, \Phi(g,x))$ y el producto $(g, \Phi(h,x))(h,x) = (gh, x)$.

El sistema de Haar sobre Γ_Φ se define de manera canónica a través de la medida de Haar sobre Γ.

Ejemplo: acción de un grupo

Una acción continua Φ de un grupo localmente compacto Γ sobre un espacio localmente compacto M, puede mirarse como un grupoide topológico con un sistema de Haar: se toma $\Gamma_\Phi = \Gamma \times M$, $\Gamma_\Phi^0 = M$, $\alpha(g,x) = x$, $\beta(g,x) = \Phi(g,x)$, el inverso de (g,x) es $(g^{-1}, \Phi(g,x))$ y el producto $(g, \Phi(h,x))(h,x) = (gh, x)$.

El sistema de Haar sobre Γ_Φ se define de manera canónica a través de la medida de Haar sobre Γ.

$C^*(\Gamma_\Phi)$ es isomorfo a la C*-álgebra producto cruzado $C_0(M) \rtimes \Gamma$.

Ejemplo: relaciones de equivalencia

Sea R una relación de equivalencia sobre un espacio locamente compacto M tal que R es cerrado en $M \times M$. Entonces, R es un grupoide topológico, cuyo espacio de unidades es M, $\alpha(x, y) = x$, $\beta(x, y) = y$ y el producto $(x, y)(y, z) = (x, z)$.

Ejemplo: relaciones de equivalencia

Sea R una relación de equivalencia sobre un espacio locamente compacto M tal que R es cerrado en $M \times M$. Entonces, R es un grupoide topológico, cuyo espacio de unidades es M, $\alpha(x, y) = x$, $\beta(x, y) = y$ y el producto $(x, y)(y, z) = (x, z)$.

Se supone que existe un sistema de Haar $\{\lambda^x\}_{x \in M}$. El soporte de λ^x es la clase de equivalencia de x: la propiedad de invarianza significa exactamente que λ^x depende sólo de la clase.

Ejemplo: relaciones de equivalencia

Sea R una relación de equivalencia sobre un espacio locamente compacto M tal que R es cerrado en $M \times M$. Entonces, R es un grupoide topológico, cuyo espacio de unidades es M, $\alpha(x, y) = x$, $\beta(x, y) = y$ y el producto $(x, y)(y, z) = (x, z)$.

Se supone que existe un sistema de Haar $\{\lambda^x\}_{x \in M}$. El soporte de λ^x es la clase de equivalencia de x: la propiedad de invarianza significa exactamente que λ^x depende sólo de la clase.

El producto sobre $C_c(R)$ es $f * g(x, y) = \int_R f(x, z) g(z, y) d\lambda^x(z)$: se obtiene $C^*(R)$ y $C_r^*(R)$ como antes.

Índice

Grupoides realizando foliaciones (regulares)

Dado un grupoide de Lie $G \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} M$, para cada $\gamma \in G$, la aplicación:

$$L_\gamma \colon G^{\alpha(\gamma)} \longrightarrow G^{\beta(\gamma)},$$

definida por $L_\gamma(\lambda) = \gamma.\lambda$, es un difeomorfismo de β-fibras, de inversa $L_{i(\gamma)}$. Es la *traslación a izquierda* por γ.

Grupoides realizando foliaciones (regulares)

Dado un grupoide de Lie $G \overset{\alpha}{\underset{\beta}{\rightrightarrows}} M$, para cada $\gamma \in G$, la aplicación:

$$L_\gamma \colon G^{\alpha(\gamma)} \longrightarrow G^{\beta(\gamma)},$$

definida por $L_\gamma(\lambda) = \gamma.\lambda$, es un difeomorfismo de β-fibras, de inversa $L_{i(\gamma)}$. Es la *traslación a izquierda* por γ.

Se define también la *traslación a derecha*:

$$R_\gamma \colon G_{\beta(\gamma)} \longrightarrow G_{\alpha(\gamma)},$$

por $R_\gamma(\lambda) = \lambda.\gamma$, que es un difeomorfismo de α-fibras.

Grupoides realizando foliaciones (regulares)

Las traslaciones a izquierda y a derecha conmutan. Así, la proyección por α de las β-fibras (resp., la proyección por β de las α-fibras),

$$\{\alpha(\beta^{-1}(x)) = \alpha(G^x) : x \in M\}$$

es una partición de M (y ambas coinciden).

Grupoides realizando foliaciones (regulares)

Las traslaciones a izquierda y a derecha conmutan. Así, la proyección por α de las β-fibras (resp., la proyección por β de las α-fibras),

$$\{\alpha(\beta^{-1}(x)) = \alpha(G^x) : x \in M\}$$

es una partición de M (y ambas coinciden).

Para cada $x \in M$, $\Phi(x) = \beta(G_x) = \alpha(G^x)$ es el elemento de la partición que lo contiene.

Grupoides realizando foliaciones (regulares)

Las componentes conexas de los elementos de la partición así definida son las hojas de una foliación singular $\mathcal{S}$ sobre M.

Grupoides realizando foliaciones (regulares)

Las componentes conexas de los elementos de la partición así definida son las hojas de una foliación singular $\mathcal{S}$ sobre M.

Esta foliación es regular si se imponen algunas restricciones sobre la acción del grupoide: si la intersección de las α-fibras y de las β-fibras es de dimensión constante (si $Is(G)$ es una variedad), lo mismo sucede para la dimensión de las hojas de $\mathcal{S}$, que será entonces una foliación regular.

Grupoides realizando foliaciones (regulares)

Un grupoide de Lie $G \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} M$ se dice *regular* cuando:

Grupoides realizando foliaciones (regulares)

Un grupoide de Lie $G \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} M$ se dice *regular* cuando:

(i) las α-fibras son conexas,

Grupoides realizando foliaciones (regulares)

Un grupoide de Lie $G \overset{\alpha}{\underset{\beta}{\rightrightarrows}} M$ se dice *regular* cuando:

(i) las α-fibras son conexas,

(ii) los grupos de isotropía son discretos (luego, $dim(G_x^x) = 0$, para cada $x \in M$, es decir, la foliación inducida es regular).

Grupoides realizando foliaciones (regulares)

Un grupoide de Lie $G \overset{\alpha}{\underset{\beta}{\rightrightarrows}} M$ se dice *regular* cuando:

(i) las α-fibras son conexas,

(ii) los grupos de isotropía son discretos (luego, $dim(G_x^x) = 0$, para cada $x \in M$, es decir, la foliación inducida es regular).

La inversión i intercambia las α-fibras y las β-fibras, las β-fibras son también conexas y M está provisto de una foliación regular $\mathcal{S}$, que se dice *definida por la acción de G sobre M*.

Grupoides realizando foliaciones (regulares)

Nota

El lenguaje de acción es natural. G actúa sobre su espacio de unidades M del modo siguiente:

Grupoides realizando foliaciones (regulares)

Nota

El lenguaje de acción es natural. G actúa sobre su espacio de unidades M del modo siguiente:

1. la aplicación $\rho\colon M \longrightarrow M$ es la identidad en M;

Grupoides realizando foliaciones (regulares)

Nota

El lenguaje de acción es natural. G actúa sobre su espacio de unidades M del modo siguiente:

1. la aplicación $\rho \colon M \longrightarrow M$ es la identidad en M;

2. $M *_M G = \{(x, \gamma) \in M \times G : x = \beta(\gamma)\}$;

Grupoides realizando foliaciones (regulares)

Nota

El lenguaje de acción es natural. G actúa sobre su espacio de unidades M del modo siguiente:

1. la aplicación $\rho\colon M \longrightarrow M$ es la identidad en M;

2. $M *_M G = \{(x, \gamma) \in M \times G : x = \beta(\gamma)\}$;

3. la acción es $\Phi\colon M *_M G \longrightarrow M$, dada por $\Phi(x, \gamma) = \alpha(\gamma)$.

Grupoides realizando foliaciones (regulares)

Un grupoide regular $G \overset{\alpha}{\underset{\beta}{\rightrightarrows}} M$ *realiza* una foliación $\mathcal{F}$ sobre M, si las órbitas de la acción del grupoide son las hojas de $\mathcal{F}$.

Grupoides realizando foliaciones (regulares)

Un grupoide regular $G \overset{\alpha}{\underset{\beta}{\rightrightarrows}} M$ *realiza* una foliación $\mathcal{F}$ sobre M, si las órbitas de la acción del grupoide son las hojas de $\mathcal{F}$.

Toda foliación regular puede definirse a través de un grupoide de Lie regular.

Grupoides realizando foliaciones (regulares)

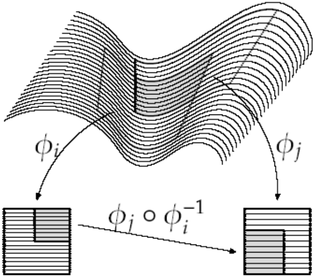
Un grupoide regular $G \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} M$ *realiza* una foliación $\mathcal{F}$ sobre M, si las órbitas de la acción del grupoide son las hojas de $\mathcal{F}$.

Toda foliación regular puede definirse a través de un grupoide de Lie regular.

Vamos a definir dos grupoides definiendo foliaciones regulares.

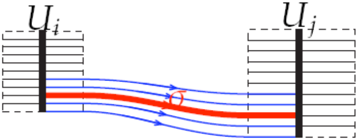
Espacio foliado $(M, \mathcal{F})$

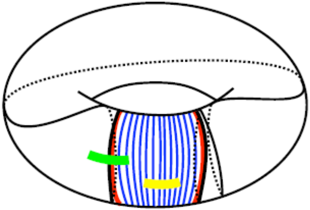
M es una $n = p + q$-variedad y $\mathcal{F}$ es una descomposición de M en p-subvariedades (conexas) inmersas, siendo localmente un producto.



$$\phi_j \circ \phi_i^{-1}(x,t) = \left(f_{i,j}(x,t), \gamma_{i,j}(t)\right)$$

Espacio foliado $(M, \mathcal{F})$





- Transversal verde:
  Comportamiento como $x \mapsto \dfrac{x}{2}$ $(x \geqslant 0)$
  (Hojas rojas con holonomía)
- Transversal amarilla:
  Comportamiento como la identidad
  (Hojas azules sin holonomía)

El grupoide de homotopía de una foliación

Sea $(M, \mathcal{F})$ una foliación de dimensión p y codimensión q sobre una variedad M de dimensión $m = p + q$.

El grupoide de homotopía de una foliación

Sea $(M, \mathcal{F})$ una foliación de dimensión p y codimensión q sobre una variedad M de dimensión $m = p + q$.

Sea $\mathcal{P}(\mathcal{F})$ el conjunto de los caminos tangentes a $\mathcal{F}$ (caminos cuya imagen está contenida en una hoja), provisto de la topología compacto-abierta. Se define la relación de equivalencia (abierta): $\gamma \sim \gamma'$, si γ es homótopo (con extremidades fijas) a γ' en la hoja que los contiene.

El grupoide de homotopía

El cociente por esta acción $\Pi_1(\mathcal{F}) = \mathcal{P}(\mathcal{F})/\sim$, es un grupoide localmente compacto: el espacio de unidades es M (identificada a la clase de los caminos constantes) y la estructura de grupoide está definida por las proyecciones $\alpha(\gamma) = \gamma(0)$, $\beta(\gamma) = \gamma(1)$ y la multiplicación y la inversión del grupoide están inducidas por la composición y la inversión usual de caminos, respectivamente. Se obtiene de este modo un grupoide algebraico $\Pi_1(\mathcal{F}) \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} M$.

El grupoide de homotopía

El cociente por esta acción $\Pi_1(\mathcal{F}) = \mathcal{P}(\mathcal{F})/\sim$, es un grupoide localmente compacto: el espacio de unidades es M (identificada a la clase de los caminos constantes) y la estructura de grupoide está definida por las proyecciones $\alpha(\gamma) = \gamma(0)$, $\beta(\gamma) = \gamma(1)$ y la multiplicación y la inversión del grupoide están inducidas por la composición y la inversión usual de caminos, respectivamente. Se obtiene de este modo un grupoide algebraico $\Pi_1(\mathcal{F}) \overset{\alpha}{\underset{\beta}{\rightrightarrows}} M$.

La topología de $\mathcal{P}(\mathcal{F})$ induce sobre $\Pi_1(\mathcal{F})$ la topología cociente, para la que α, β, i y . son aplicaciones continuas, α y β son abiertas e i es un homeomorfismo. Se tiene así un grupoide topológico.

El grupoide de homotopía

Si $x \in M$, $\Pi_1(\mathcal{F})_x$ (resp., $\Pi_1(\mathcal{F})^x$) es el revestimiento universal de L_x, la hoja que pasa por x, y β (resp., α) es la aplicación de revestimiento.

El grupoide de homotopía

Si $x \in M$, $\Pi_1(\mathcal{F})_x$ (resp., $\Pi_1(\mathcal{F})^x$) es el revestimiento universal de L_x, la hoja que pasa por x, y β (resp., α) es la aplicación de revestimiento.

Si $x \in M$, es:

$$Is(\Pi_1(\mathcal{F}))_x = \pi_1(L_x, x).$$

El grupoide de homotopía

Estructura diferenciable

Si γ es un camino tangente a $\mathcal{F}$, se consideran dos cubos distinguidos $U_i = P_i \times T_i$, donde U_i es entorno de $\gamma(i)$ ($i \in \{0, 1\}$), P_i es una placa y T_i es una transversal de $\mathcal{F}$.

El grupoide de homotopía

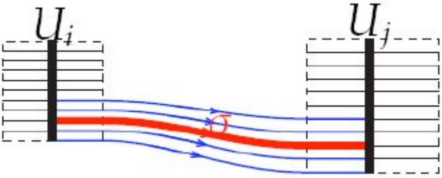
Estructura diferenciable

Si γ es un camino tangente a $\mathcal{F}$, se consideran dos cubos distinguidos $U_i = P_i \times T_i$, donde U_i es entorno de $\gamma(i)$ ($i \in \{0, 1\}$), P_i es una placa y T_i es una transversal de $\mathcal{F}$.

Salvo posibles restricciones de T_0 y T_1, la trivialidad local de la foliación permite definir un difeomorfismo de holonomía $h_\gamma : T_0 \to T_1$ representado por un *tubo de caminos tangentes a* $\mathcal{F}$, $\hat{h}_\gamma : T_0 \times [0, 1] \to M$.

El grupoide de homotopía

Este tubo está parametrizado por T_0 y $h_\gamma : T_0 \to T_1$ consiste en pasar del origen al extremo de cada uno de estos caminos.



El grupoide de homotopía

$\hat{h}_\gamma$ se extiende a una familia diferenciable de caminos tangentes a $\mathcal{F}$, parametrizada por $P_0 \times T_0 \times P_1$, y que induce un difeomorfismo de U_0 sobre U_1.

El grupoide de homotopía

$\hat{h}_\gamma$ se extiende a una familia diferenciable de caminos tangentes a $\mathcal{F}$, parametrizada por $P_0 \times T_0 \times P_1$, y que induce un difeomorfismo de U_0 sobre U_1.

Tras el paso a las clases de homotopía, se obtiene una carta local sobre $\Pi_1(\mathcal{F})$. El atlas así construido, define sobre $\Pi_1(\mathcal{F})$ una estructura de variedad diferenciable de dimensión $2p+q$. Como todos los objetos que definen la estructura de grupoide sobre $\Pi_1(\mathcal{F})$ son diferenciables, $\Pi_1(\mathcal{F}) \overset{\alpha}{\underset{\beta}{\rightrightarrows}} M$ es un grupoide de Lie, el *grupoide de homotopía* de la foliación. Es la *versión foliada* del grupoide fundamental de una variedad.

El grupoide de homotopía

El espacio total de $\Pi_1(\mathcal{F}) \overset{\alpha}{\underset{\beta}{\rightrightarrows}} M$ no tiene porque ser de Hausdorff.

El grupoide de homotopía

El espacio total de $\Pi_1(\mathcal{F}) \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} M$ no tiene porque ser de Hausdorff.

Sea $\mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$ foliado por planos horizontales excepto en el nivel 0 (cilindro) y sea la familia de caminos tangentes $\{\gamma_n\}$ (donde $\gamma_n(t) = (e^{2\pi it}, \frac{1}{n})$). Para cada $n \in \mathbb{N}$, $\{\gamma_n\}$ es contráctil en la hoja que lo contiene. $\{\gamma_n\}$ converge al camino trivial y al camino no trivial $\gamma(t) = (e^{2\pi it}, 0)$ en la hoja pasando por el origen.

El grupoide de holonomía

Sobre $\mathcal{P}(\mathcal{F})$, se define una relación de equivalencia abierta más fina que la anterior: $\gamma \sim_h \gamma'$ si el gérmen de holonomía del lazo $(\gamma')^{-1}.\gamma$ es trivial.

El grupoide de holonomía

Sobre $\mathcal{P}(\mathcal{F})$, se define una relación de equivalencia abierta más fina que la anterior: $\gamma \sim_h \gamma'$ si el gérmen de holonomía del lazo $(\gamma')^{-1}.\gamma$ es trivial.

Se obtiene un grupoide de Lie (de la misma dimensión) $Hol(\mathcal{F}) = \mathcal{P}(\mathcal{F})/\sim_h \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} M$, el *grupoide de holonomía de la foliación*.

El grupoide de holonomía

El desingularizado natural del espacio de hojas

Si $x \in M$ y $h : \pi_1(L_x, x) \to \mathit{Diff}(T_0, x)$ es la representación de holonomía ($h(\gamma) = h_\gamma$) de la hoja L_x pasando por x, y $\mathit{Hol}(\mathcal{F})_x^x = h(\pi_1(L_x, x))$ es el grupo de holonomía de la hoja pasando por x.

El grupoide de holonomía

El desingularizado natural del espacio de hojas

Si $x \in M$ y $h : \pi_1(L_x, x) \to Diff(T_0, x)$ es la representación de holonomía ($h(\gamma) = h_\gamma$) de la hoja L_x pasando por x, y $Hol(\mathcal{F})_x^x = h(\pi_1(L_x, x))$ es el grupo de holonomía de la hoja pasando por x.

Las fibras de este grupoide son los revestimientos de holonomía de las hojas de la foliación $\mathcal{F}$.

El grupoide de holonomía

El desingularizado natural del espacio de hojas

Si $x \in M$ y $h : \pi_1(L_x, x) \to Diff(T_0, x)$ es la representación de holonomía ($h(\gamma) = h_\gamma$) de la hoja L_x pasando por x, y $Hol(\mathcal{F})_x^x = h(\pi_1(L_x, x))$ es el grupo de holonomía de la hoja pasando por x.

Las fibras de este grupoide son los revestimientos de holonomía de las hojas de la foliación $\mathcal{F}$.

$Hol(\mathcal{F})^x / Hol(\mathcal{F})_x^x \simeq L_x$, con lo que $Hol(\mathcal{F})$ es el desingularizado natural de $M/\mathcal{F}$, y de hecho *desenvuelve todas la hojas a la vez.*

El grupoide de holonomía

La propiedad de levantamiento de caminos permite construir un homomorfismo sobreyectivo de grupoides de Lie $\phi\colon \Pi_1(\mathcal{F}) \longrightarrow Hol(\mathcal{F})$.

El grupoide de holonomía

La propiedad de levantamiento de caminos permite construir un homomorfismo sobreyectivo de grupoides de Lie $\phi \colon \Pi_1(\mathcal{F}) \longrightarrow Hol(\mathcal{F})$.

A diferencia de $\Pi_1(\mathcal{F})$, $Hol(\mathcal{F})$ *olvida* la estructura de las hojas y lleva sólo información sobre la estructura transversa de $\mathcal{F}$.

El grupoide de holonomía

La propiedad de levantamiento de caminos permite construir un homomorfismo sobreyectivo de grupoides de Lie $\phi\colon \Pi_1(\mathcal{F}) \longrightarrow Hol(\mathcal{F})$.

A diferencia de $\Pi_1(\mathcal{F})$, $Hol(\mathcal{F})$ *olvida* la estructura de las hojas y lleva sólo información sobre la estructura transversa de $\mathcal{F}$.

En general, ni $\Pi_1(\mathcal{F})$ ni $Hol(\mathcal{F})$ son variedades separadas.

El grupoide de holonomía

Si se considera la foliación $\mathcal{F}_U$, restringida a un cubo distinguido, $U = P \times T$, donde P es una placa y T una transversal, los dos grupoides anteriormente definidos coinciden:

$$\Pi_1(\mathcal{F}_U) = Hol(\mathcal{F}_U) = P \times P \times T.$$

El grupoide de holonomía

Si se considera la foliación $\mathcal{F}_U$, restringida a un cubo distinguido, $U = P \times T$, donde P es una placa y T una transversal, los dos grupoides anteriormente definidos coinciden:

$$\Pi_1(\mathcal{F}_U) = Hol(\mathcal{F}_U) = P \times P \times T.$$

Se tiene una familia parametrizada por T de grupoides groseros: esta es la *propiedad de trivialidad local* de los grupoides de homotopía y de holonomía de la foliación.

Ejemplos

Sea $(\mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}, \mathcal{F})$ con la foliación horizontal.

Ejemplos

Sea $(\mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}, \mathcal{F})$ con la foliación horizontal.

El grupoide de holonomía es de Hausdorff (el de homotopía no lo era), y de hecho es $Hol(\mathcal{F}) = \mathbb{R}^5$.

Ejemplos

Sea $(\mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}, \mathcal{F})$ con la foliación horizontal.

El grupoide de holonomía es de Hausdorff (el de homotopía no lo era), y de hecho es $Hol(\mathcal{F}) = \mathbb{R}^5$.

Como la foliación no tiene holonomía, un elemento de $Hol(\mathcal{F})$ queda determinado por $t \in \mathbb{R}$ (la hoja) y los puntos inicial y final del camino ($\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$).

Ejemplos

Sea $(\mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}, \mathcal{F})$ con la foliación horizontal.

El grupoide de holonomía es de Hausdorff (el de homotopía no lo era), y de hecho es $Hol(\mathcal{F}) = \mathbb{R}^5$.

Como la foliación no tiene holonomía, un elemento de $Hol(\mathcal{F})$ queda determinado por $t \in \mathbb{R}$ (la hoja) y los puntos inicial y final del camino ($\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$).

$\Pi_1(\mathcal{F})$ no es tan fácil de describir, pero es una variedad de dimensión 5.

Ejemplos

Sea $(\mathbb{S}^1 \times [0,1], \mathcal{F})$ con la foliación horizontal.

Ejemplos

Sea $(\mathbb{S}^1 \times [0,1], \mathcal{F})$ con la foliación horizontal.

$\Pi_1(\mathcal{F})$ es $\mathbb{S}^1 \times [0,1] \times \mathbb{R}$ (hoja, punto inicial y punto final... hay homotopía).

Ejemplos

Sea $(\mathbb{S}^1 \times [0,1], \mathcal{F})$ con la foliación horizontal.

$\Pi_1(\mathcal{F})$ es $\mathbb{S}^1 \times [0,1] \times \mathbb{R}$ (hoja, punto inicial y punto final... hay homotopía).

$\alpha(z,t,x) = (z,t)$, $\beta(z,t,x) = (ze^{2\pi ix}, t) \in \mathbb{S}^1 \times [0,1]$.

Ejemplos

Sea $(\mathbb{S}^1 \times [0,1], \mathcal{F})$ con la foliación horizontal.

$\Pi_1(\mathcal{F})$ es $\mathbb{S}^1 \times [0,1] \times \mathbb{R}$ (hoja, punto inicial y punto final... hay homotopía).

$\alpha(z,t,x) = (z,t)$, $\beta(z,t,x) = (ze^{2\pi ix}, t) \in \mathbb{S}^1 \times [0,1]$.

$i(z,t,x) = (ze^{2\pi ix}, t, -x)$.

Ejemplos

Sea $(\mathbb{S}^1 \times [0,1], \mathcal{F})$ con la foliación horizontal.

$\Pi_1(\mathcal{F})$ es $\mathbb{S}^1 \times [0,1] \times \mathbb{R}$ (hoja, punto inicial y punto final... hay homotopía).

$\alpha(z,t,x) = (z,t)$, $\beta(z,t,x) = (ze^{2\pi ix}, t) \in \mathbb{S}^1 \times [0,1]$.

$i(z,t,x) = (ze^{2\pi ix}, t, -x)$.

(z_1, t_1, x_1) y (z_2, t_2, x_2) se pueden componer si y sólo si $t_1 = t_2$ y $z_1 e^{2\pi i x_1} = z_2$ y su producto es $(z_1, t_1, x_1 + x_2)$.

Ejemplos

Sea $(\mathbb{S}^1 \times [0,1], \mathcal{F})$ con la foliación horizontal.

Ejemplos

Sea $(\mathbb{S}^1 \times [0,1], \mathcal{F})$ con la foliación horizontal.

Hol$(\mathcal{F})$ es $\mathbb{S}^1 \times [0,1] \times \mathbb{S}^1$ (hoja, punto inicial y punto final... no hay holonomía).

Ejemplos

Sea $(\mathbb{S}^1 \times [0,1], \mathcal{F})$ con la foliación horizontal.

$Hol(\mathcal{F})$ es $\mathbb{S}^1 \times [0,1] \times \mathbb{S}^1$ (hoja, punto inicial y punto final... no hay holonomía).

$\alpha(z,t,w) = (z,t)$, $\beta(z,t,w) = (w,t) \in \mathbb{S}^1 \times [0,1]$.

Ejemplos

Sea $(\mathbb{S}^1 \times [0,1], \mathcal{F})$ con la foliación horizontal.

$Hol(\mathcal{F})$ es $\mathbb{S}^1 \times [0,1] \times \mathbb{S}^1$ (hoja, punto inicial y punto final... no hay holonomía).

$\alpha(z,t,w) = (z,t)$, $\beta(z,t,w) = (w,t) \in \mathbb{S}^1 \times [0,1]$.

$i(z,t,w) = (w,t,z)$.

Ejemplos

Sea $(\mathbb{S}^1 \times [0,1], \mathcal{F})$ con la foliación horizontal.

$Hol(\mathcal{F})$ es $\mathbb{S}^1 \times [0,1] \times \mathbb{S}^1$ (hoja, punto inicial y punto final... no hay holonomía).

$\alpha(z,t,w) = (z,t)$, $\beta(z,t,w) = (w,t) \in \mathbb{S}^1 \times [0,1]$.

$i(z,t,w) = (w,t,z)$.

(z_1, t_1, w_1) y (z_2, t_2, w_2) se pueden componer si y sólo si $t_1 = t_2$ y $w_1 = z_2$ y su producto es (z_1, t_1, w_2).

Ejemplos

Sea $(\mathbb{S}^1 \times [0,1], \mathcal{F})$ con la foliación horizontal.

Ejemplos

Sea $(\mathbb{S}^1 \times [0,1], \mathcal{F})$ con la foliación horizontal.

$\Pi_1(\mathcal{F}) = \mathbb{S}^1 \times [0,1] \times \mathbb{R}$ es un revestimiento de $Hol(\mathcal{F}) = \mathbb{S}^1 \times [0,1] \times \mathbb{S}^1$.

Ejemplos

Sea $(\mathbb{S}^1 \times [0,1], \mathcal{F})$ con la foliación horizontal.

$\Pi_1(\mathcal{F}) = \mathbb{S}^1 \times [0,1] \times \mathbb{R}$ es un revestimiento de $Hol(\mathcal{F}) = \mathbb{S}^1 \times [0,1] \times \mathbb{S}^1$.

$Hol(\mathcal{F})$ sólo mira la dinámica, se olvida de como es la hoja.

Ejemplos

Sea $(\mathbb{S}^1 \times [0,1], \mathcal{F})$ con la foliación horizontal.

$\Pi_1(\mathcal{F}) = \mathbb{S}^1 \times [0,1] \times \mathbb{R}$ es un revestimiento de $Hol(\mathcal{F}) = \mathbb{S}^1 \times [0,1] \times \mathbb{S}^1$.

$Hol(\mathcal{F})$ sólo mira la dinámica, se olvida de como es la hoja.

En este caso el espacio de hojas es sencillo $M/\mathcal{F} = [0,1]$.

La foliación de Kronecker

Para $\theta \in \mathbb{R}$, las curvas integrales del campo de vectores $X = \frac{\partial}{\partial x_1} + \theta \frac{\partial}{\partial x_2}$, definen una foliación $\mathcal{F}_\theta$ sobre el toro $\mathbb{T}^2$ (soluciones de la ecuación $dy = \theta dx$).

La foliación de Kronecker

Para $\theta \in \mathbb{R}$, las curvas integrales del campo de vectores $X = \frac{\partial}{\partial x_1} + \theta \frac{\partial}{\partial x_2}$, definen una foliación $\mathcal{F}_\theta$ sobre el toro $\mathbb{T}^2$ (soluciones de la ecuación $dy = \theta dx$).

- Si $\theta \in \mathbb{Q}$, cada hoja es una circunferencia;

La foliación de Kronecker

Para $\theta \in \mathbb{R}$, las curvas integrales del campo de vectores $X = \frac{\partial}{\partial x_1} + \theta \frac{\partial}{\partial x_2}$, definen una foliación $\mathcal{F}_\theta$ sobre el toro $\mathbb{T}^2$ (soluciones de la ecuación $dy = \theta dx$).

- Si $\theta \in \mathbb{Q}$, cada hoja es una circunferencia;
- Si $\theta \in \mathbb{I}$, cada hoja es una recta densa en el toro, y la foliación inducida es la *foliación de Kronecker*.

La foliación de Kronecker

El espacio de hojas de la foliación de Kronecker

$\mathcal{L}_\theta = \mathbb{T}^2/\mathcal{F}_\theta$, es un espacio indiscreto.

La foliación de Kronecker

El espacio de hojas de la foliación de Kronecker

$\mathcal{L}_\theta = \mathbb{T}^2/\mathcal{F}_\theta$, es un espacio indiscreto.

El espacio total de su grupoide de holonomía es $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}$: en efecto, es una foliación sin holonomía (todas las hojas son difeomorfas y contráctiles).

La foliación de Kronecker

El espacio de hojas de la foliación de Kronecker

$\mathcal{L}_\theta = \mathbb{T}^2/\mathcal{F}_\theta$, es un espacio indiscreto.

El espacio total de su grupoide de holonomía es $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}$: en efecto, es una foliación sin holonomía (todas las hojas son difeomorfas y contráctiles).

Un elemento del grupoide viene determinado por los puntos inicial y final de un camino tangente; es decir, un punto en $\mathbb{T}^2$ (se fija la hoja) y $t \in \mathbb{R}$ (longitud del camino).

La foliación de Kronecker

El espacio total de su grupoide de holonomía es $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}$.

La foliación de Kronecker

El espacio total de su grupoide de holonomía es $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}$.

$\alpha(z_1, z_2, t) = (z_1, z_2)$,
$\beta(z_1, z_2, t) = (z_1 e^{2\pi it}, z_2 e^{2\pi it}) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 = \mathbb{T}^2$.

La foliación de Kronecker

El espacio total de su grupoide de holonomía es $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}$.

$$\alpha(z_1, z_2, t) = (z_1, z_2),$$
$$\beta(z_1, z_2, t) = (z_1 e^{2\pi it}, z_2 e^{2\pi it}) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 = \mathbb{T}^2.$$

$$i(z_1, z_2, t) = (z_1 e^{2\pi it}, z_2 e^{2\pi it}, -t).$$

La foliación de Kronecker

El espacio total de su grupoide de holonomía es $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}$.

$\alpha(z_1, z_2, t) = (z_1, z_2)$,
$\beta(z_1, z_2, t) = (z_1 e^{2\pi i t}, z_2 e^{2\pi i t}) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 = \mathbb{T}^2$.

$i(z_1, z_2, t) = (z_1 e^{2\pi i t}, z_2 e^{2\pi i t}, -t)$.

(z_1, z_2, t) y (w_1, w_2, s) se pueden componer si y sólo si $(z_1 e^{2\pi i t}, z_2 e^{2\pi i t}) = (w_1, w_2)$ y su producto es $(z_1, z_2, t + s)$.

La foliación de Kronecker

Esta foliación está definida por una acción de $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{T}^2$ (o sobre $C_0(\mathbb{T}^2)$), la dada por el flujo, que es libre.

La foliación de Kronecker

Esta foliación está definida por una acción de $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{T}^2$ (o sobre $C_0(\mathbb{T}^2)$), la dada por el flujo, que es libre.

Esto da una idea de lo que pasa en el caso general de acciones.

Ejemplos: acciones

Una acción localmente libre $\Phi \colon \Gamma \times M \longrightarrow M$ de un grupo de Lie (conexo) Γ sobre la variedad M, define un grupoide de Lie Γ_Φ, como ya se ha visto antes. Las órbitas de este grupoide definen sobre M una foliación regular $\mathcal{F}_\Phi$.

Ejemplos: acciones

Una acción localmente libre $\Phi\colon \Gamma \times M \longrightarrow M$ de un grupo de Lie (conexo) Γ sobre la variedad M, define un grupoide de Lie Γ_Φ, como ya se ha visto antes. Las órbitas de este grupoide definen sobre M una foliación regular $\mathcal{F}_\Phi$.

El grupoide $\Pi_1(\mathcal{F}_\Phi)$ es isomorfo al grupoide $\widetilde{\Gamma} \times M \rightrightarrows M$.

Ejemplos: acciones

Una acción localmente libre $\Phi\colon \Gamma \times M \longrightarrow M$ de un grupo de Lie (conexo) Γ sobre la variedad M, define un grupoide de Lie Γ_Φ, como ya se ha visto antes. Las órbitas de este grupoide definen sobre M una foliación regular $\mathcal{F}_\Phi$.

El grupoide $\Pi_1(\mathcal{F}_\Phi)$ es isomorfo al grupoide $\widetilde{\Gamma} \times M \rightrightarrows M$.

Existe un difeomorfismo local $h\colon \Gamma \times M \longrightarrow Hol(\mathcal{F}_\Phi)$, que es un difeomorfismo si la acción es libre.

El grupoide de holonomía transverso

El estudio del espacio de las hojas es un estudio de *propiedades transversas* de la foliación: una subvariedad transversa T es una subvariedad inmersa de M, de dimensión q, transversa a cada hoja (en cada punto de T el espacio tangente de T es suplementario al espacio tangente a la hoja que pasa por este punto).

El grupoide de holonomía transverso

El estudio del espacio de las hojas es un estudio de *propiedades transversas* de la foliación: una subvariedad transversa T es una subvariedad inmersa de M, de dimensión q, transversa a cada hoja (en cada punto de T el espacio tangente de T es suplementario al espacio tangente a la hoja que pasa por este punto).

Si T es una *transversal total*, se tiene el grupoide de Lie $Hol(\mathcal{F}_T^T) = \{\gamma \in Hol(\mathcal{F}) : \alpha(\gamma), \beta(\gamma) \in T\}$, el *grupoide transverso* asociado a T. La inmersión natural de T en M, $i_T : T \to M$, induce una *equivalencia de Morita* entre los grupoides $Hol(\mathcal{F})$ y $Hol(\mathcal{F}_T^T)$.
Las aplicaciones α_T y β_T son difeomorfismos locales, por ello $Hol(\mathcal{F}_T^T)$ es étale.

La C*-álgebra de una foliación

La elección de una métrica de Riemann sobre M, define una descomposición ortogonal del fibrado tangente $T(M) = \nu(\mathcal{F}) \oplus T(\mathcal{F})$.

La C*-álgebra de una foliación

La elección de una métrica de Riemann sobre M, define una descomposición ortogonal del fibrado tangente $T(M) = \nu(\mathcal{F}) \oplus T(\mathcal{F})$.

Se considera una forma pura ω, de tipo $(0, p)$ sobre M (siendo p la dimensión de la foliación), que define por restricción a las hojas, el volumen asociado a la métrica inducida (el elemento de volumen ω varía diferenciablemente a lo largo de M).

La C*-álgebra de una foliación

Si $x \in M$ y L_x es la hoja por x, la restricción $\omega|_{L_x} = \omega_x$ es una forma volumen sobre L_x.

La C*-álgebra de una foliación

Si $x \in M$ y L_x es la hoja por x, la restricción $\omega|_{L_x} = \omega_x$ es una forma volumen sobre L_x.

$\alpha \colon Hol(\mathcal{F})^x \longrightarrow L_x$ es una aplicación de revestimiento (correspondiente al núcleo de la representación de holonomía).

La C*-álgebra de una foliación

Si $x \in M$ y L_x es la hoja por x, la restricción $\omega|_{L_x} = \omega_x$ es una forma volumen sobre L_x.

$\alpha\colon Hol(\mathcal{F})^x \longrightarrow L_x$ es una aplicación de revestimiento (correspondiente al núcleo de la representación de holonomía).

Es posible levantar ω_x en λ^x sobre $Hol(\mathcal{F}^x)$. De manera global, se levanta ω por , en una forma volumen $\lambda = \alpha^*(\omega)$ sobre $Hol(\mathcal{F})$, que define un volumen por restricción a las β-fibras.

La C*-álgebra de una foliación

Este volumen es invariante por translaciones a izquierda: *Si* $f \in C_c(Hol(\mathcal{F}^x))$ *y* $\gamma_0 \in Hol(\mathcal{F}_x)$, *entonces* $\int_{Hol(\mathcal{F})^x} f(\gamma) d\lambda^x(\gamma) = \int_{Hol(\mathcal{F})^{(\gamma_0)}} f(L_{\gamma_0}(\gamma)) d\lambda^{(\gamma_0)}(\gamma)$, *y se dice que* $\{\lambda^x\}_{x \in M}$ *es un sistema de Haar a la izquierda, para* $Hol(\mathcal{F})$.

La C*-álgebra de una foliación

Este volumen es invariante por translaciones a izquierda: *Si* $f \in C_c(Hol(\mathcal{F}^x))$ *y* $\gamma_0 \in Hol(\mathcal{F}_x)$*, entonces* $\int_{Hol(\mathcal{F})^x} f(\gamma) d\lambda^x(\gamma) = \int_{Hol(\mathcal{F})^{(\gamma_0)}} f(L_{\gamma_0}(\gamma)) d\lambda^{(\gamma_0)}(\gamma)$*, y se dice que* $\{\lambda^x\}_{x \in M}$ *es un sistema de Haar a la izquierda, para* $Hol(\mathcal{F})$*.*

Se define $C^*(M, \mathcal{F}) = C_r^*(Hol(\mathcal{F}))$.

La C*-álgebra de una foliación

La construcción de $C^*(M, \mathcal{F})$ es local

Si $U \subset M$ es abierto y $\mathcal{F}_U$ es la restricción de $\mathcal{F}$ a U, entonces $Hol(\mathcal{F}_U)$ es un subgrupoide abierto de G y la inclusión $C_c(Hol(\mathcal{F}_U)) \subset C_c(Hol(\mathcal{F}))$, se extiende a un $*$-isomorfismo isométrico de $C^*(U, \mathcal{F}_U)$ en $C^*(M, \mathcal{F})$.

La C*-álgebra de una foliación

Sólo depende de sus estructura transversa

Si $(M, \mathcal{F})$ es una variedad foliada y T es una transversal total, entonces

$$C^*(M, \mathcal{F}) \cong C^*(Hol(\mathcal{F}_T^T)) \otimes \mathfrak{K},$$

donde $Hol(\mathcal{F}_T^T) = \{\gamma \in Hol(\mathcal{F}) : \alpha(\gamma), \beta(\gamma) \in T\}$.

La C*-álgebra de una foliación

Es estable

$C^*(M, \mathcal{F}) \otimes \mathfrak{K} \cong C^*(M, \mathcal{F})$.

La C*-álgebra de una foliación

Es estable

$C^*(M, \mathcal{F}) \otimes \mathfrak{K} \cong C^*(M, \mathcal{F})$.

Preserva las equivalencias de foliaciones

Si $(M_1, \mathcal{F}_1)$ y $(M_2, \mathcal{F}_2)$ son topológicamente equivalentes, entonces,

$$C^*(M_1, \mathcal{F}_1) \otimes \mathfrak{K} \cong C^*(M_2, \mathcal{F}_2) \otimes \mathfrak{K}.$$

La C*-álgebra de una foliación

Propiedades

Si el grupoide de holonomía es separado, se puede probar:

La C*-álgebra de una foliación

Propiedades

Si el grupoide de holonomía es separado, se puede probar:

(i) $C^*(M, \mathcal{F})$ es simple (es decir, no posee ideales no triviales) si y sólo si toda hoja de $\mathcal{F}$ es densa,

La C*-álgebra de una foliación

Propiedades

Si el grupoide de holonomía es separado, se puede probar:

(i) $C^*(M, \mathcal{F})$ es simple (es decir, no posee ideales no triviales) si y sólo si toda hoja de $\mathcal{F}$ es densa,

(ii) $C^*(M, \mathcal{F})$ posee una representación irreducible inyectiva si y sólo si existe una hoja densa;

La C*-álgebra de una foliación

Propiedades

Si el grupoide de holonomía es separado, se puede probar:

(i) $C^*(M,\mathcal{F})$ es simple (es decir, no posee ideales no triviales) si y sólo si toda hoja de $\mathcal{F}$ es densa,

(ii) $C^*(M,\mathcal{F})$ posee una representación irreducible inyectiva si y sólo si existe una hoja densa;

(iii) $\mathcal{F}$ es cerrada si y sólo si $C^*(M,\mathcal{F})$ posee a los operadores compactos como cociente.

La C*-álgebra de una foliación

Propiedades

Si el grupoide de holonomía es separado, se puede probar:

(i) $C^*(M, \mathcal{F})$ es simple (es decir, no posee ideales no triviales) si y sólo si toda hoja de $\mathcal{F}$ es densa,

(ii) $C^*(M, \mathcal{F})$ posee una representación irreducible inyectiva si y sólo si existe una hoja densa;

(iii) $\mathcal{F}$ es cerrada si y sólo si $C^*(M, \mathcal{F})$ posee a los operadores compactos como cociente.

En el caso no separado, por ejemplo, el que la foliación sea minimal, no implica que la C*-álgebra sea simple.

Ejemplos

Foliación por puntos

Si M es localmente compacto y está foliado por puntos, entonces $Hol(\mathcal{F}) = M$ y $C^*(M, \mathcal{F}) = C_0(M)$.

Ejemplos

Foliación por puntos

Si M es localmente compacto y está foliado por puntos, entonces $Hol(\mathcal{F}) = M$ y $C^*(M, \mathcal{F}) = C_0(M)$.

Foliación por una única hoja

Si M es localmente compacto y M es una variedad foliada por una única hoja, entonces $Hol(\mathcal{F}) = M \times M$.
Un sistema de Haar es simplemente una medida λ sobre M, de soporte M. Los elementos de la subálgebra densa pueden realizarse como operadores integrales con núcleo de soporte compacto sobre $L^2(M, \lambda)$. Su compleción es la familia de los operadores compactos $\mathfrak{K}(L^2(M, \lambda))$.

Ejemplos

Fibraciones

Si la foliación viene dada por una fibración $F^p \to M \to B^q$, con F conexo, entonces M está foliada por las imágenes inversas de los puntos de B.
Todas las hojas son cerradas y difeomorfas a F.
$Hol(\mathcal{F})$ es el grafo de la relación de equivalencia correspondiente a la partición de M en hojas y la C*-álgebra $C^*(M, \mathcal{F})$ es isomorfa a $C_0(B, \mathfrak{K}(L^2(F))$.

Ejemplos

Acciones

Si la foliación proviene de una acción de un grupo de Lie Γ, de tal modo que $Hol(\mathcal{F})$ sea idéntico a $M \times \Gamma$ (esto no siempre es cierto), entonces la C*-álgebra de la foliación es el producto cruzado reducido $C_0(M) \rtimes_r \Gamma$.

Ejemplos

Acciones

Si la foliación proviene de una acción de un grupo de Lie Γ, de tal modo que $Hol(\mathcal{F})$ sea idéntico a $M \times \Gamma$ (esto no siempre es cierto), entonces la C*-álgebra de la foliación es el producto cruzado reducido $C_0(M) \rtimes_r \Gamma$.

El toro no conmutativo

Su C*-álgebra es el producto cruzado $C(\mathbb{S}^1) \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$, donde $\mathbb{Z}$ actúa sobre $C(\mathbb{S}^1)$ por la rotación de ángulo θ sobre $\mathbb{S}^1$ $(\alpha^n(f)(z) = f(e^{-2i\pi n\theta}z)$, para $z \in \mathbb{S}^1)$: es la acción sobre la transversal $\mathbb{S}^1$.

Índice

Conmutativo versus no conmutativo

En el *mundo conmutativo*, las herramientas más inmediatas y potentes son el el grupo fundamental (la homotopía) y la homología. Pero, no poseen generalizaciones claras *no conmutativas*.

Conmutativo versus no conmutativo

En el *mundo conmutativo*, las herramientas más inmediatas y potentes son el el grupo fundamental (la homotopía) y la homología. Pero, no poseen generalizaciones claras *no conmutativas*.

La K-teoría topológica de un espacio M (definida a partir de fibrados vectoriales complejos de dimensión finita y localmente triviales sobre M) pasa inmediatamente al mundo no conmutativo.

K-teoría topológica

Sea M un espacio compacto. Si $V(M)$ es el conjunto de las clases de isomorfismo de fibrados vectoriales complejos localmente triviales de base M, V es un functor contravariante de la categoría de los espacios compactos en la categoría de los semigrupos abelianos, invariante por homotopía.

K-teoría topológica

Sea M un espacio compacto. Si $V(M)$ es el conjunto de las clases de isomorfismo de fibrados vectoriales complejos localmente triviales de base M, V es un functor contravariante de la categoría de los espacios compactos en la categoría de los semigrupos abelianos, invariante por homotopía.

$K^0(M)$ se define como el grupo de Grothendieck de $V(M)$, y continúa siendo un functor contravariante, ahora de la categoría de los espacios compactos en la de los grupos abelianos.
Esta definición se generaliza a M localmente compacto.

K-teoría topológica

La *suspensión reducida* de orden n de M se define como el espacio no compacto $S^n(M) = M \times \mathbb{R}^n$.

K-teoría topológica

La *suspensión reducida* de orden n de M se define como el espacio no compacto $S^n(M) = M \times \mathbb{R}^n$.

El *K-grupo* de orden n de M, $K^n(M)$, está definido por $K^n(M) = K^0(S^n(M))$.

K-teoría topológica

Si M es un espacio localmente compacto, y E es un fibrado vectorial complejo sobre M, se denota por $\Gamma(M, E)$ el conjunto de las secciones continuas de E. Entonces:

K-teoría topológica

Si M es un espacio localmente compacto, y E es un fibrado vectorial complejo sobre M, se denota por $\Gamma(M, E)$ el conjunto de las secciones continuas de E. Entonces:

(i) $\Gamma(M, E)$ es un módulo sobre el anillo de las funciones continuas de M con valores en $\mathbb{C}$, $C(M)$;

K-teoría topológica

Si M es un espacio localmente compacto, y E es un fibrado vectorial complejo sobre M, se denota por $\Gamma(M,E)$ el conjunto de las secciones continuas de E. Entonces:

(i) $\Gamma(M,E)$ es un módulo sobre el anillo de las funciones continuas de M con valores en $\mathbb{C}$, $C(M)$;

(ii) un isomorfismo de fibrados vectoriales complejos induce un isomorfismo entre los módulos de secciones correspondientes;

K-teoría topológica

Si M es un espacio localmente compacto, y E es un fibrado vectorial complejo sobre M, se denota por $\Gamma(M,E)$ el conjunto de las secciones continuas de E. Entonces:

(i) $\Gamma(M,E)$ es un módulo sobre el anillo de las funciones continuas de M con valores en $\mathbb{C}$, $C(M)$;

(ii) un isomorfismo de fibrados vectoriales complejos induce un isomorfismo entre los módulos de secciones correspondientes;

(iii) si E es un fibrado trivial de dimensión n, entonces $\Gamma(M,E) \simeq C(M)^n$;

K-teoría topológica

Si M es un espacio localmente compacto, y E es un fibrado vectorial complejo sobre M, se denota por $\Gamma(M, E)$ el conjunto de las secciones continuas de E. Entonces:

(i) $\Gamma(M, E)$ es un módulo sobre el anillo de las funciones continuas de M con valores en $\mathbb{C}$, $C(M)$;

(ii) un isomorfismo de fibrados vectoriales complejos induce un isomorfismo entre los módulos de secciones correspondientes;

(iii) si E es un fibrado trivial de dimensión n, entonces $\Gamma(M, E) \simeq C(M)^n$;

(iv) si M es compacto, entonces $\Gamma(M, E)$ es un módulo proyectivo de tipo finito.

K-teoría topológica

Así, Γ es un functor covariante de la categoría de los fibrados vectoriales complejos sobre un espacio M localmente compacto y separado dado, en la categoría de los módulos proyectivos de tipo finito sobre $C(M)$, y se puede incluso probar que Γ es biyectiva, éste es el *Teorema de Swan*.

K-teoría topológica

Así, Γ es un functor covariante de la categoría de los fibrados vectoriales complejos sobre un espacio M localmente compacto y separado dado, en la categoría de los módulos proyectivos de tipo finito sobre $C(M)$, y se puede incluso probar que Γ es biyectiva, éste es el *Teorema de Swan*.

Si M es compacta, $K^0(M)$ se puede también describir como el grupo de las diferencias formales $[P] - [Q]$ de clases de isomorfismo de módulos proyectivos de tipo finito sobre $C(M)$. Este resultado tiene una importancia enorme, puesto que existe una generalización natural en el caso no conmutativo.

La K-teoría analítica

Sea A una C*-álgebra A (unitaria) y $\mathbb{M}_\infty(A)$ la *-álgebra no completa obtenida como límite inductivo de matrices $\mathbb{M}_\infty(A) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{M}_n(A)$, donde la inclusión es $\mathbb{M}_n(A) \hookrightarrow \mathbb{M}_{n+1}(A)$, con $a \mapsto \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Proyectores

Un elemento $p \in A$ es un *proyector* si es idempotente y autoadjunto, es decir, $p = p^2 = p^*$. El conjunto de los proyectores de A se denota por $\mathcal{P}(A)$.

Proyectores

Un elemento $p \in A$ es un *proyector* si es idempotente y autoadjunto, es decir, $p = p^2 = p^*$. El conjunto de los proyectores de A se denota por $\mathcal{P}(A)$.

Dos proyectores $p, q \in \mathbb{M}_\infty(A)$ son equivalentes, $p \sim q$, si existe $v \in \mathbb{M}_\infty(A)$, con $p = v^*v$ y $q = vv^*$. El conjunto de las clases de equivalencia $\mathcal{V}(A)$ es un semigrupo abeliano, con la suma

$$[p] + [q] = \left[\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} \right].$$

El functor covariante K_0

$K_0(A)$ es el grupo de Grothendieck asociado a $\mathcal{V}(A)$: sus elementos son diferencias formales $[p] - [q]$ con $[p], [q] \in \mathcal{V}(A)$.

El functor covariante K_0

$K_0(A)$ es el grupo de Grothendieck asociado a $\mathcal{V}(A)$: sus elementos son diferencias formales $[p] - [q]$ con $[p], [q] \in \mathcal{V}(A)$.

Si A es una C*-álgebra arbitraria, se define K_0 (functor covariante de la categoría de las C*-álgebras en la de los grupos abelianos) de modo que los elementos de $K_0(A)$ pueden pensarse como diferencias formales $[p] - [q]$, donde p y q son proyectores en $\mathbb{M}_k(\widetilde{A})$, para un cierto $k \in \mathbb{N}$ y $p - q \in \mathbb{M}_k(A)$.

El functor covariante K_0

$K_0(A)$ es el grupo de Grothendieck asociado a $\mathcal{V}(A)$: sus elementos son diferencias formales $[p]-[q]$ con $[p],[q]\in\mathcal{V}(A)$.

Si A es una C*-álgebra arbitraria, se define K_0 (functor covariante de la categoría de las C*-álgebras en la de los grupos abelianos) de modo que los elementos de $K_0(A)$ pueden pensarse como diferencias formales $[p]-[q]$, donde p y q son proyectores en $\mathbb{M}_k(\widetilde{A})$, para un cierto $k\in\mathbb{N}$ y $p-q\in\mathbb{M}_k(A)$.

Cuando A es unitaria, también es posible (y a veces muy útil) pensar $K_0(A)$ como las diferencias formales $[\mathcal{E}]-[\mathcal{F}]$, de clases de equivalencia de A-módulos proyectivos de tipo finito, con la suma directa exterior.

Invarianza por homotopía de K_0

Sean A, B dos C*-álgebras. Dos *-homomorfismos $\phi, \psi : A \to B$ se dicen *homótopos*, $\phi \sim_h \psi$, si existe una familia de *-homomorfismos $\phi_t : A \to B$ con $t \in [0, 1]$ de forma que $t \mapsto \phi_t(a)$ es una aplicación continua de $[0, 1]$ a B, para cada $a \in A$, $\phi_0 = \phi$ y $\phi_1 = \psi$.

Invarianza por homotopía de K_0

Sean A, B dos C*-álgebras. Dos *-homomorfismos $\phi, \psi : A \to B$ se dicen *homótopos*, $\phi \sim_h \psi$, si existe una familia de *-homomorfismos $\phi_t : A \to B$ con $t \in [0, 1]$ de forma que $t \mapsto \phi_t(a)$ es una aplicación continua de $[0, 1]$ a B, para cada $a \in A$, $\phi_0 = \phi$ y $\phi_1 = \psi$.

A la familia ϕ_t se la llama *camino de *-homomorfismos continuo punto a punto*.

Invarianza por homotopía K_0

Dos C*-álgebras A y B son *homotópicamente equivalentes* si existen *-homomorfismos $\phi : A \to B$ y $\psi : B \to A$ de forma que $\psi \circ \phi \sim_h 1_A$ y $\phi \circ \psi \sim_h 1_B$: se dice que $A \xrightarrow{\phi} B \xrightarrow{\psi} A$ es una *homotopía* entre A y B.

Invarianza por homotopía K_0

Dos C*-álgebras A y B son *homotópicamente equivalentes* si existen *-homomorfismos $\phi : A \to B$ y $\psi : B \to A$ de forma que $\psi \circ \phi \sim_h A$ y $\phi \circ \psi \sim_h B$: se dice que $A \xrightarrow{\phi} B \xrightarrow{\psi} A$ es una *homotopía* entre A y B.

Se verifica:

Invarianza por homotopía K_0

Dos C*-álgebras A y B son *homotópicamente equivalentes* si existen *-homomorfismos $\phi : A \to B$ y $\psi : B \to A$ de forma que $\psi \circ \phi \sim_h {}_A$ y $\phi \circ \psi \sim_h {}_B$: se dice que $A \xrightarrow{\phi} B \xrightarrow{\psi} A$ es una *homotopía* entre A y B.

Se verifica:

(i) si $\phi, \psi : A \to B$ con *-homomorfismos homótopos, entonces $K_0(\phi) = K_0(\psi)$;

Invarianza por homotopía K_0

Dos C*-álgebras A y B son *homotópicamente equivalentes* si existen *-homomorfismos $\phi : A \to B$ y $\psi : B \to A$ de forma que $\psi \circ \phi \sim_{h\ A}$ y $\phi \circ \psi \sim_{h\ B}$: se dice que $A \xrightarrow{\phi} B \xrightarrow{\psi} A$ es una *homotopía* entre A y B.

Se verifica:

(i) si $\phi, \psi : A \to B$ con *-homomorfismos homótopos, entonces $K_0(\phi) = K_0(\psi)$;

(ii) si A y B son homotópicamente equivalentes, entonces sus grupos K_0 son isomorfos.

Semiexactitud

Una sucesión exacta corta de C*-álgebras

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\phi} A \xrightarrow{\psi} B \longrightarrow 0$$

induce una sucesión exacta de grupos abelianos

$$K_0(I) \xrightarrow{K_0(\phi)} K_0(A) \xrightarrow{K_0(\psi)} K_0(B)$$

Semiexactitud

Una sucesión exacta corta de C*-álgebras

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\phi} A \xrightarrow{\psi} B \longrightarrow 0$$

induce una sucesión exacta de grupos abelianos

$$K_0(I) \xrightarrow{K_0(\phi)} K_0(A) \xrightarrow{K_0(\psi)} K_0(B)$$

Una sucesión exacta corta escindida de C*-álgebras induce una sucesión exacta escindida en K-teoría.

Unidades y suma

Dada una C*-álgebra A, $K_0(\widetilde{A}) = \mathbb{Z} \oplus K_0(A)$.

Unidades y suma

Dada una C*-álgebra A, $K_0(\widetilde{A}) = \mathbb{Z} \oplus K_0(A)$.

Dadas A y B dos C*-álgebras, es

$$K_0(A \oplus B) = K_0(A) \oplus K_0(B).$$

Estabilidad

Sean A una C*-álgebra y $n \in \mathbb{N}$. $K_0(A)$ es isomorfo a $K_0\big(M_n(A)\big)$, inducido por el *-homomorfismo $\lambda_{n,A} : A \to M_n(A)$ dado por $a \mapsto \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.
En particular, $K_0(A) \simeq K_0(A \otimes \mathfrak{K})$

Estabilidad

Sean A una C*-álgebra y $n \in \mathbb{N}$. $K_0(A)$ es isomorfo a $K_0\big(M_n(A)\big)$, inducido por el *-homomorfismo $\lambda_{n,A} : A \to M_n(A)$ dado por $a \mapsto \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.
En particular, $K_0(A) \simeq K_0(A \otimes \mathfrak{K})$

Invarianza por equivalencia de Morita

Si A y B son Morita-equivalentes, $K_0(A) \simeq K_0(B)$.

Continuidad

Para cada sistema inductivo (A_n, ϕ_n) de C*-álgebras, es

$$K_0(\varinjlim A_n) = \varinjlim K_0(A_n).$$

La K-teoría de orden superior

Se definen los grupos de K-teoría de orden superior, generalizando la noción de suspensión a C*-álgebras.
Sea A una C*-álgebra

$$SA = \{f \in C([0,1], A) \mid f(0) = f(1) = 0\} \cong C_0(\mathbb{R}, A) \cong C_0(\mathbb{R}) \otimes A.$$

La K-teoría de orden superior

Se definen los grupos de K-teoría de orden superior, generalizando la noción de suspensión a C*-álgebras.
Sea A una C*-álgebra

$$SA = \{f \in C([0,1], A) \mid f(0) = f(1) = 0\} \cong C_0(\mathbb{R}, A) \cong C_0(\mathbb{R}) \otimes A.$$

El grupo $K_n(A) = K(S^n A)$ para $n \geq 1$, donde S^n consiste en aplicar la suspensión n veces.
Si $\phi : A \to B$ es un *-homomorfismo, queda inducido el homomorfismo de grupos

$$K_n(\phi) = K_0(S^n \phi) : K_n(A) \to K_n(B).$$

La K-teoría de orden superior

Se pueden recuperar parte de las propiedades de K_0 para el resto de los grupos K_n:

La K-teoría de orden superior

Se pueden recuperar parte de las propiedades de K_0 para el resto de los grupos K_n:

(i) K_n es un functor covariante de la categoría de C*-álgebras en la categoría de grupos abelianos;

La K-teoría de orden superior

Se pueden recuperar parte de las propiedades de K_0 para el resto de los grupos K_n:

(i) K_n es un functor covariante de la categoría de C*-álgebras en la categoría de grupos abelianos;

(ii) K_n es invariante por homotopía;

La K-teoría de orden superior

Se pueden recuperar parte de las propiedades de K_0 para el resto de los grupos K_n:

(i) K_n es un functor covariante de la categoría de C*-álgebras en la categoría de grupos abelianos;

(ii) K_n es invariante por homotopía;

(iii) K_n es semi exacto y exacto escindido;

La K-teoría de orden superior

Se pueden recuperar parte de las propiedades de K_0 para el resto de los grupos K_n:

(i) K_n es un functor covariante de la categoría de C*-álgebras en la categoría de grupos abelianos;

(ii) K_n es invariante por homotopía;

(iii) K_n es semi exacto y exacto escindido;

(iv) K_n es continuo;

La K-teoría de orden superior

Se pueden recuperar parte de las propiedades de K_0 para el resto de los grupos K_n:

(i) K_n es un functor covariante de la categoría de C*-álgebras en la categoría de grupos abelianos;

(ii) K_n es invariante por homotopía;

(iii) K_n es semi exacto y exacto escindido;

(iv) K_n es continuo;

(v) K_n es estable.

Sucesión exacta larga en K-teoría

Sean A una C*-álgebra e I un ideal de A. La siguiente sucesión es exacta:

$$\cdots \xrightarrow{\delta} K_2(I) \xrightarrow{K_2(\iota)} K_2(A) \xrightarrow{K_2(j)} K_2(A/I) \xrightarrow{\delta} K_1(I) \xrightarrow{K_1(\iota)} K_1(A) \xrightarrow{K_1(j)} K_1(A/I) \xrightarrow{\delta} K_0(I) \xrightarrow{K_0(\iota)} K_0(A) \xrightarrow{K_0(j)} \cdot$$

El teorema de periodicidad de Bott

Dada una C*-álgebra A, los grupos $K_n(A)$ y $K_{n+2}(A)$ son isomorfos.

El teorema de periodicidad de Bott

Dada una C*-álgebra A, los grupos $K_n(A)$ y $K_{n+2}(A)$ son isomorfos.

La sucesión exacta larga queda reducida al siguiente ciclo exacto de seis términos:

$$\begin{tikzcd} K_1(I) \arrow[r, "K_1(\iota)"] & K_1(A) \arrow[r, "K_1(j)"] & K_1(A/I) \arrow[d, "\delta"] \\ K_0(A/I) \arrow[u, "\delta"] & K_0(A) \arrow[l, "K_0(j)"] & K_0(I) \arrow[l, "K_0(\iota)"] \end{tikzcd}$$

El teorema de Swan

Si M es un espacio localmente compacto, el grupo de K-teoría analítica $K_j(C_0(M))$ es de modo natural isomorfo al grupo de K-teoría topológica $K^j(M)$.

Unos ejemplos

A	$K^0(A)$	$K^1(A)$
$C_0(*) \simeq \mathbb{C}$	$\mathbb{Z}$	0
$C_0(\mathbb{S}^n)$	$\mathbb{Z}$ (n impar) y $\mathbb{Z}^2$ (n par)	$\mathbb{Z}$ (n impar) y 0 (n par)
$C_0(\mathbb{R}^n)$	0 (n impar) y $\mathbb{Z}$ (n par)	$\mathbb{Z}$ (n impar) y 0 (n par)
$C_0(\mathbb{T}^n)$	$\mathbb{Z}^{2^{n-1}}$	$\mathbb{Z}^{2^{n-1}}$
$\mathfrak{B}(\mathcal{H})$	0	0
$\mathfrak{K}(\mathcal{H})$	$\mathbb{Z}$	0

La K-teoría analítica

Ya hemos comentado que si A y B son C*-álgebras Morita-equivalentes, sus grupos de K-teoría son isomorfos.

La K-teoría analítica

Ya hemos comentado que si A y B son C*-álgebras Morita-equivalentes, sus grupos de K-teoría son isomorfos.

En particular, si T es una transversal total en $(M, \mathcal{F})$, entonces $K_*(C^*(M, \mathcal{F}))$ y $K_*(C^*_{red}(Hol(\mathcal{F})^T_T))$ son grupos isomorfos.

Ejemplos

Foliación por puntos

Si M es localmente compacto y está foliado por puntos, el espacio de hojas es M, y:

Ejemplos

Foliación por puntos

Si M es localmente compacto y está foliado por puntos, el espacio de hojas es M, y:

- $Hol(\mathcal{F}) = M$,

Ejemplos

Foliación por puntos

Si M es localmente compacto y está foliado por puntos, el espacio de hojas es M, y:

- $Hol(\mathcal{F}) = M$,
- $C^*(M, \mathcal{F}) = C_0(M)$,

Ejemplos

Foliación por puntos

Si M es localmente compacto y está foliado por puntos, el espacio de hojas es M, y:

- $Hol(\mathcal{F}) = M$,
- $C^*(M, \mathcal{F}) = C_0(M)$,
- $K_*(C^*(M, \mathcal{F})) = K_*(C_0(M)) = K^*(M)$.

Ejemplos

Foliación por una única hoja

Si M es localmente compacto y M es una variedad foliada por una única hoja, el espacio de hojas se reduce a un punto, y:

Ejemplos

Foliación por una única hoja

Si M es localmente compacto y M es una variedad foliada por una única hoja, el espacio de hojas se reduce a un punto, y:

- $Hol(\mathcal{F}) = M \times M$,

Ejemplos

Foliación por una única hoja

Si M es localmente compacto y M es una variedad foliada por una única hoja, el espacio de hojas se reduce a un punto, y:

- $Hol(\mathcal{F}) = M \times M$,
- $C^*(M, \mathcal{F}) = \mathfrak{K}(L^2(M, \lambda))$,

Ejemplos

Foliación por una única hoja

Si M es localmente compacto y M es una variedad foliada por una única hoja, el espacio de hojas se reduce a un punto, y:

- $Hol(\mathcal{F}) = M \times M$,
- $C^*(M, \mathcal{F}) = \mathfrak{K}(L^2(M, \lambda))$,
- $K_*(C^*(M, \mathcal{F})) = K_*(\mathfrak{K}(L^2(M, \lambda))) = K^*(*)$.

Ejemplos

Fibraciones

Si la foliación viene dada por una fibración localmente trivial $F^p \to M \to B^q$, con F conexo, M está foliada por las imágenes inversas de los puntos de B. Todas las hojas son cerradas y difeomorfas a F. El espacio de hojas es B.

Ejemplos

Fibraciones

Si la foliación viene dada por una fibración localmente trivial $F^p \to M \to B^q$, con F conexo, M está foliada por las imágenes inversas de los puntos de B. Todas las hojas son cerradas y difeomorfas a F. El espacio de hojas es B.

- $C^*(M, \mathcal{F}) \simeq C_0(B) \otimes \mathfrak{K}$,

Ejemplos

Fibraciones

Si la foliación viene dada por una fibración localmente trivial $F^p \to M \to B^q$, con F conexo, M está foliada por las imágenes inversas de los puntos de B. Todas las hojas son cerradas y difeomorfas a F. El espacio de hojas es B.

- $C^*(M, \mathcal{F}) \simeq C_0(B) \otimes \mathfrak{K}$,
- $K_*(C^*(M, \mathcal{F})) \simeq K^*(B)$.

Ejemplos

Acciones

Usando el *isomorfismo de Thom de Connes*, para foliaciones inducidas por acciones libres de $\mathbb{R}^n$, es $C^*(M, \mathcal{F}) \simeq C_0(M) \rtimes \mathbb{R}^n$ y su K-teoría es $K^*(M)$ si n par y $K^{*+1}(M)$ si n es impar.

Ejemplos

Acciones

Usando el *isomorfismo de Thom de Connes*, para foliaciones inducidas por acciones libres de $\mathbb{R}^n$, es $C^*(M,\mathcal{F}) \simeq C_0(M) \rtimes \mathbb{R}^n$ y su K-teoría es $K^*(M)$ si n par y $K^{*+1}(M)$ si n es impar.

Para foliaciones inducidas por acciones libres de grupos de Lie Γ resolubles y simplemente conexos, se puede probar que $K_*(C^*(M,\mathcal{F})) \simeq K^{*+dim(\Gamma)}(M)$.

Ejemplos

La foliación de Kronecker

Para $\theta \in \mathbb{R}$, las curvas integrales del campo de vectores $X = \frac{\partial}{\partial x_1} + \theta \frac{\partial}{\partial x_2}$, definen una foliación $\mathcal{F}_\theta$ sobre el toro $\mathbb{T}^2$ (soluciones de la ecuación $dy = \theta dx$).

Ejemplos

La foliación de Kronecker

Para $\theta \in \mathbb{R}$, las curvas integrales del campo de vectores $X = \frac{\partial}{\partial x_1} + \theta \frac{\partial}{\partial x_2}$, definen una foliación $\mathcal{F}_\theta$ sobre el toro $\mathbb{T}^2$ (soluciones de la ecuación $dy = \theta dx$).

- Si $\theta \in \mathbb{Q}$, cada hoja es una circunferencia;

Ejemplos

La foliación de Kronecker

Para $\theta \in \mathbb{R}$, las curvas integrales del campo de vectores $X = \frac{\partial}{\partial x_1} + \theta \frac{\partial}{\partial x_2}$, definen una foliación $\mathcal{F}_\theta$ sobre el toro $\mathbb{T}^2$ (soluciones de la ecuación $dy = \theta dx$).

- Si $\theta \in \mathbb{Q}$, cada hoja es una circunferencia;
- Si $\theta \in \mathbb{I}$, cada hoja es una recta densa en el toro, y la foliación inducida es la *foliación de Kronecker*.

La foliación de Kronecker

El espacio de hojas de la foliación de Kronecker

$\mathcal{L}_\theta = \mathbb{T}^2 / \mathcal{F}_\theta$, es un espacio indiscreto.

La foliación de Kronecker

El espacio de hojas de la foliación de Kronecker

$\mathcal{L}_\theta = \mathbb{T}^2/\mathcal{F}_\theta$, es un espacio indiscreto.

La foliación está definida por una acción libre ρ de $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{T}^2$ (o sobre $C(\mathbb{T}^2)$), la dada por el flujo.

La foliación de Kronecker

El espacio de hojas de la foliación de Kronecker

$\mathcal{L}_\theta = \mathbb{T}^2/\mathcal{F}_\theta$, es un espacio indiscreto.

La foliación está definida por una acción libre ρ de $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{T}^2$ (o sobre $C(\mathbb{T}^2)$), la dada por el flujo.

Si pasamos a una transversal $T = \mathbb{S}^1$, la foliación sobre T está dada por una acción libre de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{S}^1$ ($\alpha^n(z) = e^{-2i\pi n\theta} z$).

La foliación de Kronecker

La C*-álgebra de la foliación de Kronecker $C^*(\mathcal{L}_\theta)$

es $C_0(\mathbb{R}^2) \rtimes_\rho \mathbb{R}$, o equivalentemente,

La foliación de Kronecker

La C*-álgebra de la foliación de Kronecker $C^*(\mathcal{L}_\theta)$

es $C_0(\mathbb{R}^2) \rtimes_\rho \mathbb{R}$, o equivalentemente,

es $C(\mathbb{S}^1) \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$.

La foliación de Kronecker

La C*-álgebra de la foliación de Kronecker $C^*(\mathcal{L}_\theta)$

es $C_0(\mathbb{R}^2) \rtimes_\rho \mathbb{R}$, o equivalentemente,

es $C(\mathbb{S}^1) \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$.

Ambas C*-álgebras son Morita-equivalentes (los grupoides de holonomía y de holonomía transverso de la foliación lo son), en particular, sus K-teorías son isomorfas.

La foliación de Kronecker

Aún más, $C^*(\mathcal{L}_\theta)$ es Morita-equivalente a $\mathcal{A}_\theta$, la C*-álgebra universal engendrada por dos generadores unitarios u y v $(uu^* = 1 = u^*u$ y $vv^* = 1 = v^*v)$, tales que $uv = e^{-2i\pi\theta}vu$.

La foliación de Kronecker

Aún más, $C^*(\mathcal{L}_\theta)$ es Morita-equivalente a $\mathcal{A}_\theta$, la C*-álgebra universal engendrada por dos generadores unitarios u y v $(uu^* = 1 = u^*u \text{ y } vv^* = 1 = v^*v)$, tales que $uv = e^{-2i\pi\theta}vu$.

La C*-álgebra universal engendrada por dos operadores unitarios u y v con las relaciones y $uv = vu$ era $C(\mathbb{T}^2)$.

La foliación de Kronecker

Aún más, $C^*(\mathcal{L}_\theta)$ es Morita-equivalente a $\mathcal{A}_\theta$, la C*-álgebra universal engendrada por dos generadores unitarios u y v $(uu^* = 1 = u^*u \text{ y } vv^* = 1 = v^*v)$, tales que $uv = e^{-2i\pi\theta}vu$.

La C*-álgebra universal engendrada por dos operadores unitarios u y v con las relaciones y $uv = vu$ era $C(\mathbb{T}^2)$.

$C^*(\mathcal{L}_\theta)$ se denomina el *toro no conmutativo*.

La foliación de Kronecker

$\mathcal{A}_\theta$ versus $C(\mathbb{T}^2)$:

La foliación de Kronecker

$\mathcal{A}_\theta$ versus $C(\mathbb{T}^2)$:

(i) $C(\mathbb{T}^2)$ tiene muchos ideales, $\mathcal{A}_\theta$ es simple;

La foliación de Kronecker

$\mathcal{A}_\theta$ versus $C(\mathbb{T}^2)$:

(i) $C(\mathbb{T}^2)$ tiene muchos ideales, $\mathcal{A}_\theta$ es simple;

(ii) $C(\mathbb{T}^2)$ es conmutativa y $\mathcal{A}_\theta$ no (su centro es $\mathbb{C}$);

La foliación de Kronecker

$\mathcal{A}_\theta$ versus $C(\mathbb{T}^2)$:

(i) $C(\mathbb{T}^2)$ tiene muchos ideales, $\mathcal{A}_\theta$ es simple;

(ii) $C(\mathbb{T}^2)$ es conmutativa y $\mathcal{A}_\theta$ no (su centro es $\mathbb{C}$);

(iii) $\mathcal{A}_\theta$ tiene una única aplicación traza y $C(\mathbb{T}^2)$ posee muchas:

$$\tau(f) = \int_0^1 \int_0^1 f(e^{2\pi is}, e^{2\pi it}) g(e^{2\pi is}, e^{2\pi it}) dsdt,$$

con g función de probabilidad sobre $\mathbb{T}^2$
$(\int_0^1 \int_0^1 g(e^{2\pi is}, e^{2\pi it}) dsdt = 1)$;

La foliación de Kronecker

$\mathcal{A}_\theta$ versus $C(\mathbb{T}^2)$:

(i) $C(\mathbb{T}^2)$ tiene muchos ideales, $\mathcal{A}_\theta$ es simple;

(ii) $C(\mathbb{T}^2)$ es conmutativa y $\mathcal{A}_\theta$ no (su centro es $\mathbb{C}$);

(iii) $\mathcal{A}_\theta$ tiene una única aplicación traza y $C(\mathbb{T}^2)$ posee muchas:

$$\tau(f) = \int_0^1 \int_0^1 f(e^{2\pi is}, e^{2\pi it}) g(e^{2\pi is}, e^{2\pi it}) dsdt,$$

con g función de probabilidad sobre $\mathbb{T}^2$
($\int_0^1 \int_0^1 g(e^{2\pi is}, e^{2\pi it}) dsdt = 1$);

(iv) $\mathcal{A}_\theta$ tiene muchos proyectores y $C(\mathbb{T}^2)$ sólo dos (0 y 1).

La foliación de Kronecker

El toro no conmutativo

¿Cómo clasificar la familia de álgebras de operadores $\{\mathcal{A}_\theta : \theta \in \mathbb{I}\}$?

La foliación de Kronecker

El toro no conmutativo

¿Cómo clasificar la familia de álgebras de operadores $\{\mathcal{A}_\theta : \theta \in \mathbb{I}\}$?

Debe recurrirse a la estructura proyectiva, es decir, a $K_0(\mathcal{A}_\theta)$ y calcular las trazas de estos proyectores, que son un *código* para $\mathcal{A}_\theta$.

La foliación de Kronecker

En 1980, Pimsner-Voiculescu prueban que $K_0(\mathcal{A}_\theta) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

La foliación de Kronecker

En 1980, Pimsner-Voiculescu prueban que $K_0(\mathcal{A}_\theta) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

En ese mismo año, Rieffel prueba que existe un proyector $e_\theta \in \mathcal{A}_\theta$, tal que $\tau(e_\theta) = \theta$, y lo construye imponiendo la condición $e_\theta = v^* g(u) + f(u) + g(u)v$, con f y g funciones apropiadas para que $e_\theta^2 = e_\theta = e_\theta^*$, y entonces $\tau(e_\theta) = \displaystyle\int_0^1 f(t)dt = \theta$; y así se deduce la *propiedad de Pimsner-Rieffel-Voiculescu*, $\tau(Proy(\mathcal{A}_\theta)) = (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\theta) \cap [0,1]$, donde τ es la única aplicación traza normalizada.

La foliación de Kronecker

En 1980, Pimsner-Voiculescu prueban que $K_0(\mathcal{A}_\theta) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

En ese mismo año, Rieffel prueba que existe un proyector $e_\theta \in \mathcal{A}_\theta$, tal que $\tau(e_\theta) = \theta$, y lo construye imponiendo la condición $e_\theta = v^* g(u) + f(u) + g(u)v$, con f y g funciones apropiadas para que $e_\theta^2 = e_\theta = e_\theta^*$, y entonces $\tau(e_\theta) = \int_0^1 f(t)dt = \theta$; y así se deduce la *propiedad de Pimsner-Rieffel-Voiculescu*, $\tau(Proy(\mathcal{A}_\theta)) = (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\theta) \cap [0,1]$, donde τ es la única aplicación traza normalizada.

Las $\mathcal{A}_\theta$, $0 < \theta < 1$

Si $\mathcal{A}_\theta \simeq \mathcal{A}_{\theta'}$, $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\theta = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\theta'$ con lo que $\theta = \theta'$ ó $\theta' = 1 - \theta$.

Bibliografía básica

- A. Candel L. Conlon, *Foliations I y II*, GSM 23 y 60, AMS (2000 y 2003).

- A. Connes, *Noncommutative geometry*, Academic Press, 1994.