Segunda Jornada Internacional
"Matemáticas Everywhere"

Matemáticas a través de la paradoja

Marta Macho Stadler

20 y 21 de junio de 2011

Resumen

Las paradojas juegan un papel decisivo en el desarrollo de la ciencia. El nacimiento de muchas ideas matemáticas se basa precisamente en la reflexión motivada por situaciones aparentemente "disparatadas". En este artículo repasamos algunos ejemplos concretos de paradojas vinculadas a las matemáticas.

Palabras Clave: paradoja, desapariciones geométricas, anamorfosis, anamorfosis oblicua, anamorfosis por estiramiento, anamorfosis cilíndrica, anamorfosis cónica, paradojas lógicas, paradojas del infinito, paradojas de la vaguedad, paradojas de la predicción, paradojas de la confirmación, paradojas topológicas.

1. Paradojas de la geometría: magia e ilusión

1.1 Desapariciones geométricas

Las –aparentes– pérdidas de superficie ofrecen un ejemplo de desaparición geométrica.

El primer rectángulo de la figura 1 tiene un área de 65 unidades cuadradas (5 por 13). Si se recorta siguiendo las líneas marcadas y se cambian las piezas de lugar, se obtiene un cuadrado de área 64 unidades cuadradas (8 por 8). ¡Esto es imposible! Si no hemos eliminado ninguna pieza...

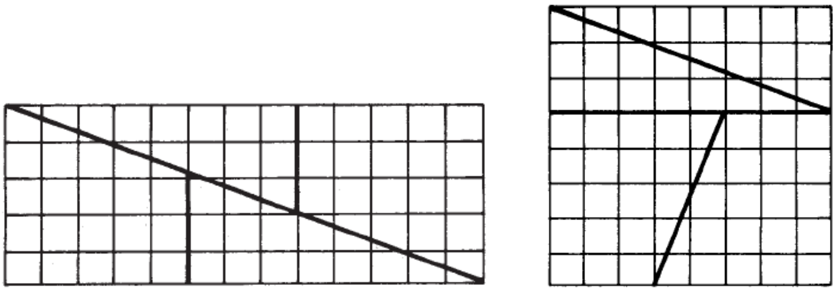

Figura 1. ¿65 = 64?

La aparente pérdida de superficie se debe al reajuste de los trozos. De hecho, en el cuadrado, los bordes oblicuos no coinciden exactamente, sino que se solapan formando dos pequeños paralelogramos, casi imperceptibles, cuyas áreas suman una unidad cuadrada. Esto se apreciaría si la figura fuese más grande y estuviese construida con sumo cuidado –observar que los trazos que definen las líneas de corte son lo suficientemente gruesos como para esconder estas imperfecciones–.

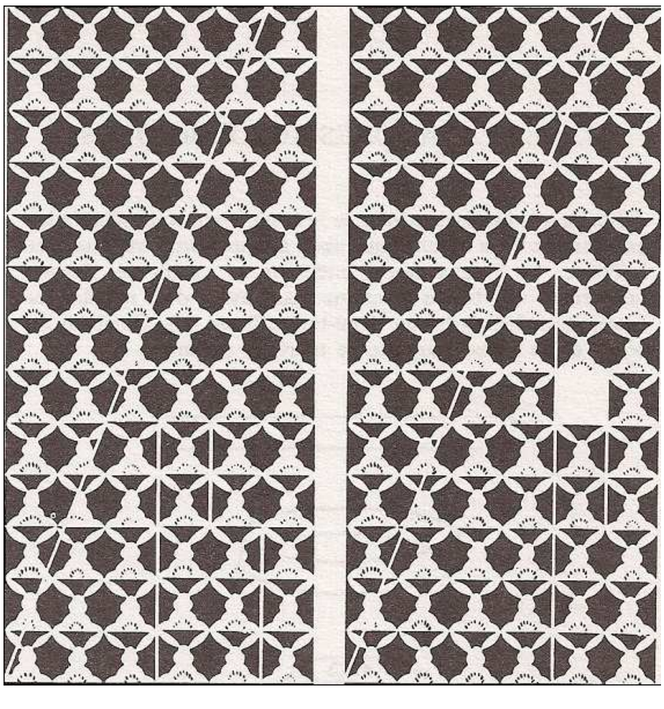

Figura 2. La paradoja del conejo de Paul Curry. Fotografía tomada de [2]

¿Conoces la paradoja del conejo desapareciendo? Tenemos 78 conejos –planos– encerrados cada uno de ellos en su correspondiente caseta, como se muestra en la figura 2. Pero, si cortamos siguiendo las líneas blancas y recomponemos hasta formar la segunda figura, observamos que un conejo ha desaparecido. ¿Dónde se ha quedado? La respuesta tiene mucho que ver con la de la anterior paradoja.

El puzzle *Abandone la Tierra* aparece en el libro [3] Sam Loyd. Se trata de un rompecabezas formado por dos trozos, como muestra la figura 3. Cuando se clava el círculo de la izquierda sobre el de la derecha –por su centro, con ayuda de una chincheta, por ejemplo, para poder girar la pieza– se observa a unos guerreros en actitud de lucha.

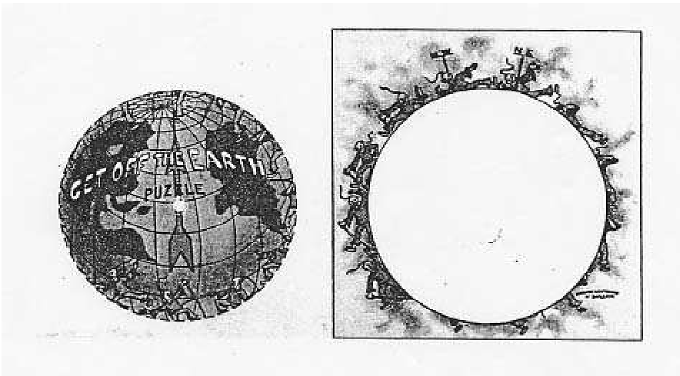

Figura 3. Abandone la Tierra

Al hacer girar el círculo interior dejando que la flecha apunte al norte, contamos 13 guerreros. Pero si la flecha apunta al noroeste, tan solo quedan 12... ¿dónde ha quedado el guerrero que falta?

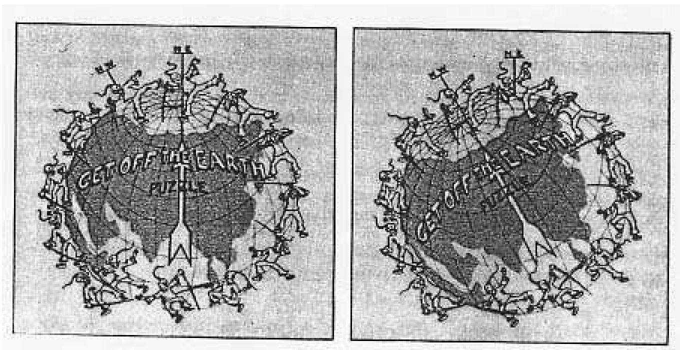

Figura 4. ¿Dónde ha quedado el guerrero que ha desaparecido?

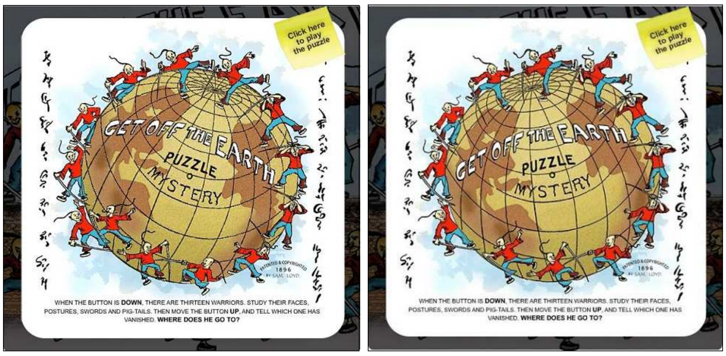

Figura 5 ¿Dónde ha quedado el guerrero que ha desaparecido? Las imágenes en color están extraídas de la página web http://www.samuelloyd.com/

1.2 Anamorfosis

Una *anamorfosis* es una deformación reversible de una imagen a través de procedimientos matemáticos u ópticos.

En la figura 6 se muestra un grabado de Durero en el que se observa como el artista está dibujando a su modelo, y para guardar las proporciones utiliza un retículo –un *velo de Alberti*– colocado perpendicularmente a ella. De este modo consigue reducir a escala a la mujer que desea representar en su lienzo.

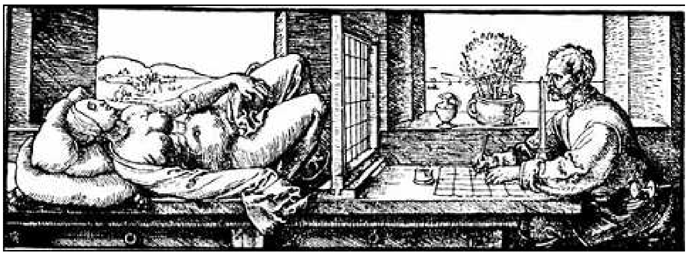

Figura 6. Grabado de Durero

Pero, ¿qué sucedería si ese retículo se colocara de manera oblicua?

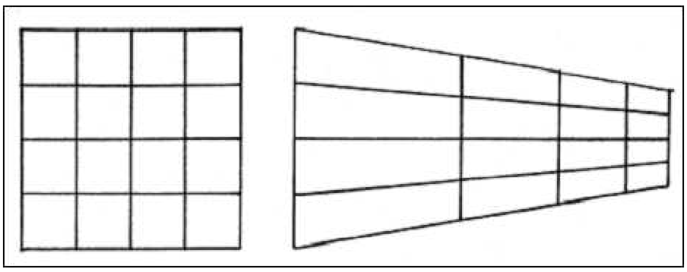

Figura 7

La figura quedaría deformada: al construir la imagen proyectada sobre un plano oblicuo, la única manera de ver la figura en sus proporciones reales sería adoptando el punto de vista excéntrico adoptado para la proyección.

Un ejemplo de este tipo de anamorfosis –*anamorfosis oblicua*– es el magnífico cuadro *Los embajadores* (1533), la obra más célebre de Holbein el Joven (1497-1543). Representa a dos diplomáticos, posando delante de un tapiz. Entre los dos hombres, diversos objetos, símbolos del poder –laico y eclesiástico– y del conocimiento científico –relojes solares, un globo terráqueo, instrumentos de navegación y de astronomía, libros, etc–. La escena representada por el pintor está datada con gran precisión: 11 de abril de 1533. Poco tiempo antes, Enrique VIII solicitaba al papa Clemente VII la anulación de su matrimonio con Catalina de Aragón, ya que de su unión no había nacido ningún heredero varón. El papa no accede a este favor, lo que no impide al monarca desposar en secreto a Ana Bolena el 25 de enero. A principios de abril, el arzobispo de Canterbury, Thomas Cranmer, anula él mismo el matrimonio anterior y declara a Ana Bolena reina de Inglaterra. El hecho no tenía precedentes, y se envió una embajada francesa para intentar una reconciliación de Enrique VIII con el papa. El cuadro de Holbein representa a los dos miembros de esta embajada: Jean de Dintevile (1504-1555) –a la izquierda, poseedor del poder político– y Georges de Selve (1508-1541) –a la derecha, depositario del poder religioso–.

Figura 8. Los Embajadores, Holbein el joven, 1533. National Gallery, Londres

En primer plano, en el centro, se observa un objeto enigmático: se trata de un cráneo estirado, cuya forma no se aprecia delante del espectador a no ser que éste adopte un cierto punto de vista con respecto al cuadro.

La técnica empleada por Holbein para producir este efecto es la de la *anamorfosis oblicua*.

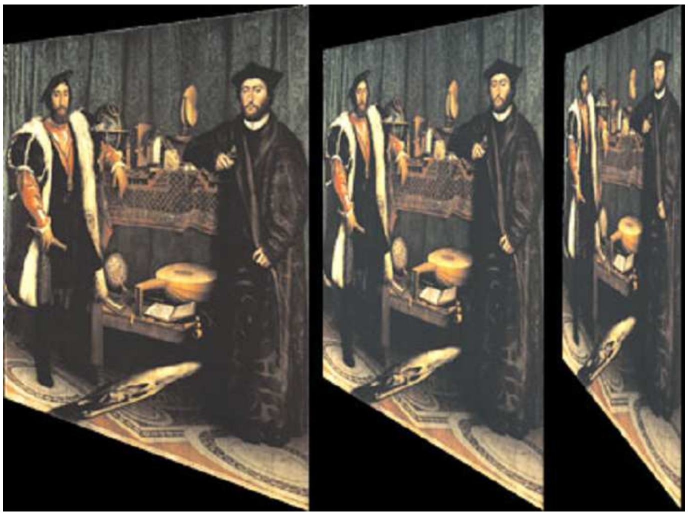

Figura 9

La imagen libra su secreto cuando una se coloca al lado del cuadro para mirarlo oblicuamente: entonces se ve una calavera deformada proyectando una sombra sobre el embaldosado del suelo.

Figura 10. La calavera escondida

Los diseños anamórficos se utilizan en la señalización de nuestras carreteras. La razón es que las y los conductores ven las marcas sobre el asfalto desde una posición inadecuada, con un aparente encogimiento de los objetos al ir avanzando. En el ejemplo de la figura 11, el tamaño de la flecha parece el mismo que el de la palabra CAR debajo de ella. Pero, visto de lado, se observa que la flecha es más del doble de larga que la palabra: la señalización utiliza la herramienta de *anamorfosis por estiramiento.*

Figura 11

Una técnica bellísima es la de las anamorfosis cilíndricas o cónicas: como se muestra en la figura 12 –y tras los correspondientes cálculos matemáticos– la figura que se desea desarrolla sobre un cilindro o un cono –también se puede hacer sobre otro tipo de figuras, como una pirámide–. Se recupera la imagen original al ver reflejado el dibujo deformado sobre un espejo cilíndrico o cónico.

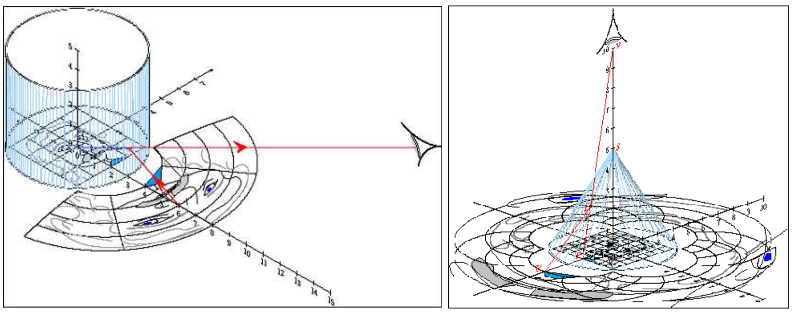

Figura 12. Anamorfosis cilíndrica y cónica. Imágenes tomadas de *http://members.aol.com/ManuelLuque3/miroirs.htm*

El artista Itsván Orosz es un mago de la anamorfosis, en la figura 13 se puede ver una de sus obras. El cuadro representa un paisaje nevado, con montañas, personas caminando, barcos y –aunque en la imagen no se vea por estar colocado sobre él el cilindro– el sol en un cielo cubierto de nubes. Es decir, podría ser perfectamente una escena de *La isla misteriosa* de Julio Verne. Y al colocar un espejo cilíndrico sobre el sol, reflejado sobre él aparece Julio

Verne, que estaba *escondido* en el paisaje original.

Figura 13: La isla misteriosa y el retrato de Julio Verne

La figura 14 muestra otra de las obras de Orosz: un joven dibuja un impresionante cuervo, y cuando coloca un espejo cilíndrico en el lugar adecuado, el rostro de Edgar Allan Poe –el autor de *El cuervo*– aparece sorprendentemente reflejado.

Figura 14. The Raven

La figura 15 muestra un peculiar juego de tazas de café, con una divertida anamorfosis que hace aparecer –al colocar la taza sobre el plato– a unas bailarinas de can-can del pintor Henri de Toulouse-Lautrec.

Figura 15

En la figura 16, se muestra la obra *Deceptive outward appearance* del diseñador gráfico Ole Martin Lund Bo... y en la figura 17 se descubre el engaño...

Figura 16

Figura 17

Observar que el texto está dibujado sobre las maderas, no sobre la pared. El efecto conseguido es, sin duda, impresionante.

Hay muchas otras maneras de crear anamorfosis, muy utilizadas en el mundo artístico: Kurt Wenner y Julian Beever son, por ejemplo, dos de los artistas más conocidos en el mundo de la anamorfosis. Sus obras dibujadas en calles y edificios son una auténtica joya –y precisan estudios minuciosos previos a su elaboración final–.

2. Paradojas lógicas: de barberos y otros asuntos

Barbilandia es una ciudad donde el barbero –Fígaro– sólo afeita a los que no se afeitan a si mismos. Como persona curiosa que soy, me pregunto ¿quién afeita a Fígaro?

Pensemos un poco... Fígaro no se puede afeitar a sí mismo, ya que sólo afeita a aquellas personas que no se afeitan a sí mismas. Pero entonces, debería de afeitarse, ya que Fígaro afeita toda el que no se afeite a sí mismo. ¡Vaya lío!

Bertrand Russell definió su denominada *teoría de tipos* que eliminaba todos aquellos conjuntos auto-contradictorios.

Así, que lamentablemente, el Barbero de Barbilandia no existe.

3. Paradojas del infinito: el hotel infinito de Hilbert

Érase una vez un hotel –*Infinito Hotel*– con una cantidad numerable de habitaciones, es decir, infinitas numeradas de la forma 1, 2, 3, etc. *Infinito Hotel* tiene contratado a Jack Torrance –si, el de *El Resplandor*– que sabe que la consigna del hotel es *Garantizamos el alojamiento a cualquier huésped*.

Un día en el que el *Infinito Hotel* estaba lleno, llega una persona que desea alojarse. ¡Qué mala suerte! Jack sabe que debe ser fiel al lema del hotel, y –había hecho un curso de teoría de conjuntos– solicita a todos los huéspedes del hotel que hagan los siguiente:

Por favor, si ocupas la habitación número n, pasa a la n+1. Gracias.

De este modo, Jack consigue liberar la habitación número 1, y cumple la consigna del hotel. Pero... ¿qué pasa con la persona que ocupaba la última habitación? No hay problema, no existe la "última habitación".

Otro día en el que el *Infinito Hotel* estaba lleno comienza un terrible temporal, y llega una excursión con infinitos Boy Scout –pero en cantidad numerable– que no se atreven a dormir en el bosque. Jack ni se inmuta, y siempre pensando en la consigna del hotel, solicita con autoridad:

Por favor, si ocupas la habitación número n, pasa a la 2n. Gracias.

Así, quedan libres todas las habitaciones impares –recordar que el cardinal de los números impares es el mismo que el de todos los números naturales– y hace entrar en cada una de ellas a uno de los pusilánimes Boy Scout.

En otra ocasión en la que el *Infinito Hotel* estaba de nuevo lleno, una Agencia de Viajes hace una oferta exclusiva para personas mayores de 70 años. El descuento es tan excepcional, que infinitas excursiones –en cantidad numerable– de infinitos pensionistas –en cantidad numerable– llegan impacientes a disfrutar de las noches de baile y los desayunos del hotel. Jack es un profesional, y por megafonía anuncia:

Por favor, si ocupas la habitación número n y n es un número primo o una potencia de un número primo, haz lo siguiente: eleva 2 al número de habitación n que ocupas, deja libre tu habitación y ocupa la habitación 2^n.

¿Qué lío está armando Jack? No hay que impacientarse, aún no ha terminado. El recepcionista asigna a cada excursión un número primo p, y a cada pensionista de cada excursión un número impar m. Cada nuevo huésped debe ir a la habitación p^m –justo son las de este tipo las que han quedado libres– si pertenece a la excursión p y Jack le ha asignado el impar m. Al existir una cantidad numerable de primos y de impares, Jack ha vuelto de nuevo a resolver el problema a la perfección.

4. Paradojas de la vaguedad: el eterno problema del tamaño

¿Cuántos granos de arena hay en un montón? Antes de contestar... ¿qué es un montón?

He mirado el diccionario de la Real Academia Española y en la definición de "montón" dice: *Conjunto de cosas puestas sin orden unas encima de otras.*

Bueno... entonces yo diría que un grano de arena no hace un montón. Entonces, dos granos de arena tampoco serán un montón... añadiendo otro grano, con tres granos tampoco tendremos un montón... si proseguimos de este modo el argumento –es decir, no se pasa de *no ser* un montón a *serlo* por añadir un *miserable* grano– acabamos de demostrar que 10^{100} no son un montón... pero 10^{100} es ENORME... ¿Seguro que no es un montón? Yo diría que si lo es. Entonces, algo ha tenido que fallar en el argumento.

El problema proviene de la vaguedad del lenguaje... la definición de montón es bastante ambigua, y está sujeta a interpretaciones.

¿Qué soluciones se han dado a esta paradoja? Una de ellas se atribuye a Frege y Russell que abogan por acercarse a un lenguaje ideal cuyo atributo clave es la precisión. Otra manera de evitarla es cambiar la lógica binaria –si o no, verdad o falso– por lógicas multivaluadas, como por ejemplo la lógica difusa de Goguen y Zadeh, que reconoce grados de verdad para cualquier predicado.

5. Paradojas de la predicción: ¡Me libro seguro!

Érase una vez, en la Edad Media, un rey de reconocida sinceridad –siempre decía la verdad– que pronuncia su sentencia ante un reo condenado a muerte:

Una mañana de este mes serás ejecutado, pero no lo sabrás hasta esa misma mañana, de modo que cada noche te acostarás con la duda, que presiento terrible, de si esa será tu última sobre la Tierra...

Tras el primer impacto, ya en la soledad de su celda, el reo argumenta del siguiente modo:*Si el mes tiene 30 días, es evidente que no podré ser ajusticiado el día 30, ya que el 29 por la noche sabría que a la mañana siguiente habría de morir... Así que el último día posible para cumplir la sentencia es el 29. Pero entonces, el 28 por la noche tendré la certeza de que por la mañana seré ejecutado...*

Continuando de este modo con su argumento, el reo concluye que no puede ser ejecutado –con las normas impuestas por el rey– ningún día del mes, así que relajado y feliz, decide esperar a que pasen los días... sabe que el rey no miente nunca, así que si su condena no puede ejecutarse, le dejará libre al agotarse los días.

Sin embargo, contra todo pronóstico, un día cualquiera –por ejemplo el día 13, día de mala suerte– se presenta el verdugo en la celda con el hacha afilada y ejecuta al reo.

Desde luego, el rey no ha mentido, ya que el reo se ha llevado una buena –y fatídica– sorpresa. Pero entonces ¿dónde ha fallado ese argumento tan convincente del reo?

Una solución puede pasar por la noción de que no es lo mismo el día 30, más el día 29, más el día 28, etc. que el conjunto "el mes". Un conjunto no es la mera adición de sus partes, y por ello posee cualidades diferentes que las de sus elementos. El análisis individual, día a día, del prisionero es exquisito. Pero el defecto en su argumento aparece cuando atribuye al conjunto –el mes– las mismas cualidades que poseían sus partes –cada día, tratado individualmente–, no advirtiendo que "el mes" ha incorporado algunas características, como la de contener "días sorpresa".

Hacia el siglo III, el filósofo chino Hui Tzu afirmaba:

Un caballo bayo y una vaca parda son tres: el caballo, la vaca, y el conjunto de caballo y vaca.

El razonamiento no es trivial, y es la esencia de la paradoja del condenado.

6. Paradojas de la confirmación: ¿son todos los cuervos negros?

Carl Hempel, inventor de esta paradoja, afirma que:

La existencia de una vaca de color violeta incrementa la probabilidad de que los cuervos sean negros.

¿Por qué? Para responder, establezcamos la ley:

Todos los cuervos son negros,

de una manera diferente, pero lógicamente equivalente

Todos los objetos no-negros no son cuervos.

Hempel argumenta del modo siguiente:

He encontrado un objeto no-negro: una vaca violeta –yo también conozco una de este color–. *por lo tanto, esto confirma –débilmente– la ley: "Todos los objetos no-negros no son cuervos". Y así, también confirma la ley equivalente: "Todos los cuervos son negros."*

Es fácil encontrar millones de objetos no-negros que no son cuervos, confirmando así de manera más fuerte la ley. El problema con la paradoja de Hempel es que, observando objetos no-negros se confirma la ley *"Todos los cuervos son negros*", pero sólo a un nivel *infinitesimal*. La clase de objetos que no son cuervos, es tan enormemente grande comparada con las que son cuervos, que el grado con en el cual un "no-cuervo" que es no-negro confirma la hipótesis, es despreciable...

Los detractores de Hempel opinan que la existencia de una vaca de color violeta confirma del mismo modo el enunciado:

Todos los cuervos son blancos...

7. Paradojas de la probabilidad: ¿me compensa jugar?

La pieza del dramaturgo Tom Stoppard *Rosencrantz y Guildenstern han muerto* comienza con una escena en la que los dos personajes secundarios de *Hamlet* juegan a *cara y cruz*: el desafortunado Guildenstern ha lanzado 90 monedas, todas han salido cara y han ido a parar –como manda el juego– al bolsillo de Rosencrantz.

A pesar de lo improbable de una tal serie, los dos personajes saben que puede suceder. Cuando los protagonistas están cansados de lanzar simplemente las monedas, Rosencrantz propone una variante: lanzará una moneda hasta que salga cara: si esto sucede en la primera tirada, dará una moneda a Guildenstern, si sucede en la segunda tirada, pasará dos monedas a su amigo; si sale cara en la tercera jugada, serán 4 las monedas que dará a Guildenstern, y así sucesivamente, doblando la cantidad cada vez que la moneda cae en cruz.

La pregunta es ¿cuánto dinero debería pagar Guildenstern a Rosencrantz para que el juego sea equitativo?

El problema se resuelve fácilmente en términos de la esperanza matemática de ganar: la probabilidad del evento *cara aparece en la tirada n* es de

$$\mathbf{1/2^{n-1}\,(1/2) = 1/2^{n}.}$$

La *esperanza* de ganar de Guildenstern es, pues, la suma:

$$\mathbf{1/2 + 2(1/2)^2 + 4(1/2)^3 + 8(1/2)^4 + \ldots + 2^{n-1}(1/2)^n + \ldots =}$$

$$\mathbf{= 1/2 + 1/2 + 1/2 + 1/2 + \ldots + 1/2 + \ldots = \infty}$$

Así, en honor a la *equidad*, el juego no debería tener lugar.

La progresión de ganadas es muy rápida: es la serie geométrica de razón **2**. Se podría reemplazar el **2** por un número inferior $\boldsymbol{q}$ y retomar los cálculos: en este caso, la esperanza de ganada de Guildenstern sería:

$$1/2 + q(1/2)^2 + q^2(1/2)^3 + q^3(1/2)^4 + \ldots + q^{n-1}(1/2)^n + \ldots =$$

$$= 1/2(1 + q/2 + (q/2)^2 + \ldots + (q/2)^n + \ldots) = 1/(2 - q).$$

Dependiendo del valor de q, la esperanza puede variar considerablemente...

8. Paradojas topológicas: ¡qué desorientado vas!

Si se toma una tira de papel y se pegan los extremos como muestra la figura 18, se obtiene un *cilindro*, es decir, una superficie que obviamente tiene como bordes dos circunferencias disjuntas y dos lados –la cara interior y la exterior de la figura–. Si se hace lo mismo, pero antes de pegar los extremos se gira uno de ellos 180 grados, el objeto que se obtiene es una *banda de Möbius*. La banda de Möbius, como el cilindro, es un objeto geométrico de dimensión dos, pero sorprendentemente, posee un único borde –el doble de largo, su longitud es la suma de las longitudes de las dos circunferencias que forman el borde del cilindro– y una única cara. En efecto, para comprobarlo, basta con recorrer con un dedo el borde de la cinta, hasta verificar que se ha recorrido todo sin levantarlo en ningún momento, y por ejemplo, pasar un lápiz por la cara de la banda, comprobando que al regresar al punto de partida, las supuestas dos caras del objeto han quedado marcadas.

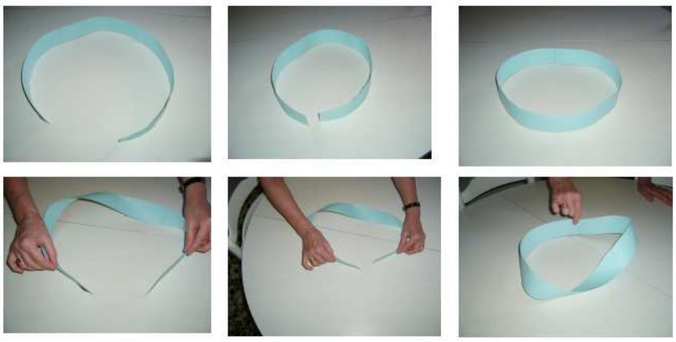

Figura 18: Construcción del cilindro (arriba) y la banda de Möbius (abajo)

¿Qué sucede si antes de pegar los extremos de la banda de papel se gira uno de ellos 360 grados? ¿Qué se obtiene? Se trata –topológicamente– de un cilindro, ya que este objeto y el obtenido al pegar sin realizar ningún giro son *homeomorfos*. En realidad, es fácil comprobar que sólo hay dos posibilidades al pegar una banda por dos de sus extremos opuestos: o bien se obtiene un cilindro –si antes de pegar los extremos, se gira uno de ellos un múltiplo par de 180 grados– o bien una banda de Möbius –si antes de pegar los extremos, se gira uno de ellos un múltiplo impar de 180 grados–…

La banda de Möbius es *no orientable*: dibuja por ejemplo una flecha sobre la banda, y muévela a lo largo de su única cara… observa que cuando regresas al punto de partida, ¡la flecha ha cambiado de sentido!

Finalizamos con un par de experimentos de resultados paradójicos. Al cortar por la mitad un cilindro, se obtienen dos cilindros, la mitad de altos que el cilindro original (figura 19). Si se hace lo mismo con la banda de Möbius, en vez de quedar ésta dividida en dos lazos, se obtiene una única cinta… que es un cilindro, pues posee dos caras.

Figura 19: cortando un cilindro y una banda de Möbius por la mitad

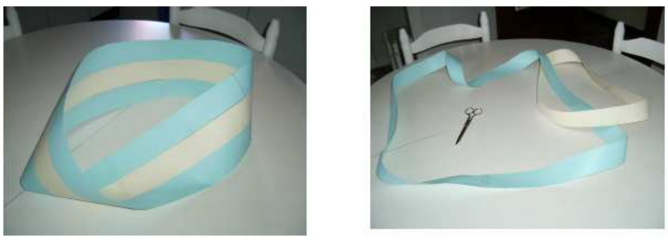

Figura 20: cortando una banda de Möbius por la tercera parte

Al cortar por su tercera parte un cilindro, se obtienen dos cilindros igual de largos, de alturas un tercio y dos tercios de la original. Si se hace lo mismo con la banda de Möbius, resultan una banda de Möbius –igual de larga y un tercio de ancha– y un cilindro –el doble de largo y un tercio de ancho– y enlazados… ¿Y si cortáramos a otra altura? ¿Por qué la altura un medio es tan especial?

Referencias

[1] ERICKSON, G.W. y FOSSA, J.A. *Dictionary of paradox*, Univ. Press of America, EE. UU., 1998.

[2] FALLETA, N., *Paradoxicon*, Doubleday and CO., EE.UU, 1983.

[3] LOYD, S. *Cyclopedia of 5000 puzzles, tricks and conundrums (with aswers)*, Lamb. Pub. CO., EE.UU., 1914.

[4] STOPPARD, T., Rosencrantz y Guildenstern han muerto, Edicusa, España, 1969.

Sobre la autora:
Nombre: Marta Macho Stadler
Correo Electrónico: marta.macho@ehu.es
Institución: Universidad del País Vasco-Euskal Herriko Unibertsitatea