

CURSO DE METODOS NUMERICOS

SEGUNDA PARTE

**SOLUCION APROXIMADA DE
ECUACIONES DE UNA VARIABLE**

CAPITULO V. SOLUCION APROXIMADA DE ECUACIONES DE UNA VARIABLE: PRELIMINARES

1. SEPARACION DE RAICES

En esta segunda parte analizaremos uno de los problemas básicos del análisis numérico: el **problema de búsqueda de raíces**.

Si una ecuación algebraica o trascendente es relativamente complicada, no resulta posible por lo general hallar raíces exactas. Es más, en algunos casos las ecuaciones tienen coeficientes conocidos sólo de forma aproximada, y por tanto, carece de sentido tratar de hallar las raíces exactas de la ecuación. Por consiguiente, adquieren particular importancia los procedimientos de cálculo aproximado de raíces de una ecuación así como la estimación de su grado de exactitud.

El problema consiste en encontrar los valores de la variable x que satisfacen la ecuación

$$f(x) = 0, \tag{V.1}$$

para una función f dada, que está definida y es continua en un cierto intervalo finito o infinito $a < x < b$. En ciertos casos se necesitará la existencia y continuidad de la primera derivada $f'(x)$ e incluso de la segunda derivada $f''(x)$.

A una solución de este problema, es decir a todo valor p para el cual la función $f(x)$ es cero, se le llama **cero** de la función $f(x)$ o una **raíz** de $f(x) = 0$.

Supondremos que la ecuación (V.1) tiene únicamente raíces separadas, es decir, para cada raíz existe un entorno que no contiene otras raíces de la ecuación.

El cálculo aproximado de las raíces reales separadas de (V.1) se efectúa por lo general en dos etapas:

- (a) separación de raíces, es decir, establecer los intervalos más pequeños posibles $[\alpha, \beta]$ que contengan una y solamente una raíz de la ecuación (V.1);
- (b) mejorar los valores de las raíces aproximadas, es decir, manipularlos hasta que presenten el grado de exactitud especificado.

Recordemos antes el **Teorema del Valor Intermedio**:

Si $f \in \mathcal{C}[a, b]$ y K es un número cualquiera entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces existe c en (a, b) tal que $f(c) = K$.

Y un Corolario de ese Teorema:

Corolario V.1

Si $f \in \mathcal{C}[a, b]$ asume valores de signo opuesto en los extremos de un intervalo $[\alpha, \beta]$, es decir, $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$, entonces el intervalo contendrá al menos una raíz de la ecuación $f(x) = 0$; en otras palabras, habrá al menos un número $p \in (\alpha, \beta)$ tal que $f(p) = 0$.

La raíz p será única si la derivada $f'(x)$ existe y mantiene el signo dentro del intervalo (α, β) ; esto es, si $f'(x) > 0$ (ó $f'(x) < 0$) para $\alpha < x < \beta$.

El proceso de separación de raíces comienza estableciendo los signos de la función $f(x)$ en los puntos extremos $x = a$ y $x = b$ de sus dominios de existencia. A continuación se determinan los signos de la función $f(x)$ para un número intermedio de puntos $x = \alpha_1, \alpha_2, \dots$, cuya elección depende de las peculiaridades de la función $f(x)$. Si se cumple que $f(\alpha_k) \cdot f(\alpha_{k+1}) < 0$, entonces, en virtud del Corolario V.1, existe una raíz de la ecuación $f(x) = 0$ en el intervalo (α_k, α_{k+1}) . Debemos asegurarnos que esta raíz es la única.

En la práctica suele ser suficiente, en el caso de separación de raíces, efectuar el proceso de bisección (que analizaremos en más detalle en el próximo capítulo), dividiendo aproximadamente el intervalo dado (α, β) en dos, cuatro, ocho, ..., partes iguales (hasta un cierto intervalo) y determinar el signo de $f(x)$ en los puntos de división. Conviene recordar que en una ecuación algebraica de grado n ,

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0, \quad a_0 \neq 0$$

tiene a lo sumo n raíces reales. Por consiguiente, si para una ecuación de este tipo se obtienen n cambios de signo (es decir, $n + 1$ intervalos en los cuales la función tiene signo distinto), habrán quedado separadas todas las raíces de la ecuación.

Si existe una derivada continua $f'(x)$ y pueden calcularse fácilmente las raíces de la ecuación $f'(x) = 0$, puede regularizarse el proceso de separación de raíces de la ecuación (V.1). Evidentemente es suficiente contar únicamente los signos de la función $f(x)$ para los ceros de su derivada y en los puntos extremos $x = a$ y $x = b$.

Vamos ahora a recordar dos Teoremas que usaremos más adelante:

Teorema del Valor Medio

Si $f \in \mathcal{C}[a, b]$ y f es diferenciable en (a, b) , entonces existe un número c , $a < c < b$, tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Teorema del Valor Extremo

Si $f \in \mathcal{C}[a, b]$, entonces existen $c_1, c_2 \in [a, b]$ tales que $f(c_1) \leq f(x) \leq f(c_2)$ para todo $x \in [a, b]$. Si además, f es diferenciable en (a, b) , entonces los números c_1 y c_2 existirán ya sea en los extremos de $[a, b]$, o donde f' sea cero.

Veamos ahora una estimación del error de una raíz aproximada.

Teorema V.2

Sea p una raíz exacta y \bar{x} una raíz aproximada de la ecuación $f(x) = 0$, situadas ambas en el mismo intervalo $[\alpha, \beta]$, y

$$|f'(x)| \geq m_1 > 0,$$

para $\alpha \leq x \leq \beta$. Se cumple entonces la siguiente aproximación:

$$|\bar{x} - p| \leq \frac{|f(\bar{x})|}{m_1}. \quad (\text{V.2})$$

Demostración: aplicando el Teorema del valor medio, se tiene

$$f(\bar{x}) - f(p) = (\bar{x} - p) f'(c)$$

donde c es un valor intermedio entre \bar{x} y p , es decir, $c \in (\alpha, \beta)$.

De aquí, ya que $f(p) = 0$ y $|f'(c)| \geq m_1$ (puede tomarse para m_1 , por ejemplo, el valor más pequeño de $|f'(x)|$ cuando $\alpha \leq x \leq \beta$), tenemos

$$|f(\bar{x}) - f(p)| = |f(\bar{x})| \geq m_1 |\bar{x} - p|$$

y entonces,

$$|\bar{x} - p| \leq \frac{|f(\bar{x})|}{m_1}.$$

c.q.d.

Nótese que la fórmula (V.2) puede ofrecer sólo resultados someros y por tanto no es siempre conveniente utilizarla. Por esta razón en la práctica resulta mejor estrechar el intervalo general (α, β) que contiene la raíz p y su valor aproximado \bar{x} , y considerar $|\bar{x} - p| \leq \beta - \alpha$.

Ejemplo. Como valor aproximado de la raíz de la ecuación $f(x) \equiv x^4 - x - 1 = 0$ tenemos $\bar{x} = 1.22$. Estímese el error absoluto en esta raíz.

$$f(\bar{x}) = 2.2153 - 1.22 - 1 = -0.0047$$

Como para $\bar{\bar{x}} = 1.23$, tenemos

$$f(\bar{\bar{x}}) = 2.2889 - 1.23 - 1 = 0.0589$$

la raíz exacta p cae en el intervalo $(1.22, 1.23)$. La derivada $f'(x) = 4x^3 - 1$ crece en forma monótona y por tanto su valor más pequeño en el intervalo dado es

$$m_1 = 4 * 1.22^3 - 1 = 4 * 1.8158 - 1 = 6.2632$$

de donde, mediante la fórmula (V.2), tenemos

$$|\bar{x} - p| \leq \frac{0.0047}{6.2632} \approx 0.000750415.$$

Nótese que ocasionalmente, en la práctica, la exactitud de una raíz aproximada x se estima en función de cómo satisfaga la ecuación dada $f(x) = 0$; es decir, si el número $|f(\bar{x})|$ es pequeño, se considera entonces \bar{x} una buena aproximación a la raíz exacta p ; pero si $|f(\bar{x})|$ es grande, entonces \bar{x} se toma como aproximación grosera de la raíz exacta p . Pero esa forma de proceder es errónea, porque hay funciones que crecen muy rápidamente y entonces el valor $|f(\bar{x})|$ es grande aunque \bar{x} está cerca de p , y hay funciones que crecen muy lentamente y entonces el valor $|f(\bar{x})|$ es pequeño aunque \bar{x} esté lejano de p .

2. SOLUCION GRAFICA DE ECUACIONES

Las raíces reales de la ecuación

$$f(x) = 0 \quad (V.1)$$

pueden determinarse en forma aproximada considerando las abscisas de los puntos de intersección de la gráfica de la función $y = f(x)$ con el eje x .

Resulta aconsejable a veces sustituir la ecuación dada por una ecuación equivalente (dos ecuaciones se denominan equivalentes si tienen exactamente las mismas raíces):

$$\phi(x) = \psi(x)$$

donde las funciones $\phi(x)$ y $\psi(x)$ son más sencillas que $f(x)$. Constrúyanse entonces las gráficas de las funciones $y = \phi(x)$ e $y = \psi(x)$, y las raíces deseadas serán entonces las abscisas de los puntos de intersección de estas gráficas.

Ejemplo. Resuélvase gráficamente la siguiente ecuación

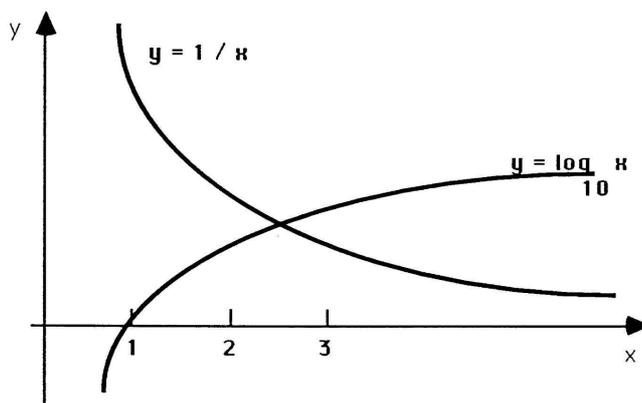
$$x \log_{10} x = 1 .$$

Para ello, escribimos la ecuación de la forma

$$\log_{10} x = \frac{1}{x} .$$

Las raíces pueden entonces hallarse fácilmente, ya que son las abscisas de los puntos de intersección de la curva logarítmica $y = \log_{10} x$ y la hipérbola $y = \frac{1}{x}$. Construyendo estas curvas, tendremos un valor aproximado $p \approx 2.5$ de la única raíz de la ecuación dada.

Figura 1



Si una de las funciones $\phi(x)$ ó $\psi(x)$ es lineal queda simplificada la operación de hallar las raíces de la ecuación. Las raíces son entonces las abscisas de los puntos de intersección de la curva $y = \phi(x)$ y la línea recta $y = a x + b$. Este procedimiento es particularmente ventajoso cuando han de resolverse series de ecuaciones del mismo tipo que difieren únicamente en los coeficientes a y b de una función lineal. La construcción gráfica se reduce entonces a hallar los puntos de intersección de una gráfica dada y varias líneas rectas. Este caso incluye evidentemente las ecuaciones de tres términos

$$x^n + a x + b = 0 .$$

CAPITULO VI. EL ALGORITMO DE BISECCION

1. INTRODUCCION Y METODO

En este capítulo comenzaremos a analizar uno de los problemas más básicos del análisis numérico: el **problema de búsqueda de raíces**. El problema consiste en encontrar los valores de la variable x que satisfacen la ecuación $f(x) = 0$, para una función f dada.

La primera técnica, basada en el Teorema del Valor Intermedio, se llama **algoritmo de bisección** ó **método de búsqueda binaria**, ó también **método de Bolzano**.

Supongamos que tenemos una función continua f definida en el intervalo $[a, b]$, con $f(a)$ y $f(b)$ de signos distintos. Entonces por el corolario V.1 del Teorema del Valor Intermedio, existe p , $a < p < b$, tal que $f(p) = 0$. Aunque el procedimiento sirve para el caso en el que $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos y hay más de una raíz en el intervalo $[a, b]$, por simplicidad se supondrá que la raíz en este intervalo es única.

El método requiere dividir repetidamente a la mitad los subintervalos de $[a, b]$ y, en cada paso, localizar la mitad que contiene a p . Para empezar, tomemos $a_1 = a$ y $b_1 = b$ y p_1 el punto medio de $[a, b]$; o sea $p_1 = \frac{1}{2}(a_1 + b_1)$. Si $f(p_1) = 0$, entonces $p = p_1$; si no, entonces $f(p_1)$ tiene el mismo signo que $f(a_1)$ o $f(b_1)$. Si $f(p_1)$ y $f(a_1)$ tienen el mismo signo, entonces $p \in (p_1, b_1)$, y tomamos $a_2 = p_1$ y $b_2 = b_1$. Si $f(p_1)$ y $f(b_1)$ son del mismo signo, entonces $p \in (a_1, p_1)$, y tomamos $a_2 = a_1$ y $b_2 = p_1$. Ahora re-aplicamos el proceso al intervalo $[a_2, b_2]$. Y así hasta que se encuentra $f(p) = 0$ ó el i -ésimo intervalo $[a_i, b_i]$ es más pequeño que una tolerancia TOL prefijada, ó hasta que se cumpla alguna otra condición de paro.

El procedimiento de paro más común es el de dar un número máximo de iteraciones N_0 . Cuando usamos un ordenador para generar las aproximaciones, conviene añadir una condición que imponga un máximo al número de iteraciones realizadas. Así se elimina la posibilidad de poner a la máquina en un ciclo infinito, una posibilidad que puede surgir cuando la sucesión diverge (y también cuando el programa está codificado incorrectamente). Esto se hace fácilmente dando una cota inicial N_0 y requiriendo que el procedimiento termine si se supera esa cota.

Otros procedimientos de paro que se pueden aplicar a cualquier técnica iterativa son los de dar una tolerancia $\varepsilon > 0$ y generar una sucesión p_1, p_2, \dots, p_n hasta que una de las siguientes condiciones se satisfaga:

$$|p_n - p_{n-1}| < \varepsilon \quad (VI.1)$$

$$\frac{|p_n - p_{n-1}|}{|p_n|} < \varepsilon, \quad p_n \neq 0 \quad (VI.2)$$

$$|f(p_n)| < \varepsilon. \quad (VI.3)$$

Desafortunadamente, pueden surgir dificultades usando cualquiera de estos criterios de paro. Existen sucesiones $\{p_n\}$ con la propiedad de que las diferencias $p_n - p_{n-1}$ convergen

a cero mientras que la sucesión misma diverge. Es posible también que $f(p_n)$ esté cerca de cero mientras que p_n difiere significativamente de p . Sin conocimiento adicional acerca de f ó p , la desigualdad (VI.2) es el mejor criterio de paro que puede aplicarse porque verifica el error relativo.

Nótese que para empezar el algoritmo de bisección, se debe encontrar un intervalo $[a, b]$ tal que $f(a) \cdot f(b) < 0$. En cada paso del algoritmo de bisección, la longitud del intervalo que contiene el cero de f se reduce por un factor de dos; por lo tanto es ventajoso escoger el intervalo inicial $[a, b]$ tan pequeño como sea posible. Por ejemplo, si $f(x) = 2x^3 - x^2 + x - 1$,

$$f(-4) \cdot f(4) < 0 \quad \text{y} \quad f(0) \cdot f(1) < 0 ,$$

así que el algoritmo de bisección puede usarse con cualquiera de los intervalos $[-4, 4]$ ó $[0, 1]$. Empezando el algoritmo de bisección con $[0, 1]$ en vez de con $[-4, 4]$, reducirá en tres el número de iteraciones requeridas para alcanzar una precisión específica.

2. ALGORITMO Y EJEMPLOS

Algoritmo de bisección.

=====
 Para encontrar una solución de $f(x) = 0$ dada la función f en el intervalo $[a, b]$ donde $f(a)$ y $f(b)$ tienen signo opuestos:

Entrada: extremos a y b ; tolerancia TOL ; número máximo de iteraciones N_0 ;

Salida: solución aproximada p ó mensaje de fracaso.

Paso 1: tomar $i = 1$;

Paso 2: mientras que $i \leq N_0$ seguir pasos 3–6;

Paso 3: tomar $p = a + \frac{(b-a)}{2}$ (calcular p_i);

Paso 4: si $f(p) = 0$ ó $\frac{(b-a)}{2} < TOL$ entonces SALIDA (p);
 (procedimiento completado satisfactoriamente) PARAR;

Paso 5: tomar $i = i + 1$

Paso 6: si $f(a) \cdot f(p) > 0$ entonces tomar $a = p$, si no, tomar $b = p$ (calcular a_i, b_i);

Paso 7: SALIDA ('El método fracasó después de N_0 iteraciones, $N_0 = \text{'}, N_0$);
 (procedimiento completado sin éxito); PARAR.

=====

Para ilustrar el algoritmo de bisección, considérese el siguiente ejemplo. En este caso se termina la iteración cuando $\frac{|p_{n-1} - p_n|}{|p_n|} < 10^{-4}$.

Ejemplo. La función $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$ tiene una raíz en $[1, 2]$ ya que $f(1) = -5$ y $f(2) = 14$. Es fácil ver que hay una sóla raíz en $[1, 2]$. El algoritmo de bisección da los valores de la tabla 1.

Después de 13 iteraciones, podemos ver que $p_{13} = 1.365112305$ aproxima a la raíz p

con un error de $|p - p_{13}| < |b_{14} - a_{14}| = |1.365234375 - 1.365112305| = 0.000122070$ y como $|a_{14}| < |p|$,

$$\frac{|p - p_{13}|}{|p|} < \frac{|b_{14} - a_{14}|}{|a_{14}|} \leq 9.0 \times 10^{-5} ,$$

la aproximación es correcta al menos con cuatro cifras significativas. El valor correcto de p , con nueve cifras decimales, es $p = 1.365230013$.

Es interesante notar que p_9 está más cerca de p que la aproximación final p_{13} , pero no hay manera de determinar esto a menos que se conozca la respuesta correcta.

Tabla 1

n	a_n	b_n	p_n	$f(p_n)$	$\left \frac{p_n - p_{n-1}}{p_n} \right $
1	1.0	2.0	1.5	2.375	
2	1.0	1.5	1.25	-1.796875	0.2
3	1.25	1.5	1.375	0.16211	0.090909
4	1.25	1.375	1.3125	-0.84839	0.047619
5	1.3125	1.375	1.34375	-0.35098	0.023256
6	1.34375	1.375	1.359375	-0.09641	0.011494
7	1.359375	1.375	1.3671875	0.03236	0.0057143
8	1.359375	1.3671875	1.36328125	-0.03215	0.0028653
9	1.36328125	1.3671875	1.365234375	0.00007	0.0014306
10	1.36328125	1.365234375	1.364257813	-0.01605	0.00071582
11	1.364257813	1.365234375	1.364746094	-0.00799	0.00035778
12	1.364746094	1.365234375	1.364990234	-0.00396	0.00017886
13	1.364990234	1.365234375	1.365112305	-0.00194	0.000089422

El algoritmo de bisección, aunque conceptualmente claro, tiene inconvenientes importantes. Converge muy lentamente (o sea, N puede ser muy grande antes que $|p - p_N|$ sea suficientemente pequeño) y, más aún, una buena aproximación intermedia puede ser desechada sin que nos demos cuenta. Sin embargo, el método tiene la propiedad importante de que converge siempre a una solución y, por esta razón se usa frecuentemente para “poner en marcha” a los métodos más eficientes que se presentarán más adelante.

Definición. Decimos que $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a α con *rapidez de convergencia* $O(\beta_n)$, donde $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$ es otra sucesión con $\beta_n \neq 0$ para cada n , si

$$\frac{|\alpha_n - \alpha|}{|\beta_n|} \leq K \quad \text{para } n \text{ suficientemente grande}$$

donde K es una constante independiente de n . Esto se indica por lo general escribiendo $\alpha_n = \alpha + O(\beta_n)$ ó $\alpha_n \rightarrow \alpha$ con una rapidez de convergencia $O(\beta_n)$.

Teorema VI.1

Sea $f \in \mathcal{C}[a, b]$ y supongamos que $f(a) \cdot f(b) < 0$. El procedimiento de bisección genera una sucesión $\{p_n\}$ que aproxima a p con la propiedad

$$|p_n - p| \leq \frac{b - a}{2^n}, \quad n \geq 1. \quad (VI.4)$$

Demostración: para cada $n \geq 1$, tenemos

$$b_n - a_n = \frac{1}{2^{n-1}}(b - a) \quad \text{y} \quad p \in (a_n, b_n) .$$

Ya que $p_n = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$, para todo $n \geq 1$, se sigue que

$$|p_n - p| = \left| \frac{1}{2}(a_n + b_n) - p \right| \leq \left| \frac{1}{2}(a_n + b_n) - a_n \right| = \frac{1}{2} (b_n - a_n) = 2^{-n} (b - a) .$$

c.q.d.

De acuerdo con la definición de rapidez de convergencia, la desigualdad (VI.4) implica que $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a p y está acotada por una sucesión que converge a cero con una rapidez de convergencia $O(2^{-n})$. Es importante hacer notar que Teoremas como éste dan solamente cotas aproximadas para los errores.

Por ejemplo, esta cota aplicada al problema del ejemplo anterior afirma únicamente que

$$|p - p_9| \leq \frac{2 - 1}{2^9} \approx 2.0 \times 10^{-3} ,$$

siendo el error real mucho más pequeño:

$$|p - p_9| = |1.365230013 - 1.365234275| \approx 4.3 \times 10^{-6} .$$

Ejemplo. Determinar aproximadamente cuántas iteraciones son necesarias para resolver $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ con una precisión de $\varepsilon = 10^{-5}$ para $a_1 = 1$ y $b_1 = 2$. Esto requiere encontrar un entero N que satisfaga:

$$|p_N - p| \leq 2^{-N} (b - a) = 2^{-N} \leq 10^{-5} .$$

Para determinar N usamos logaritmos. Aunque sería suficiente usar logaritmos de cualquier base, usaremos logaritmos de base 10 pues la tolerancia está dada como una potencia de 10. Ya que $2^{-N} \leq 10^{-5}$ implica que $\log_{10}(2^{-N}) \leq \log_{10}(10^{-5}) = -5$,

$$-N \log_{10} 2 \leq -5 \quad \text{ó} \quad N \geq \frac{5}{\log_{10} 2} \approx 16.6 .$$

Parecería que se requieren 17 iteraciones para obtener una aproximación exacta a 10^{-5} . Con $\varepsilon = 10^{-3}$, se requieren $N \geq 10$ iteraciones y el valor de $p_9 = 1.365234275$ es exacto dentro de 10^{-5} . Es importante notar que estas técnicas dan solamente una cota para el número de iteraciones necesarias, y en muchos casos esta cota es mucho más grande que el número realmente requerido.

CAPITULO VII. ITERACION DEL PUNTO FIJO

1. INTRODUCCION Y METODO

En este capítulo consideraremos un método para determinar la solución de una ecuación que se expresa, para alguna función g , de la forma

$$g(x) = x .$$

A una solución de esta ecuación se le llama un **punto fijo** de la función g .

Si para cualquier función g dada se puede encontrar un punto fijo, entonces cada problema de búsqueda de las raíces de $f(x) = 0$ tiene soluciones que corresponden precisamente a los puntos fijos de $g(x) = x$ con $g(x) = x - f(x)$. La primera tarea entonces es decidir cuándo una función tendrá un punto fijo y cómo se pueden determinar (es decir, aproximar con suficiente grado de precisión) dichos puntos fijos.

El siguiente Teorema da las condiciones suficientes para la existencia y unicidad de un punto fijo.

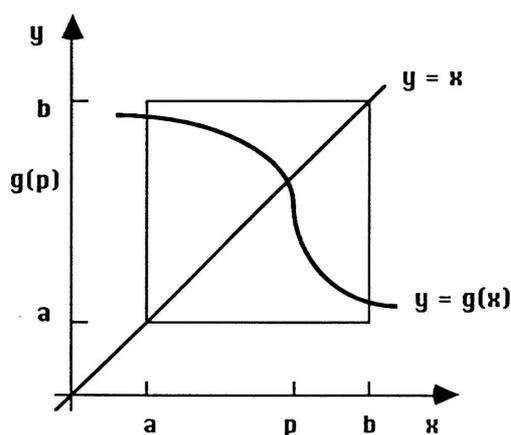
Teorema VII.1

Si $g \in \mathcal{C}[a, b]$ y $g(x) \in [a, b]$ para todo $x \in [a, b]$, entonces g tiene un punto fijo en $[a, b]$. Si además, $g'(x)$ existe en (a, b) y

$$|g'(x)| \leq k < 1 \quad \text{para todo } x \in (a, b) , \quad (VII.1)$$

entonces g tiene un punto fijo único p en $[a, b]$.

Figura 1



Demostración: si $g(a) = a$ ó $g(b) = b$, la existencia del punto fijo es obvia. Supongamos que no es así; entonces debe ser cierto que $g(a) > a$ y $g(b) < b$. Definamos $h(x) = g(x) - x$; h es continua en $[a, b]$, y

$$h(a) = g(a) - a > 0 , \quad h(b) = g(b) - b < 0 .$$

El corolario V.1 del Teorema del Valor Intermedio implica que existe $p \in (a, b)$ tal que $h(p) = 0$. Por lo tanto $g(p) - p = 0$ y p es un punto fijo de g .

Supongamos además, que la desigualdad (VII.1) se satisface y que p y q son puntos fijos en $[a, b]$ con $p \neq q$. Por el Teorema del Valor Medio, existe un número ξ entre p y q y por lo tanto en $[a, b]$ tal que

$$|p - q| = |g(p) - g(q)| = |g'(\xi)| |p - q| \leq k |p - q| < |p - q| ,$$

lo cual es una contradicción. Esta contradicción debe venir de la única suposición, $p \neq q$. Por lo tanto, $p = q$ y el punto fijo en $[a, b]$ es único. **c.q.d.**

Ejemplo. Sea $g(x) = \frac{x^2 - 1}{3}$ en el intervalo $[-1, 1]$. Usando el Teorema del Valor Extremo es fácil demostrar que el mínimo absoluto de g está en $x = 0$ y es $g(0) = -1/3$. Similarmente el máximo absoluto de g ocurre en $x = \pm 1$ y tiene el valor $g(\pm 1) = 0$. Además, g es continua y

$$|g'(x)| = \left| \frac{2x}{3} \right| \leq \frac{2}{3} \quad \text{para todo } x \in [-1, 1] ,$$

así que g satisface las hipótesis del Teorema VII.1 y tiene un único punto fijo en $[-1, 1]$. En este ejemplo, el único punto fijo p en el intervalo $[-1, 1]$ puede determinarse exactamente. Si

$$p = g(p) = \frac{p^2 - 1}{3}$$

entonces, $p^2 - 3p - 1 = 0$, lo cual implica que $p = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}$. Nótese que g también tiene un punto fijo único $p = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}$ en el intervalo $[3, 4]$. Sin embargo, $g(4) = 5$ y $g'(4) = 8/3 > 1$; así que g no satisface las hipótesis del Teorema VII.1. Esto muestra que las hipótesis del Teorema VII.1 son suficientes para garantizar un punto fijo único, pero no son necesarias.

Ejemplo. Sea $g(x) = 3^{-x}$. Como $g'(x) = -3^{-x} \ln 3 < 0$ en $[0, 1]$, la función g es decreciente en $[0, 1]$. Entonces, $g(1) = \frac{1}{3} \leq g(x) \leq 1 = g(0)$ para $0 \leq x \leq 1$. Por lo tanto, para $x \in [0, 1]$, $g(x) \in [0, 1]$. Esto implica que g tiene un punto fijo en $[0, 1]$. Como

$$g'(0) = -\ln 3 = -1.098612289 ,$$

$|g'(x)| \not\leq 1$ en $[0, 1]$ y el Teorema VII.1 no puede ser usado para determinar la unicidad. Sin embargo, g es decreciente, así que está claro que el punto fijo debe ser único.

Geoméricamente, el método de iteración puede explicarse de la siguiente manera: dibújese sobre un plano xy las gráficas de las funciones $y = x$ e $y = g(x)$. Cada raíz real p de la ecuación $x = g(x)$ es la abscisa del punto de intersección M de la curva $y = g(x)$ con la línea recta $y = x$ (ver figuras 2 y 3).

Comenzando a partir de un punto $A_0 (p_0, g(p_0))$, construyamos la línea poligonal $A_0 B_0 A_1 B_1 \dots$ (*escalera*), cuyos segmentos son alternativamente paralelos al eje x y al eje y , los vértices A_0, A_1, A_2, \dots caen sobre la curva $y = g(x)$, y los vértices $B_0, B_1, B_2, B_3, \dots$ caen sobre la línea recta $y = x$. Las abscisas comunes de los puntos A_1 y B_0 , y A_2 y B_1, \dots , evidentemente serán las aproximaciones sucesivas p_1, p_2, \dots a la raíz p . También es posible tener una línea poligonal diferente $A_0 B_0 A_1 B_1 \dots$ (*espiral*).

Evidentemente se tiene la solución escalera si la derivada $g'(x)$ es positiva, y la solución espiral si $g'(x)$ es negativa.

Figura 2

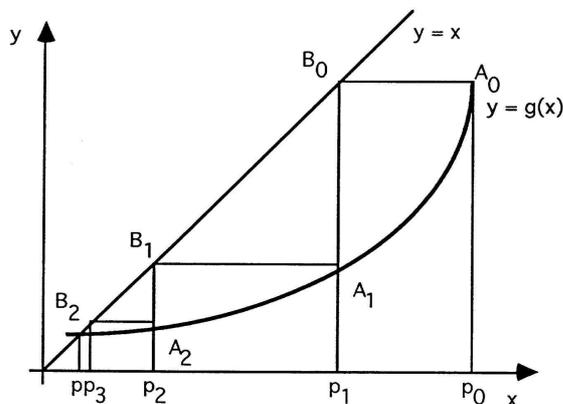
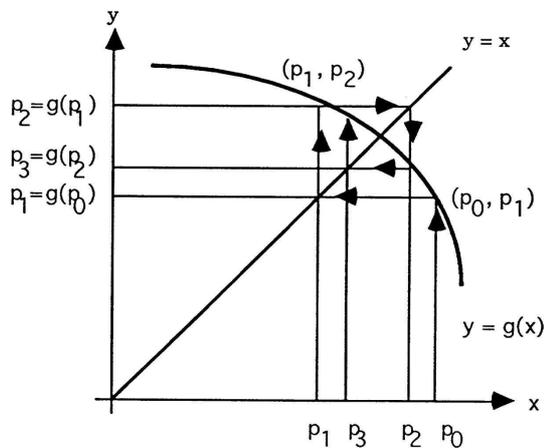


Figura 3



En las figuras anteriores, la curva $y = g(x)$ se “inclina” en la vecindad de la raíz p , es decir, $|g'(x)| < 1$ y el proceso de iteración converge. No obstante, si consideramos el caso en que $|g'(x)| > 1$, entonces el proceso de iteración puede ser divergente. Por consiguiente, para aplicar de una manera práctica el método de iteración del punto fijo, hemos de asegurarnos de que se cumplen las condiciones de suficiencia de convergencia del proceso de iteración.

2. ALGORITMO Y EJEMPLOS

Para aproximar el punto fijo de una función g , escogemos una aproximación inicial p_0 y generamos la sucesión $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ tomando $p_n = g(p_{n-1})$ para cada $n \geq 1$. Si la sucesión converge a p y g es continua, entonces

$$p = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \lim_{n \rightarrow \infty} g(p_{n-1}) = g\left(\lim_{n \rightarrow \infty} p_{n-1}\right) = g(p) ,$$

y se obtiene una solución de $x = g(x)$. Esta técnica se llama **técnica iterativa de punto fijo** ó **iteración funcional**. El procedimiento está detallado en el algoritmo conocido como algoritmo de punto fijo y está descrito en las figuras 2 y 3.

Algoritmo de punto fijo.

=====

Para encontrar una solución de $g(p) = p$ dada una aproximación inicial p_0 :

Entrada: aproximación inicial p_0 ; tolerancia TOL; número máximo de iteraciones N_0 ;

Salida: solución aproximada p ó mensaje de fracaso.

Paso 1: tomar $i = 1$;

Paso 2: mientras que $i \leq N_0$ seguir pasos 3–6;

Paso 3: tomar $p = g(p_0)$ (calcular p_i);

Paso 4: si $|p - p_0| < TOL$ entonces SALIDA (p);
 (procedimiento completado satisfactoriamente) PARAR;

Paso 5: tomar $i = i + 1$

Paso 6: tomar $p_0 = p$ (redefinir p_0);

Paso 7: SALIDA ('El método fracasó después de N_0 iteraciones, $N_0 = \dots, N_0$);
 (procedimiento completado sin éxito); PARAR.

Ejemplo. La ecuación $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ tiene una sola raíz en $[1, 2]$. Existen muchas maneras de cambiar la ecuación a la forma $x = g(x)$, efectuando manipulaciones algebraicas simples. Debe verificarse que el punto fijo de la función $g(x)$ es en realidad una solución de la ecuación original.

- (a) $x = g_1(x) = x - x^3 - 4x^2 + 10$,
- (b) $x = g_2(x) = \left(\frac{10}{x} - 4x\right)^{1/2}$,
- (c) $x = g_3(x) = \frac{1}{2}(10 - x^3)^{1/2}$,
- (d) $x = g_4(x) = \left(\frac{10}{4+x}\right)^{1/2}$,
- (e) $x = g_5(x) = x - \frac{x^3+4x^2-10}{3x^2+8x}$.

Tabla 1

n	p_n (a)	p_n (b)	p_n (c)	p_n (d)	p_n (e)
0	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5
1	-0.875	0.8165	1.286953768	1.348399725	1.373333333
2	6.732	2.9969	1.402540804	1.367376372	1.365262015
3	-469.7	$(-8.65)^{1/2}$	1.345458374	1.364957015	1.365230014
4	1.03×10^8		1.375170253	1.365264748	1.365230013
5			1.360094193	1.365225594	
6			1.367846968	1.365230576	
7			1.363887004	1.365229942	
8			1.365916733	1.365230023	
9			1.364878217	1.365230012	
10			1.365410061	1.365230014	
15			1.365223680	1.365230013	
20			1.365230236		
25			1.365230006		
30			1.365230014		

Con $p_0 = 1.5$, la tabla 1 muestra los resultados del método de iteración de punto fijo para las cinco alternativas para g .

La raíz real es 1.365230013, como se hizo notar en un ejemplo del capítulo VI. Comparando los resultados con el algoritmo de bisección dado en aquel ejemplo, se puede ver que se han obtenido excelentes resultados para los casos (c), (d) y (e), mientras que con la técnica de bisección se necesitan 27 iteraciones para lograr esta precisión. Es interesante notar que la elección (a) produce divergencia y (b) se vuelve indefinida debido a que lleva a la raíz cuadrada de un número negativo.

Este ejemplo ilustra la necesidad de un procedimiento que garantice que la función g converja a una solución de $x = g(x)$ y que escoja también a g de tal manera que haga la convergencia tan rápida como sea posible. El Teorema siguiente es el primer paso para determinar este procedimiento.

Teorema VII.2

Sea $g \in \mathcal{C}[a, b]$ y supongamos que $g(x) \in [a, b] \quad \forall x \in [a, b]$. Además, supongamos que g' existe en (a, b) con

$$|g'(x)| \leq k < 1 \quad \text{para toda } x \in (a, b) . \quad (VII.1)$$

Si p_0 es cualquier número en $[a, b]$, entonces la sucesión definida por

$$p_n = g(p_{n-1}) , \quad n \geq 1 ,$$

converge al único punto fijo p en $[a, b]$.

Demostración: por el Teorema VII.1, existe un punto fijo único en $[a, b]$. Como g manda a $[a, b]$ a él mismo, la sucesión $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ está definida para toda $n \geq 0$ y $p_n \in [a, b]$ para toda n . Usando la desigualdad (VII.1) y el Teorema del valor medio,

$$|p_n - p| = |g(p_{n-1}) - g(p)| \leq |g'(\xi)| |p_{n-1} - p| \leq k |p_{n-1} - p| , \quad (VII.2)$$

donde $\xi \in (a, b)$. Aplicando la desigualdad (VII.2) inductivamente resulta:

$$|p_n - p| \leq k |p_{n-1} - p| \leq k^2 |p_{n-2} - p| \leq \dots \leq k^n |p_0 - p| . \quad (VII.3)$$

Como $k < 1$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |p_n - p| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} k^n |p_0 - p| = 0$$

y $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge a p . **c.q.d.**

El Teorema permanece válido si la función $g(x)$ es definida y diferenciable en el intervalo infinito $-\infty < x < +\infty$, y la desigualdad (VII.1) se cumple cuando $x \in (-\infty, +\infty)$.

Nótese que en las condiciones del Teorema VII.2, el método del punto fijo converge para cualquier valor inicial p_0 en $[a, b]$. Por esta razón es **autocorrector**, esto es, un error individual en los cálculos que no vaya por encima de los límites del intervalo $[a, b]$ no afectará el resultado final, ya que un valor erróneo puede ser considerado como un nuevo valor inicial p_0 . Únicamente se habrá trabajado más. La propiedad de autocorrección hace que el método de iteración del punto fijo sea uno de los más fiables. Naturalmente, los errores sistemáticos al aplicar este método pueden hacer que no se obtenga el resultado requerido.

Corolario VII.3

Si g satisface las hipótesis del Teorema VII.2, una cota para el error involucrado al usar p_n para aproximar a p está dada por

$$|p_n - p| \leq k^n \max\{p_0 - a, b - p_0\} \quad \text{para cada } n \geq 1. \quad (\text{VII.4})$$

Demostración: de la desigualdad (VII.3),

$$\begin{aligned} |p_n - p| &\leq k^n |p_0 - p| \\ &\leq k^n \max\{p_0 - a, b - p_0\}, \end{aligned}$$

ya que $p \in [a, b]$ y $p_0 \in [a, b]$.

c.q.d.

Corolario VII.4

Si g satisface las hipótesis del Teorema VII.2, entonces

$$|p_n - p| \leq \frac{k^n}{1 - k} |p_0 - p_1| \quad \text{para todo } n \geq 1. \quad (\text{VII.5})$$

Demostración: para $n \geq 1$, el procedimiento usado en la demostración del Teorema VII.2 implica que

$$|p_{n+1} - p_n| = |g(p_n) - g(p_{n-1})| \leq k |p_n - p_{n-1}| \leq \dots \leq k^n |p_1 - p_0|.$$

Por lo tanto, para $m > n \geq 1$,

$$\begin{aligned} |p_m - p_n| &= |p_m - p_{m-1} + p_{m-1} - \dots - p_{n+1} + p_{n+1} - p_n| \\ &\leq |p_m - p_{m-1}| + |p_{m-1} - p_{m-2}| + \dots + |p_{n+1} - p_n| \\ &\leq k^{m-1} |p_1 - p_0| + k^{m-2} |p_1 - p_0| + \dots + k^n |p_1 - p_0| \\ &= k^n (1 + k + k^2 + \dots + k^{m-n-1}) |p_1 - p_0|. \end{aligned}$$

Por el Teorema VII.2, $\lim_{m \rightarrow \infty} p_m = p$, así que

$$|p - p_n| = \lim_{m \rightarrow \infty} |p_m - p_n| \leq k^n |p_1 - p_0| \sum_{i=0}^{\infty} k^i = \frac{k^n}{1 - k} |p_1 - p_0|.$$

c.q.d.

Ambos corolarios relacionan la rapidez de convergencia con la cota k de la primera derivada.

Está claro que la rapidez de convergencia depende del factor $k^n/(1-k)$, y que cuanto más pequeño se pueda hacer k , más rápida será la convergencia. La convergencia puede ser muy lenta si k es próximo a 1.

Nótese que existe una extendida opinión de que, si al utilizar el método del punto fijo, dos aproximaciones sucesivas p_{n-1} y p_n coinciden dentro de la exactitud especificada

ε (por ejemplo, los primeros m decimales están estabilizados en estas aproximaciones), entonces se cumple $p \approx p_n$ con la misma exactitud (esto es, en particular el número aproximado p_n tiene m cifras exactas). En el caso general esta afirmación es errónea. Es más, resulta fácil demostrar que si $g'(x)$ está próxima a la unidad, entonces la cantidad $|p - p_n|$ puede ser grande, aún cuando $|p_n - p_{n-1}|$ sea extremadamente pequeña.

Los métodos de punto fijo del ejemplo serán reconsiderados tomando en cuenta los resultados descritos en el Teorema VII.2.

Ejemplo.

- (a) Cuando $g_1(x) = x - x^3 - 4x^2 + 10$, $g'_1(x) = 1 - 3x^2 - 8x$. No hay ningún intervalo $[a, b]$, conteniendo a p , para el cual $|g'_1(x)| < 1$. Aunque el Teorema VII.2 no garantiza que el método debe fracasar para esta elección de g , no hay ninguna razón para sospechar la convergencia.
- (b) Con $g_2(x) = [10/x - 4x]^{1/2}$, vemos que g_2 no manda al intervalo $[1, 2]$ a $[1, 2]$ y la sucesión $\{p_n\}_{n=0}^\infty$ no está definida con $p_0 = 1.5$. Más aún, no hay ningún intervalo que contenga a p tal que $|g'_2(x)| < 1$, ya que $|g'_2(p)| \approx 3.43$.
- (c) Para la función $g_3(x) = \frac{1}{2}(10 - x^3)^{1/2}$, $g'_3(x) = -\frac{3}{4}x^2(10 - x^3)^{-1/2} < 0$ en $[1, 2]$, así que g_3 es estrictamente decreciente en $[1, 2]$. Sin embargo, $|g'_3(2)| \approx 2.12$, así que la desigualdad (VII.1) no se satisface en $[1, 2]$. Examinando más de cerca la sucesión $\{p_n\}_{n=0}^\infty$ comenzando con $p_0 = 1.5$ podemos ver que es suficiente considerar el intervalo $[1, 1.5]$ en vez de $[1, 2]$. En este intervalo sigue siendo cierto que $g'_3(x) < 0$ y que g es estrictamente decreciente, pero, además $1 < 1.28 \approx g_3(1.5) \leq g_3(x) \leq g_3(1) = 1.5$ para todo $x \in [1, 1.5]$. Esto demuestra que g_3 manda al intervalo $[1, 1.5]$ a sí mismo. Como también es cierto que $|g'_3(x)| < |g'_3(1.5)| \approx 0.66$ en este intervalo, el Teorema VII.2 confirma la convergencia de la cual ya estábamos enterados.

Las otras partes del ejemplo se pueden manejar de una manera similar.

Teorema VII.5

Sea $g(x)$ una función definida y diferenciable en un intervalo $[a, b]$, y supongamos que la ecuación

$$x = g(x)$$

tenga una raíz p situada en el intervalo $[a, b]$. Además supongamos que la derivada $g'(x)$ conserva el signo y la desigualdad (VII.1) sea válida. Por consiguiente,

(1) si la derivada $g'(x)$ es positiva, las aproximaciones sucesivas

$$p_n = g(p_{n-1}), \quad (n = 1, 2, \dots), \quad p_0 \in (a, b)$$

convergen monótonamente hacia la raíz p .

(2) Sin embargo, si la derivada $g'(x)$ es negativa, las aproximaciones sucesivas oscilan entonces alrededor de la raíz p .

Demostración: (1) en efecto, hagamos $0 \leq g'(x) \leq k < 1$ y, por ejemplo,

$$p_0 < p.$$

En tal caso

$$p_1 - p = g(p_0) - g(p) = (p_0 - p) g'(\xi_1) < 0 ,$$

donde $\xi_1 \in (p_0, p)$, y

$$|p_1 - p| \leq k |p_0 - p| < |p_0 - p| .$$

En consecuencia,

$$p_0 < p_1 < p .$$

Utilizando el método de inducción matemática, obtenemos

$$p_0 < p_1 < p_2 < \dots < p .$$

Un resultado análogo se obtiene cuando $p_0 > p$.

(2) Hagamos $-1 < -k \leq g'(x) \leq 0$ y, por ejemplo, $p_0 < p$; $p_1 = g(p_0) \in (a, b)$. Tenemos,

$$p_1 - p = g(p_0) - g(p) = (p_0 - p) g'(\xi_1) > 0$$

es decir, $p_1 > p$ y $|p_1 - p| < |p_0 - p|$. Repitiendo estos argumentos para las aproximaciones p_1, p_2, \dots , tenemos

$$p_0 < p_2 < \dots < p < \dots < p_3 < p_1 .$$

De este modo, las aproximaciones sucesivas oscilarán alrededor de la raíz p . **c.q.d.**

De este modo, si la derivada $g'(x)$ es positiva, solamente es necesario elegir la aproximación inicial p_0 de forma que pertenezca al entorno (a, b) de la raíz p por la que estamos interesados; todas las aproximaciones restantes p_n ($n = 1, 2, \dots$) caerán automáticamente en este entorno y se acercarán monótonamente hacia la raíz p a medida que n aumente.

Por otra parte, en el caso de una derivada negativa $g'(x)$, si dos aproximaciones p_0 y p_1 pertenecen al entorno (a, b) de la raíz p , todas las demás aproximaciones p_n ($n = 1, 2, \dots$) pertenecerán también al mismo intervalo; la secuencia $\{p_n\}$ *estrangula* la raíz p . Además, en este caso

$$|p - p_n| \leq |p_n - p_{n-1}|$$

es decir, los dígitos estabilizados de la aproximación p_n pertenecen definitivamente a la raíz exacta p .

Nótese que dada una ecuación

$$f(x) = 0 \tag{VII.6}$$

esta puede escribirse de la forma

$$x = g(x) \tag{VII.7}$$

eligiendo la función $g(x)$ de diferentes maneras.

La notación (VII.7) no deja de tener su importancia; en ciertos casos $|g'(x)|$ demostrará ser pequeña en la vecindad de la raíz p , en otros será grande. Para el método de iteración del punto fijo, la representación de (VII.7) más ventajosa es aquella en la cual la desigualdad (VII.1) es válida, y cuanto menor sea el número k , más rápida será,

hablando en términos generales, la convergencia de las aproximaciones sucesivas a la raíz p .

Estudiaremos a continuación una técnica bastante general para reducir la ecuación (VII.6) a la forma (VII.7), y para la cual se asegure la validez de la desigualdad (VII.1). Supongamos que la raíz deseada p de la ecuación cae en el intervalo $[a, b]$, y

$$0 < m_1 \leq f'(x) \leq M_1$$

para $a \leq x \leq b$. [Si la derivada $f'(x)$ es negativa, entonces consideraremos la ecuación $-f(x) = 0$ en lugar de (VII.6)]. En particular, podemos tomar para m_1 el valor más pequeño de la derivada $f'(x)$ en el intervalo $[a, b]$, cuyo valor debe ser positivo, y para M_1 el valor más grande de $f'(x)$ en el intervalo $[a, b]$. Reemplácese (VII.6) por la ecuación equivalente

$$x = x - \lambda f(x) \quad (\lambda > 0) .$$

Podemos establecer $g(x) = x - \lambda f(x)$. Elijamos el parámetro λ de tal manera que en la vecindad dada de la raíz $[a, b]$ sea válida la desigualdad

$$0 \leq g'(x) = 1 - \lambda f'(x) \leq k < 1 ,$$

de donde tenemos

$$0 \leq 1 - \lambda M_1 \leq 1 - \lambda m_1 \leq k .$$

En consecuencia, podemos elegir

$$\lambda = \frac{1}{M_1} \quad \text{y} \quad k = 1 - \frac{m_1}{M_1} < 1 .$$

Indicaremos ahora otra técnica para acelerar la convergencia del proceso de iteración la cual puede ser útil en ciertos casos. Supóngase que disponemos de una ecuación

$$x = g(x)$$

tal que la desigualdad

$$|g'(x)| \geq q > 1$$

sea cierta dentro del entorno de la raíz deseada p . El proceso de iteración del punto fijo divergirá entonces para esta ecuación. Pero si la ecuación dada es sustituida por la ecuación equivalente

$$x = \phi(x) ,$$

donde $\phi(x) = g^{-1}(x)$ es la función inversa, tendremos una ecuación para la cual el proceso de iteración converge, ya que

$$|\phi'(x)| = \left| \frac{1}{g'(\phi(x))} \right| \leq \frac{1}{q} = k < 1 .$$

CAPITULO VIII. EL METODO DE LA SECANTE

1. INTRODUCCION Y METODO

Utilizando los supuestos de los capítulos anteriores, daremos en este capítulo un procedimiento más rápido para hallar una raíz p de la ecuación $f(x) = 0$ que caiga en un intervalo especificado $[a, b]$ tal que $f(a) \cdot f(b) < 0$. En lugar de dividir por la mitad el intervalo $[a, b]$ (método de bisección, Cap. XV), es mejor dividirlo en la relación $-f(a) : f(b)$. Esto ofrece un valor aproximado de la raíz

$$p_1 = a + h_1 = b - \tilde{h}_1, \quad (VIII.1)$$

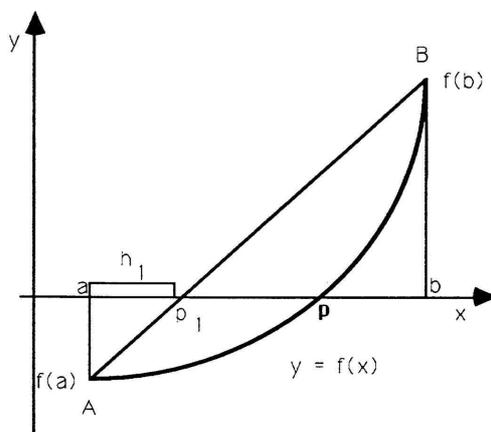
siendo

$$h_1 = -\frac{f(a)}{-f(a) + f(b)} (b - a), \quad \tilde{h}_1 = \frac{f(b)}{-f(a) + f(b)} (b - a). \quad (VIII.2)$$

Aplicando este procedimiento al intervalo $[a, p_1]$ o $[p_1, b]$ en cuyos extremos la función $f(x)$ tenga signos opuestos, tendremos una segunda aproximación p_2 de la raíz, etc. Este método es conocido con el nombre de **método de las partes proporcionales o método de la secante**.

Geoméricamente, el método de las partes proporcionales es equivalente a sustituir la curva $y = f(x)$ por una cuerda que pase por los puntos $A [a, f(a)]$ y $B [b, f(b)]$.

Figura 1



En efecto la ecuación de la secante que pasa por A y B es

$$\frac{x - a}{b - a} = \frac{y - f(a)}{f(b) - f(a)}.$$

De aquí, considerando $x = p_1$ e $y = 0$, tenemos

$$p_1 = a - \frac{f(a)}{-f(a) + f(b)} (b - a).$$

Para probar la convergencia del proceso, consideremos que la raíz está separada y la segunda derivada $f''(x)$ tiene signo constante en el intervalo $[a, b]$.

Supongamos que $f''(x) > 0$ para $a \leq x \leq b$ (el caso $f''(x) < 0$ se reduce a nuestro caso si escribimos la ecuación de la forma $-f(x) = 0$). La curva $y = f(x)$ será convexa hacia abajo, y por tanto estará localizada por debajo de su secante AB . Son posibles dos casos:

- (1) $f(a) > 0$, (ver figura 2),
- (2) $f(a) < 0$, (ver figura 3).

Figura 2

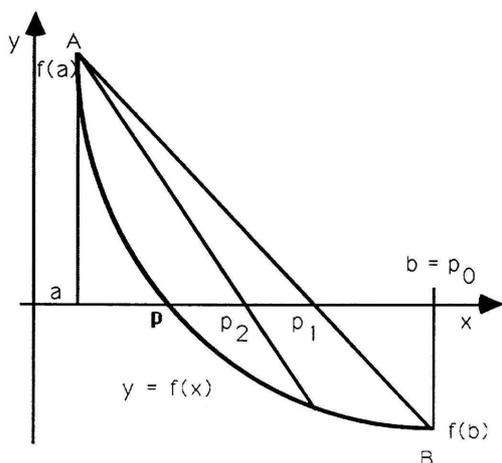
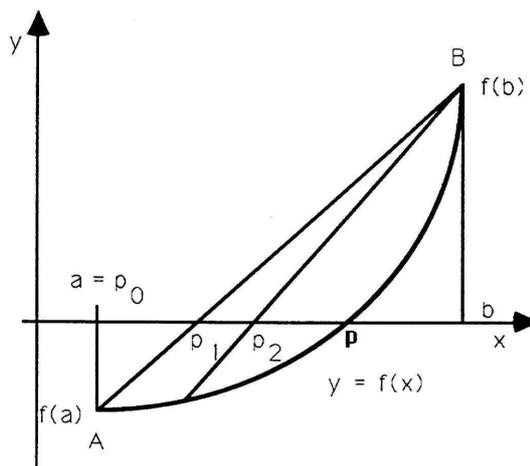


Figura 3



En el primer caso, el extremo a está fijo y las aproximaciones sucesivas:

$$p_0 = b, \quad p_{n+1} = p_n - \frac{f(p_n)}{f(p_n) - f(a)} (p_n - a), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{VIII.3})$$

forman una secuencia monótona decreciente acotada, y

$$a < p < \dots < p_{n+1} < p_n < \dots < p_1 < p_0.$$

En el segundo caso, el extremo b está fijo y las aproximaciones sucesivas:

$$p_0 = a, \quad p_{n+1} = p_n - \frac{f(p_n)}{f(b) - f(p_n)} (b - p_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{VIII.4})$$

forman una secuencia monótona creciente acotada, y

$$p_0 < p_1 < \dots < p_n < p_{n+1} < \dots < p < b.$$

Resumiendo, sacamos las siguientes conclusiones:

- (1) el extremo fijado es aquél para el cual el signo de la función $f(x)$ coincide con el signo de su segunda derivada $f''(x)$;
- (2) las aproximaciones sucesivas p_n caen en el lado de la raíz p , donde el signo de la función $f(x)$ es opuesto al signo de su segunda derivada $f''(x)$.

En ambos casos, cada aproximación sucesiva p_{n+1} está más próxima a la raíz p que la precedente, p_n . Supongamos

$$\bar{p} = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n \quad (a < \bar{p} < b)$$

(existe límite, ya que la secuencia $\{p_n\}$ está acotada y es monótona). Pasando al límite en (VIII.3), tenemos para el primer caso

$$\bar{p} = \bar{p} - \frac{f(\bar{p})}{f(\bar{p}) - f(a)} (\bar{p} - a),$$

donde $f(\bar{p}) = 0$. Como viene dado que la ecuación $f(x) = 0$ tiene solamente una raíz p en el intervalo (a, b) , se deduce que $\bar{p} = p$.

Mediante el mismo procedimiento puede probarse en (VIII.4), que $\bar{p} = p$ para el segundo caso.

Para hallar una estimación de la exactitud de la aproximación, podemos utilizar la fórmula (V.2)

$$|p_n - p| \leq \frac{|f(p_n)|}{m_1},$$

donde $|f'(x)| \geq m_1$ para $a \leq x \leq b$.

Daremos otra fórmula que permita estimar el error absoluto de un valor aproximado p_n conocidos dos valores sucesivos p_{n-1} y p_n .

Teorema VIII.1

Sea $f \in C^2[a, b]$ y supongamos que $f(a) \cdot f(b) < 0$, y que la derivada $f'(x)$, continua en el intervalo $[a, b]$ que contiene toda las aproximaciones, conserva el signo y sea tal que

$$0 < m_1 \leq |f'(x)| \leq M_1 < +\infty.$$

Entonces se estima el error absoluto de un valor aproximado p_n dado por las relaciones iterativas (VIII.3) ó (VIII.4) como

$$|p - p_n| \leq \frac{M_1 - m_1}{m_1} |p_n - p_{n-1}|. \quad (\text{VIII.5})$$

Demostración: para mayor claridad, supongamos que las aproximaciones sucesivas p_n a la raíz exacta p están generadas por la fórmula (VIII.3) (análogamente puede considerarse la fórmula (VIII.4)):

$$p_n = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{f(p_{n-1}) - f(a)} (p_{n-1} - a),$$

con $n = 1, 2, \dots$ y donde el extremo a es fijo. Entonces:

$$-f(p_{n-1}) = \frac{f(p_{n-1}) - f(a)}{p_{n-1} - a} (p_n - p_{n-1}).$$

Teniendo en cuenta el hecho de que $f(p) = 0$, tenemos

$$f(p) - f(p_{n-1}) = \frac{f(p_{n-1}) - f(a)}{p_{n-1} - a} (p_n - p_{n-1}).$$

Utilizando el Teorema de Valor Medio, tendremos

$$(p - p_{n-1}) f'(\xi_{n-1}) = (p - p_n + p_n - p_{n-1}) f'(\xi_{n-1}) = (p_n - p_{n-1}) f'(\bar{p}_{n-1}) ,$$

donde $\xi_{n-1} \in (p_{n-1}, p)$ y $\bar{p}_{n-1} \in (a, p_{n-1})$. De aquí que

$$(p - p_n) f'(\xi_{n-1}) = [f'(\bar{p}_{n-1}) - f'(\xi_{n-1})] [p_n - p_{n-1}] ,$$

y entonces:

$$|p - p_n| = \frac{|f'(\bar{p}_{n-1}) - f'(\xi_{n-1})|}{|f'(\xi_{n-1})|} |p_n - p_{n-1}| .$$

Como $f'(x)$ tiene signo constante en el intervalo $[a, b]$ y $\bar{p}_{n-1} \in [a, b]$ y $\xi_{n-1} \in [a, b]$, tenemos sencillamente

$$|f'(\bar{p}_{n-1}) - f'(\xi_{n-1})| \leq M_1 - m_1 .$$

Deducimos, por tanto, que

$$|p - p_n| \leq \frac{M_1 - m_1}{m_1} |p_n - p_{n-1}| ,$$

donde podemos tomar respectivamente para m_1 y M_1 los valores menor y mayor del módulo de la derivada $f'(x)$ en el intervalo $[a, b]$. **c.q.d.**

Si el intervalo $[a, b]$ es tan estrecho que se cumple la desigualdad

$$M_1 \leq 2 m_1$$

obtenemos entonces de la fórmula (VIII.5)

$$|p - p_n| \leq |p_n - p_{n-1}| .$$

En este caso, cuando

$$|p_n - p_{n-1}| \leq \varepsilon ,$$

donde ε es la cota de error absoluto especificada, puede garantizarse que

$$|p - p_n| \leq \varepsilon .$$

2. ALGORITMO Y EJEMPLOS

Algoritmo de la secante.

=====

Para encontrar una solución de $f(x) = 0$, dada la función f en el intervalo $[a, b]$ donde $f(a)$ y $f(b)$ tienen signo opuesto:

Entrada: extremos a y b ; tolerancia TOL ; número máximo de iteraciones N_0 ;

Salida: solución aproximada p ó mensaje de fracaso.

Paso 1: tomar $i = 2$, y definir:

$$p_0 = b, q_0 = f(a) \text{ y } q_1 = f(b), \text{ si } f(a) > 0;$$

$$p_0 = a, q_0 = f(b) \text{ y } q_1 = f(a), \text{ si } f(a) < 0;$$

Paso 2: mientras que $i \leq N_0$ seguir pasos 3–6;

Paso 3: tomar (calcular p_i):

$$p = p_0 - \frac{q_1}{q_1 - q_0} (p_0 - a), \text{ si } f(a) > 0;$$

$$p = p_0 - \frac{q_1}{q_0 - q_1} (b - p_0), \text{ si } f(a) < 0;$$

Paso 4: si $|p - p_0| < TOL$ entonces SALIDA (p);
(procedimiento completado satisfactoriamente) PARAR;

Paso 5: tomar $i = i + 1$

Paso 6: tomar $p_0 = p$; $q_1 = f(p)$ (redefinir p_0, q_1);

Paso 7: SALIDA ('El método fracasó después de N_0 iteraciones, $N_0 = \dots, N_0$);
(procedimiento completado sin éxito); PARAR.

=====

Para ilustrar el algoritmo de la secante, considérese los siguientes ejemplos.

Ejemplo. Hállese una raíz positiva de la ecuación

$$f(x) \equiv x^3 + 4x^2 - 10 = 0$$

con una exactitud de 0.0002.

Primeramente separamos la raíz. Ya que

$$f(1.3) = -1.043 < 0 \quad \text{y} \quad f(1.4) = 0.584 > 0$$

la raíz deseada p está en el intervalo (1.3, 1.4). Además, estamos en el caso $f(a) < 0$, y entonces consideramos la fórmula (VIII.4) en la cual el extremo b está fijo:

$$p_0 = a, \quad p_{n+1} = p_n - \frac{f(p_n)}{f(b) - f(p_n)} (b - p_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Entonces, tenemos

$$p_0 = 1.3,$$

$$p_1 = 1.3 + \frac{1.043}{0.584 + 1.043} (1.4 - 1.3) = 1.364105716,$$

$$f(p_1) = -0.01855573934,$$

$$p_2 = 1.364105716 + \frac{0.01855573934}{0.584 + 0.01855573934} (1.4 - 1.364105716)$$

$$= 1.365211083,$$

$$f(p_2) = -0.00031260885.$$

Como $f'(x) = 3x^2 + 8x$ y para $p_2 < x < 1.4$ se tiene

$$m_1 = \min_{x \in [p_2, 1.4]} |f'(x)| = f'(p_2) = 16.513092561,$$

y

$$M_1 = \max_{x \in [p_2, 1.4]} |f'(x)| = f'(1.4) = 17.08 .$$

Luego podemos considerar que

$$0 < p - p_2 < \frac{|f(p_2)|}{m_1} \approx 0.189309694014 \times 10^{-4} < 2.0 \times 10^{-4} .$$

Obsérvese que la raíz con diez dígitos exacto de la ecuación es $p = 1.365230013$.

Si consideremos la cota $|p - p_2| \leq \frac{M_1 - m_1}{m_1} |p_2 - p_1|$, obtendríamos:

$$|p - p_2| \leq \frac{M_1 - m_1}{m_1} |p_2 - p_1| \approx 0.37948 \times 10^{-3} ,$$

ilustrandonos que el primer estimado es mucho mejor en este caso, dado que con esta segunda cota tendríamos que iterar una vez más.

CAPITULO IX. EL METODO DE NEWTON-RAPHSON

1. INTRODUCCION Y METODO

El método de Newton-Raphson (o simplemente Newton) es uno de los métodos numéricos más conocidos y poderosos para la resolución del problema de búsqueda de raíces de $f(x) = 0$. Para introducir el método de Newton usaremos un enfoque intuitivo basado en el polinomio de Taylor.

Supóngase que la función f es continuamente diferenciable dos veces en el intervalo $[a, b]$; o sea, $f \in \mathcal{C}^2[a, b]$. Sea $\bar{x} \in [a, b]$ una aproximación a la raíz p tal que $f'(\bar{x}) \neq 0$ y $|\bar{x} - p|$ es *pequeño*. Considérese el polinomio de Taylor de primer grado para $f(x)$ alrededor de \bar{x}

$$f(x) = f(\bar{x}) + (x - \bar{x}) f'(\bar{x}) + \frac{(x - \bar{x})^2}{2} f''(\zeta(x)) , \quad (IX.1)$$

donde $\zeta(x)$ está entre x y \bar{x} . Como $f(p) = 0$, la ecuación (IX.1), con $x = p$, nos da

$$0 = f(\bar{x}) + (p - \bar{x}) f'(\bar{x}) + \frac{(p - \bar{x})^2}{2} f''(\zeta(p)) . \quad (IX.2)$$

El método de Newton se deriva suponiendo que el término que contiene a $(p - \bar{x})^2$ es despreciable y que

$$0 \approx f(\bar{x}) + (p - \bar{x}) f'(\bar{x}) . \quad (IX.3)$$

Despejando p de esta ecuación resulta:

$$p \approx \bar{x} - \frac{f(\bar{x})}{f'(\bar{x})} , \quad (IX.4)$$

lo cual debe ser una mejor aproximación a p que \bar{x} .

El método de Newton-Raphson implica el generar la sucesión $\{p_n\}$ definida por

$$p_n = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})} , \quad n \geq 1 . \quad (IX.5)$$

Geoméricamente, el método de Newton es equivalente a sustituir un arco pequeño de la curva $y = f(x)$ por una tangente trazada por un punto de la curva. Supongamos, por definición, que $f''(x) > 0$ para $a \leq x \leq b$ y $f(b) > 0$ (ver figura 1).

Tomemos, por ejemplo, $p_0 = b$ para el cual $f(p_0) \cdot f''(p_0) > 0$. Trácese la tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $B(p_0, f(p_0))$. Como primera aproximación p_1 de la raíz p tomemos la abscisa del punto de intersección de esta tangente con el eje x . Trácese nuevamente una tangente por el punto de coordenadas $(p_1, f(p_1))$, cuya abscisa del punto de intersección con el eje x ofrece una segunda aproximación p_2 de la raíz p , y así sucesivamente.

La ecuación de la tangente en el punto de coordenadas $(p_n, f(p_n))$ ($n = 0, 1, \dots$), es

$$y - f(p_n) = f'(p_n) (x - p_n) .$$

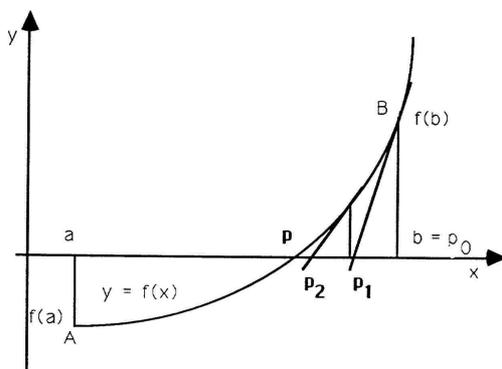
Haciendo $y = 0$ y $x = p_{n+1}$, tendremos la fórmula (IX.5).

Nótese que si en nuestro caso hacemos $p_0 = a$, y por tanto $f(p_0) \cdot f''(p_0) < 0$, y trazamos entonces la tangente a la curva $y = f(x)$ por el punto $A(a, f(a))$, tendremos que el punto p'_1 cae fuera del intervalo $[a, b]$; en otras palabras, el procedimiento de Newton no es práctico para este valor inicial. Por tanto, en el caso dado, una buena aproximación inicial p_0 es aquella para la cual resulta válida la desigualdad

$$f(p_0) \cdot f''(p_0) > 0 .$$

Demostraremos ahora que esta regla es general.

Figura 1



Teorema IX.1

Sea $f \in \mathcal{C}^2[a, b]$. Si $f(a) \cdot f(b) < 0$, y $f'(x)$ y $f''(x)$ son no nulas y conservan el signo para $a \leq x \leq b$, entonces, a partir de la aproximación inicial $p_0 \in [a, b]$ que satisface

$$f(p_0) \cdot f''(p_0) > 0 , \quad (\text{IX.6})$$

es posible, utilizando el método de Newton (fórmula (IX.3)), calcular la raíz única p de la ecuación $f(x) = 0$ con cualquier grado de exactitud.

Demostración: supongamos $f(a) < 0$, $f(b) > 0$, $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$ para $a \leq x \leq b$. Por la desigualdad (IX.6) tenemos $f(p_0) > 0$ (podemos, por ejemplo, tomar $p_0 = b$). Por inducción matemática demostraremos que todas las aproximaciones $p_n > p$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) y, por consiguiente, $f(p_n) > 0$. En efecto, ante todo, $p_0 > p$.

Establezcamos ahora $p_n > p$. Pongamos

$$p = p_n + (p - p_n) .$$

Utilizando la fórmula de Taylor, tendremos

$$0 = f(p) = f(p_n) + f'(p_n) (p - p_n) + \frac{1}{2} f''(c_n) (p - p_n)^2 ,$$

donde $p < c_n < p_n$.

Como $f''(x) > 0$, tenemos

$$f(p_n) + f'(p_n) (p - p_n) < 0 ,$$

y, de aquí que

$$p_{n+1} = p_n - \frac{f(p_n)}{f'(p_n)} > p$$

que es lo que se quería demostrar.

Tomando en consideración los signos de $f(p_n)$ y $f'(p_n)$ tenemos, de la fórmula (IX.5), $p_{n+1} < p_n$ ($n = 0, 1, \dots$), es decir, las aproximaciones sucesivas $p_0, p_1, \dots, p_n, \dots$ forman una secuencia acotada monótona decreciente. Por consiguiente, existe el límite $\bar{p} = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n$. Pasando al límite en (IX.5), tenemos

$$\bar{p} = \bar{p} - \frac{f(\bar{p})}{f'(\bar{p})}$$

ó $f(\bar{p}) = 0$, de donde $\bar{p} = p$.

c.q.d.

Por esta razón, al aplicar el método de Newton debe guiarse uno por la **regla** siguiente: para el punto inicial p_0 elíjase el final del intervalo (a, b) asociado con una ordenada del mismo signo que el de $f''(x)$.

Teorema IX.2

Sea $f \in \mathcal{C}(-\infty, +\infty)$, $f(a) \cdot f(b) < 0$, $f'(x) \neq 0$ para $a \leq x \leq b$ y si $f''(x)$ existe en cualquier punto y conserva el signo, entonces puede tomarse cualquier valor $c \in [a, b]$ como aproximación inicial p_0 al utilizarse el método de Newton para hallar una raíz de la ecuación $f(x) = 0$ que caiga en el intervalo (a, b) . Se puede, por ejemplo, tomar $p_0 = a$ ó $p_0 = b$.

Demostración: en efecto, supongamos, por ejemplo, $f'(x) > 0$ para $a \leq x \leq b$, $f''(x) > 0$ y $p_0 = c$, donde $a \leq c \leq b$. Si $f(c) = 0$, la raíz $p = c$ y el problema queda resuelto. Si $f(c) > 0$, el razonamiento anterior se cumple y el proceso de Newton con valor inicial c convergerá hacia la raíz $p \in (a, b)$.

Finalmente, si $f(c) < 0$, hallaremos

$$p_1 = p_0 - \frac{f(p_0)}{f'(p_0)} = c - \frac{f(c)}{f'(c)} > c .$$

Utilizando la fórmula de Taylor tendremos

$$f(p_1) = f(c) - \frac{f(c)}{f'(c)} f'(c) + \frac{1}{2} \left[\frac{f(c)}{f'(c)} \right]^2 f''(\bar{c}) = \frac{1}{2} \left[\frac{f(c)}{f'(c)} \right]^2 f''(\bar{c}) > 0$$

donde \bar{c} es un cierto valor intermedio entre c y p_1 . De este modo

$$f(p_1) \cdot f''(p_1) > 0 .$$

Además, de la condición $f''(x) > 0$ se deduce que $f'(x)$ es una función creciente y, en consecuencia, $f'(x) > f'(a) > 0$ para $x > a$. Es posible por tanto tomar p_1 como valor inicial del proceso de Newton convergente hacia una cierta raíz \bar{p} de la función $f(x)$ tal que $\bar{p} > c \geq a$. Como la derivada $f'(x)$ es positiva cuando $p > a$, la función $f(x)$ tiene raíz única en el intervalo $(a, +\infty)$, de donde se deduce que

$$\bar{p} = p \in (a, b) .$$

Puede establecerse un argumento similar para otras combinaciones de signos de las derivadas $f'(x)$ y $f''(x)$. **c.q.d.**

Nótese que de la fórmula (IX.5) está claro que cuanto mayor sea el valor numérico de la derivada $f'(x)$ en la vecindad de la raíz, tanto menor será la corrección que ha de añadirse a la aproximación n -ésima para obtener la aproximación $(n + 1)$. El método de Newton es por consiguiente muy conveniente cuando la gráfica de la función tiene una gran pendiente en la vecindad de la raíz dada, pero si el valor numérico de la derivada $f'(x)$ es pequeño cerca de ella, las correcciones serán entonces mayores, y calcular la raíz mediante este procedimiento puede ser un proceso largo o a veces incluso imposible. Resumiendo: no utilice el método de Newton para resolver una ecuación $f(x) = 0$ si la curva $y = f(x)$ es casi horizontal cerca del punto de intersección con el eje x .

El método de Newton es un técnica de iteración funcional $p_n = g(p_{n-1})$, $n \geq 1$ para la cual

$$p_n = g(p_{n-1}) = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})} , \quad n \geq 1 .$$

Se ve claramente de esta ecuación que el método de Newton no puede continuarse si $f'(p_{n-1}) = 0$ para algún n . Veremos que el método es más eficaz cuando f' está acotada fuera de cero cerca del punto fijo p .

La derivación del método de Newton con serie de Taylor resalta la importancia de una buena aproximación inicial. La suposición crucial al pasar de (IX.2) a (IX.3), es que el término que contiene $(p - \bar{x})^2$ puede ser eliminado. Esta, claramente será una suposición falsa a menos que \bar{x} sea una buena aproximación de p . En particular, si p_0 no está lo suficientemente cerca de la raíz real, el método de Newton puede no converger a la raíz.

El siguiente Teorema de convergencia para el método de Newton ilustra la importancia teórica de la elección de p_0 .

Teorema IX.3

Sea $f \in \mathcal{C}^2[a, b]$. Si $p \in [a, b]$ es tal que $f(p) = 0$ y $f'(p) \neq 0$, entonces existe $\delta > 0$ tal que el método de Newton genera una sucesión $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ que converge a p para cualquier aproximación inicial $p_0 \in [p - \delta, p + \delta]$.

Demostración: la demostración está basada en un análisis del método de Newton como un esquema de iteración funcional $p_n = g(p_{n-1})$, para $n \geq 1$, con

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} .$$

El objetivo es encontrar, para cualquier valor k en $(0, 1)$, un intervalo $[p - \delta, p + \delta]$ tal que g mande al intervalo $[p - \delta, p + \delta]$ a sí mismo y que $|g'(x)| \leq k < 1$ para $x \in [p - \delta, p + \delta]$, donde k es una constante fija en $(0, 1)$.

Ya que $f'(p) \neq 0$ y f' es continua, existe $\delta_1 > 0$ tal que $f'(x) \neq 0$ para $x \in [p - \delta_1, p + \delta_1] \subset [a, b]$. Entonces, g está definida y es continua en $[p - \delta_1, p + \delta_1]$. También,

$$g'(x) = 1 - \frac{f'(x) f'(x) - f(x) f''(x)}{[f'(x)]^2} = \frac{f(x) f''(x)}{[f'(x)]^2}$$

para $x \in [p - \delta_1, p + \delta_1]$; y como $f \in \mathcal{C}^2[a, b]$, $g \in \mathcal{C}[p - \delta_1, p + \delta_1]$. De la suposición $f(p) = 0$, se tiene

$$g'(p) = \frac{f(p) f''(p)}{[f'(p)]^2} = 0 .$$

Y como g' es continua, esa ecuación implica que existe un δ con $0 < \delta < \delta_1$, y

$$|g'(x)| \leq k < 1 \quad \text{para } x \in [p - \delta, p + \delta] .$$

Falta todavía demostrar que $g : [p - \delta, p + \delta] \rightarrow [p - \delta, p + \delta]$. Si $x \in [p - \delta, p + \delta]$, el Teorema del Valor Medio implica que, para algún número ξ entre x y p , $|g(x) - g(p)| = |g'(\xi)| |x - p|$. Así que,

$$|g(x) - p| = |g(x) - g(p)| = |g'(\xi)| |x - p| \leq k |x - p| < |x - p| .$$

Como $x \in [p - \delta, p + \delta]$, se sigue que $|x - p| < \delta$ y que $|g(x) - p| < \delta$. Esto implica que $g : [p - \delta, p + \delta] \rightarrow [p - \delta, p + \delta]$.

Todas las hipótesis del Teorema VII.2 se satisfacen para $g(x) = x - f(x)/f'(x)$, así que la sucesión $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ definida por

$$p_n = g(p_{n-1}) \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \dots$$

converge a p para cualquier $p_0 \in [p - \delta, p + \delta]$.

c.q.d.

Para estimar el error de la aproximación p_n de orden n , se puede utilizar la fórmula general (V.2) del capítulo V, $|p - p_n| \leq |f(p_n)|/m_1$, donde m_1 es el valor más pequeño de $|f'(x)|$ en el intervalo $[a, b]$.

Obtendremos ahora otra fórmula para estimar la exactitud de la aproximación p_n . Aplicando la fórmula de Taylor, tenemos

$$\begin{aligned} f(p_n) &= f[p_{n-1} + (p_n - p_{n-1})] = \\ &= f(p_{n-1}) + f'(p_{n-1}) (p_n - p_{n-1}) + \frac{1}{2} f''(\xi_{n-1}) (p_n - p_{n-1})^2 \end{aligned}$$

donde $\xi_{n-1} \in (p_{n-1}, p_n)$. Ya que, en virtud de la definición de la aproximación p_n , tenemos

$$f(p_{n-1}) + f'(p_{n-1}) (p_n - p_{n-1}) = 0 ,$$

se deduce que

$$|f(p_n)| \leq \frac{1}{2} M_2 (p_n - p_{n-1})^2$$

donde M_2 es el valor más elevado de $|f''(x)|$ en el intervalo $[a, b]$. En consecuencia, basándose en la fórmula (V.2) tenemos finalmente

$$|p - p_n| \leq \frac{M_2}{2m_1} (p_n - p_{n-1})^2. \quad (IX.7)$$

Si el proceso de Newton converge, entonces $|p_n - p_{n-1}| \rightarrow 0$ para $n \rightarrow \infty$. Y por tanto para $n \geq N$ tenemos

$$|p - p_n| \leq |p_n - p_{n-1}|,$$

es decir, los decimales iniciales “estabilizados” de las aproximaciones p_{n-1} y p_n son exactos comenzando con una cierta aproximación.

Téngase en cuenta que en el caso general, una coincidencia hasta de ε , de dos aproximaciones sucesivas p_{n-1} y p_n no garantiza que los valores de p_n y la raíz exacta p coincidan con el mismo grado de exactitud.

Obtendremos ahora una fórmula que ligue los errores absolutos de dos aproximaciones sucesivas p_n y p_{n+1} . Utilizando la fórmula de Taylor tendremos

$$0 = f(p) = f(p_n) + f'(p_n) (p - p_n) + \frac{1}{2} f''(c_n) (p - p_n)^2,$$

donde $p < c_n < p_n$, y entonces

$$p = p_n - \frac{f(p_n)}{f'(p_n)} - \frac{1}{2} \cdot \frac{f''(c_n)}{f'(p_n)} (p - p_n)^2,$$

y, teniendo en cuenta que $p_{n+1} = p_n - \frac{f(p_n)}{f'(p_n)}$, tenemos

$$p - p_{n+1} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{f''(c_n)}{f'(p_n)} (p - p_n)^2,$$

y consecuentemente,

$$|p - p_{n+1}| \leq \frac{M_2}{2m_1} (p - p_n)^2. \quad (IX.8)$$

La fórmula (IX.8) asegura una rápida convergencia del proceso de Newton si la aproximación inicial p_0 es tal que

$$\frac{M_2}{2m_1} |p - p_0| \leq k < 1.$$

En particular, si

$$\mu = \frac{M_2}{2m_1} \leq 1 \quad \text{y} \quad |p - p_n| < 10^{-m}$$

entonces de (IX.8) tenemos

$$|p - p_{n+1}| < 10^{-2m}.$$

Esto es, en este caso, si la aproximación p_n es exacta con m decimales, la siguiente aproximación p_{n+1} lo será como mínimo con $2m$ decimales; en otras palabras, si $\mu \leq 1$, el procedimiento de Newton asegura entonces el doble del número de decimales exactos de la raíz deseada en cada paso.

2. EL ALGORITMO DE NEWTON-RAPHSON

Algoritmo de Newton-Raphson.

=====

Para encontrar una solución de $f(x) = 0$ dada una aproximación inicial p_0 :

Entrada: aproximación inicial p_0 ; tolerancia TOL ; número máximo de iteraciones N_0 ;

Salida: solución aproximada p ó mensaje de fracaso.

Paso 1: tomar $i = 1$;

Paso 2: mientras que $i \leq N_0$ seguir pasos 3–6;

Paso 3: tomar $p = p_0 - \frac{f(p_0)}{f'(p_0)}$ (calcular p_i);

Paso 4: si $|p - p_0| < TOL$ entonces SALIDA (p);
(procedimiento completado satisfactoriamente) PARAR;

Paso 5: tomar $i = i + 1$

Paso 6: tomar $p_0 = p$. (redefinir p_0);

Paso 7: SALIDA ('El método fracasó después de N_0 iteraciones, $N_0 = \dots, N_0$);
(procedimiento completado sin éxito); PARAR.

=====

Ejemplo. Para obtener la solución única de

$$f(x) = x^3 + 4x^2 - 10 = 0$$

en el intervalo $[1, 2]$ por el método de Newton generamos la sucesión $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ dada por

$$p_n = p_{n-1} - \frac{p_{n-1}^3 + 4p_{n-1}^2 - 10}{3p_{n-1}^2 + 8p_{n-1}}, \quad n \geq 1.$$

Seleccionando $p_0 = 1.5$ obtenemos los resultados del ejemplo del capítulo XVI en los cuales $p_3 = 1.36523001$ es correcto en ocho decimales.

3. EL ALGORITMO DE LA SECANTE MODIFICADO

El Teorema IX.3 dice que, bajo condiciones razonables, el método de Newton convergerá siempre y cuando se escoja una aproximación inicial lo suficientemente exacta. También implica que la constante k que acota la derivada de g decrece conforme el procedimiento va avanzando y, consecuentemente, indica la rapidez de convergencia del método.

El método de Newton es una técnica extremadamente poderosa, pero tiene una dificultad grande: la necesidad de saber el valor de la derivada de f en cada aproximación. Frecuentemente ocurre que $f'(x)$ es mucho más complicada y necesita más operaciones aritméticas para su cálculo que $f(x)$.

Para evitar el problema de la evaluación de la derivada en el método de Newton, podemos derivar una pequeña variación de éste, relacionada con el método de la secante que hemos visto en el capítulo anterior.

Por definición

$$f'(p_{n-1}) = \lim_{x \rightarrow p_{n-1}} \frac{f(x) - f(p_{n-1})}{x - p_{n-1}}.$$

Tomando $x = p_{n-2}$

$$f'(p_{n-1}) \approx \frac{f(p_{n-2}) - f(p_{n-1})}{p_{n-2} - p_{n-1}} = \frac{f(p_{n-1}) - f(p_{n-2})}{p_{n-1} - p_{n-2}}.$$

Usando esta aproximación para $f'(p_{n-1})$ en la fórmula de Newton da

$$p_n = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{f(p_{n-1}) - f(p_{n-2})} (p_{n-1} - p_{n-2}). \quad (IX.9)$$

Algoritmo de la secante modificado.

=====
 Para encontrar una solución de $f(x) = 0$, dadas las aproximaciones iniciales p_0 y p_1 ;

Entrada: aproximaciones iniciales p_0 y p_1 ; tolerancia TOL ; número máximo de iteraciones N_0 ;

Salida: solución aproximada p ó mensaje de fracaso.

Paso 1: tomar $i = 2$, y definir:

$$\begin{aligned} q_0 &= f(p_0) \\ q_1 &= f(p_1); \end{aligned}$$

Paso 2: mientras que $i \leq N_0$ seguir pasos 3–6;

Paso 3: tomar (calcular p_i):

$$p = p_1 - \frac{q_1}{q_1 - q_0} (p_1 - p_0);$$

Paso 4: si $|p - p_1| < TOL$ entonces SALIDA (p);

(procedimiento completado satisfactoriamente) PARAR;

Paso 5: tomar $i = i + 1$

Paso 6: tomar (redefinir p_0, p_1, q_0, q_1):

$$\begin{aligned} p_0 &= p_1; \\ q_0 &= q_1; \\ p_1 &= p; \\ q_1 &= f(p); \end{aligned}$$

Paso 7: SALIDA ('El método fracasó después de N_0 iteraciones, $N_0 = \quad, N_0$);
 (procedimiento completado sin éxito); PARAR.

=====

El método de la secante o el método de Newton se usan frecuentemente para refinar las respuestas obtenidas con otras técnicas, como el método de bisección. Como estos métodos requieren una buena primera aproximación, pero generalmente dan una convergencia rápida, cumplen muy bien con su propósito.

4. EL METODO DE NEWTON MODIFICADO

Si la derivada $f'(x)$ varía, aunque ligeramente, en el intervalo $[a, b]$, en tal caso en la fórmula (IX.5) podemos poner

$$f'(p_n) \approx f'(p_0) .$$

De aquí, para la raíz p de la ecuación $f(x) = 0$ tendremos las aproximaciones sucesivas

$$p_{n+1} = p_n - \frac{f(p_n)}{f'(p_0)} , \quad n \geq 0 . \quad (\text{IX.10})$$

La fórmula de iteración (IX.10) es conocida también como la **fórmula de Von Mises**.

Geoméricamente, este método significa que sustituímos las tangentes en los puntos $B_n[p_n, f(p_n)]$ por líneas rectas paralelas a la tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $B_0[p_0, f(p_0)]$.

La fórmula de Von Mises nos evita la necesidad de calcular los valores de la derivada $f'(p_n)$ cada vez; por lo tanto esta fórmula es muy útil si $f'(p_n)$ es complicada.

Puede demostrarse que supuesta la constancia de los signos de las derivadas $f'(x)$ y $f''(x)$ las aproximaciones sucesivas (IX.10) presentan un proceso convergente.

5. EL METODO DE COMBINACION

Supongamos $f(a) \cdot f(b) < 0$ y que $f'(x)$ y $f''(x)$ conservan los signos en el intervalo $[a, b]$. Combinando el método de la secante modificado y el de Newton, obtenemos un método en el que en cada una de sus etapas encontraremos aproximaciones menores (demasiado pequeñas) y mayores (demasiado grandes) a la raíz exacta p de la ecuación $f(x) = 0$. Este método es también conocido con el nombre de **método de Dandelin**.

Una de sus consecuencias es que los dígitos comunes a p_n y \bar{p}_n deben pertenecer definitivamente a la raíz exacta p . Existen cuatro casos teóricamente posibles:

$$(1) \quad f'(x) > 0 \quad f''(x) > 0 ;$$

$$(2) \quad f'(x) > 0 \quad f''(x) < 0 ;$$

$$(3) \quad f'(x) < 0 \quad f''(x) > 0 ;$$

$$(4) \quad f'(x) < 0 \quad f''(x) < 0 .$$

Limitaremos nuestro análisis al primer caso. Los casos restantes se estudian de forma análoga y el carácter de los cálculos se comprende fácilmente en base a las figuras. Conviene tener en cuenta que estos casos pueden reducirse al primero si sustituímos la ecuación $f(x) = 0$ por las ecuaciones equivalentes $-f(x) = 0$ ó $\pm f(-z) = 0$, donde $z = -x$.

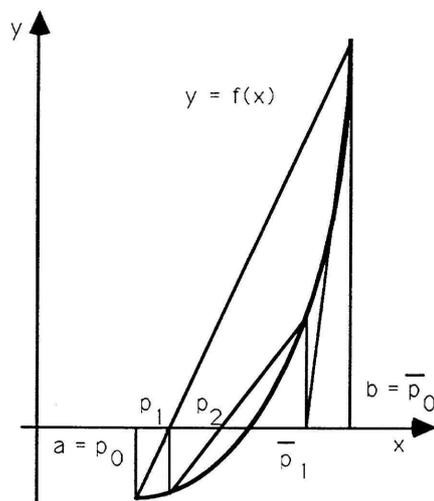
De este modo, supongamos $f'(x) > 0$ y $f''(x) > 0$ para $a \leq x \leq b$. Hagamos

$$p_0 = a \quad \text{y} \quad \bar{p}_0 = b ,$$

y

$$p_{n+1} = p_n - \frac{f(p_n)}{f(\bar{p}_n) - f(p_n)} (\bar{p}_n - p_n), \quad (IX.11)$$

$$\bar{p}_{n+1} = \bar{p}_n - \frac{f(\bar{p}_n)}{f'(\bar{p}_n)} \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (IX.12)$$

Figura 2

Es decir, en cada paso se aplica el método de la secante para un nuevo intervalo $[p_n, \bar{p}_n]$.

Por lo demostrado anteriormente se deduce que

$$p_n < p < \bar{p}_n$$

y

$$0 < p - p_n < \bar{p}_n - p_n.$$

Si el error absoluto permisible en una raíz aproximada p_n se ha especificado de antemano y es igual a ε , el proceso de aproximación termina tan pronto veamos que $\bar{p}_n - p_n < \varepsilon$. Al final del proceso, lo mejor es tomar como valor de la raíz p la media aritmética de los últimos valores obtenidos:

$$\bar{p} = \frac{1}{2} (p_n + \bar{p}_n).$$

Ejemplo. Calcúlese con exactitud 0.0005 la única raíz positiva de la ecuación

$$f(x) = x^5 - x - 0.2 = 0.$$

Como $f(1) = -0.2 < 0$ y $f(1.1) = 0.31051 > 0$, la raíz está en el intervalo (1, 1.1). Tenemos

$$f'(x) = 5x^4 - 1 \quad \text{y} \quad f''(x) = 20x^3.$$

En el intervalo elegido, $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$, lo cual quiere decir que se han conservado los signos de las derivadas.

Apliquemos el método de combinación suponiendo que $p_0 = 1$ y $\bar{p}_0 = 1.1$. Ya que

$$f(p_0) = f(1) = -0.2, \quad f(\bar{p}_0) = f(1.1) = 0.3105, \quad f'(\bar{p}_0) = f'(1.1) = 6.3205$$

las fórmulas (IX.11) y (IX.12) se convierten en

$$p_1 = 1 + \frac{0.2 \cdot 0.1}{0.5105} \approx 1.03918 \quad \text{y} \quad \bar{p}_1 = 1.1 - \frac{0.3105}{6.3205} \approx 1.05087,$$

con $f(p_1) = -0.0273160$ y $f(\bar{p}_1) = 0.0307078$. Como $\bar{p}_1 - p_1 = 0.01169$, la exactitud no es suficiente. Halleremos el siguiente par de aproximaciones, con $f'(\bar{p}_1) \approx 5.09770$:

$$p_2 = 1.03919 + \frac{0.027316 \cdot 0.01169}{0.0580238} \approx 1.04468$$

y

$$\bar{p}_2 = 1.05087 - \frac{0.0307078}{5.0977} \approx 1.04485,$$

con $f(p_2) = -0.0000404924$ y $f(\bar{p}_2) = 0.000437805$. En este caso, $\bar{p}_2 - p_2 = 0.00017$, lo cual indica que se ha conseguido el grado de exactitud deseado. Podemos poner

$$\bar{p} = \frac{1}{2} (1.04468 + 1.04485) = 1.044765 \approx 1.045$$

con error absoluto menor de $0.0002 < 0.0005$. En efecto:

$$|p - \bar{p}| = \left| p - \frac{1}{2}(p_2 + \bar{p}_2) \right| = \left| p - p_2 + \frac{1}{2}(p_2 - \bar{p}_2) \right| \leq |p - p_2| + \frac{1}{2}|p_2 - \bar{p}_2| \leq \frac{1}{2}|p_2 - \bar{p}_2| + \frac{|f(p_2)|}{m_1},$$

o también

$$|p - \bar{p}| = \left| p - \bar{p}_2 + \frac{1}{2}(\bar{p}_2 - p_2) \right| \leq \frac{1}{2}|\bar{p}_2 - p_2| + \frac{|f(\bar{p}_2)|}{m_1}.$$

Dado que $m_1 = \min_{x \in [1, 1.1]} |f'(x)| = 4$, obtenemos que $|p - \bar{p}| \leq \frac{1}{2} 0.00017 + \frac{|-0.000404924|}{4} = 0.000186231$ en el primer caso y $|p - \bar{p}| \leq \frac{1}{2} 0.00017 + \frac{|0.000437805|}{4} = 0.000194451$, en el segundo.

CAPITULO X. ANALISIS DE ERROR Y TECNICAS DE ACELERACION

1. ANALISIS DE LOS ERRORES PARA METODOS ITERATIVOS

Este capítulo se dedica a investigar el orden de convergencia de los esquemas de iteración funcional y, con la idea de obtener una convergencia rápida, reutilizar el método de Newton. Consideraremos también maneras de acelerar la convergencia del método de Newton en circunstancias especiales. Pero, antes, tenemos que definir un procedimiento para medir la rapidez de la convergencia.

Definición. Supongamos que $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión que converge a p y que $e_n = p_n - p$ para cada $n \geq 0$. Si existen dos números positivos λ y α tales que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|p_{n+1} - p|}{|p_n - p|^\alpha} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^\alpha} = \lambda ,$$

entonces se dice que $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ **converge a p de orden α** , con una constante de error asintótico λ .

A una técnica iterativa para resolver un problema de la forma $x = g(x)$ se le denomina de orden α si, siempre que el método produce convergencia para una sucesión $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ donde $p_n = g(p_{n-1})$ para $n \geq 1$, la sucesión converge a la solución de orden α .

En general, una sucesión con un orden de convergencia grande convergerá más rápidamente que una sucesión con un orden más bajo. La constante asintótica afectará la rapidez de convergencia, pero no es tan importante como el orden. Se dará atención especial a dos casos:

- i) si $\alpha = 1$, entonces el método se denomina **lineal**;
- ii) si $\alpha = 2$, entonces el método se denomina **cuadrático**.

Supongamos que queremos encontrar una solución aproximada de $g(x) = x$, usando el esquema de iteración de punto fijo $p_n = g(p_{n-1})$ para toda $n \geq 1$. Supongamos también que g manda el intervalo $[a, b]$ a sí mismo y que existe un número positivo k tal que $|g'(x)| \leq k < 1$ para todo $x \in [a, b]$. El Teorema VII.2 implica que g tiene un punto fijo único $p \in [a, b]$ y que si $p_0 \in [a, b]$ entonces la sucesión de punto fijo $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge a p . Se mostrará que la convergencia es lineal, siempre que $g'(p) \neq 0$. Si n es cualquier entero positivo, entonces

$$e_{n+1} = p_{n+1} - p = g(p_n) - g(p) = g'(\xi_n) (p_n - p) = g'(\xi_n) e_n ,$$

donde ξ_n está entre p_n y p . Como $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge a p , $\{\xi_n\}_{n=0}^{\infty}$ también converge a p . Suponiendo que g' es continua en $[a, b]$, tenemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g'(\xi_n) = g'(p) ,$$

y por lo tanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e_{n+1}}{e_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} g'(\xi_n) = g'(p) , \quad \text{y} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|} = |g'(p)| .$$

Por lo tanto, la iteración del punto fijo exhibe convergencia lineal si $g'(p) \neq 0$. La convergencia de orden mayor puede ocurrir sólo cuando $g'(p) = 0$.

Ejemplo. Supongamos que tenemos dos esquemas iterativos convergentes descritos por

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|} = 0.75, \quad \text{un método lineal,}$$

y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\tilde{e}_{n+1}|}{|\tilde{e}_n|^2} = 0.75, \quad \text{un método cuadrático.}$$

Supongamos también, por simplicidad, que

$$\frac{|e_{n+1}|}{|e_n|} \approx 0.75 \quad \text{y} \quad \frac{|\tilde{e}_{n+1}|}{|\tilde{e}_n|^2} \approx 0.75.$$

Para el esquema de convergencia lineal, esto significa que

$$|e_n| \approx 0.75 |e_{n-1}| \approx (0.75)^2 |e_{n-2}| \approx \dots \approx (0.75)^n |e_0|,$$

mientras que el procedimiento convergente cuadráticamente tiene

$$\begin{aligned} |\tilde{e}_n| &\approx 0.75 |\tilde{e}_{n-1}|^2 \approx (0.75) [(0.75) |\tilde{e}_{n-2}|^2]^2 = (0.75)^3 |\tilde{e}_{n-2}|^4 \\ &\approx (0.75)^3 [(0.75) |\tilde{e}_{n-3}|^2]^4 = (0.75)^7 |\tilde{e}_{n-3}|^8 \approx \dots \approx (0.75)^{2^n - 1} |\tilde{e}_0|^{2^n}. \end{aligned}$$

Para comparar la rapidez de convergencia supondremos que $|e_0| = |\tilde{e}_0| = 0.5$ y usaremos las estimaciones para determinar el valor mínimo de n necesario para obtener un error que no exceda de 10^{-8} . Para el método lineal, esto implica que n debe ser tal que

$$|e_n| = (0.75)^n |e_0| \leq 10^{-8},$$

esto es

$$n \geq \frac{\log_{10} 2 - 8}{\log_{10} 0.75} \approx 62.$$

Para el método de convergencia cuadrática

$$|\tilde{e}_n| = (0.75)^{2^n - 1} |\tilde{e}_0|^{2^n} = (0.75)^{-1} (0.375)^{2^n} \leq 10^{-8},$$

implica que

$$2^n \log_{10} 0.375 \leq \log_{10} 0.75 - 8,$$

y por lo tanto,

$$2^n \geq \frac{\log_{10} 0.75 - 8}{\log_{10} 0.375} \approx 19.1 \quad \Rightarrow \quad n \geq 5.$$

En estas circunstancias, el método convergente cuadráticamente, requiriendo sólo 5 iteraciones es muy superior al lineal requiriendo 62.

2. TECNICAS DE ACELERACION Y FORMULA DE NEWTON GENERALIZADA

Vamos ahora a determinar y caracterizar esquemas de iteración funcional cuadrática.

Teorema X.1

Sea p una solución de $x = g(x)$. Supongamos que $g'(p) = 0$ y g'' es continua en un intervalo abierto que contiene a p . Entonces existe un $\delta > 0$ tal que, para $p_0 \in [p - \delta, p + \delta]$, la sucesión definida por $p_n = g(p_{n-1})$, para toda $n \geq 1$, es convergente cuadráticamente.

Demostración: escogeremos $\delta > 0$ tal que en el intervalo $[p - \delta, p + \delta]$, $|g'(x)| \leq k < 1$ y g'' sea continua. Como $|g'(x)| \leq k < 1$ se sigue que los términos de la sucesión $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ están contenidos en $[p - \delta, p + \delta]$. Desarrollando $g(x)$ en un polinomio de Taylor lineal para $x \in [p - \delta, p + \delta]$ resulta

$$g(x) = g(p) + g'(p)(x - p) + \frac{g''(\xi)}{2} (x - p)^2 ,$$

donde ξ está entre x y p . Usando las hipótesis $g(p) = p$ y $g'(p) = 0$, tenemos que:

$$g(x) = p + \frac{g''(\xi)}{2} (x - p)^2 .$$

En particular, cuando $x = p_n$ para algún n ,

$$p_{n+1} = g(p_n) = p + \frac{g''(\xi_n)}{2} (p_n - p)^2$$

con ξ_n entre p_n y p . Por lo tanto,

$$p_{n+1} - p = e_{n+1} = \frac{g''(\xi_n)}{2} e_n^2 .$$

Como $|g'(x)| \leq k < 1$ en $[p - \delta, p + \delta]$, y g manda $[p - \delta, p + \delta]$ a sí mismo, del Teorema VII.2 tenemos que $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge a p . Como ξ_n está entre p y p_n para cada n , $\{\xi_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge también a p , y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^2} = \frac{|g''(p)|}{2} .$$

Esto implica que la sucesión $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge cuadráticamente. **c.q.d.**

Para usar el Teorema X.1 para resolver una ecuación de la forma $f(x) = 0$, suponemos que la ecuación $f(x) = 0$ tiene una solución p tal que $f'(p) \neq 0$. Consideremos el esquema de punto fijo

$$p_n = g(p_{n-1}) , \quad n \geq 1 ,$$

con g de la forma

$$g(x) = x - \phi(x) f(x) ,$$

donde ϕ es una función arbitraria que se escogerá más adelante.

Si $\phi(x)$ está acotada, entonces $g(p) = p$, y, para que el procedimiento iterativo derivado de g sea cuadráticamente convergente, es suficiente que $g'(p) = 0$. Pero

$$g'(x) = 1 - \phi'(x) f(x) - \phi(x) f'(x) \quad \text{y} \quad g'(p) = 1 - \phi(p) f'(p).$$

Consecuentemente, $g'(p) = 0$ si y sólo si $\phi(p) = \frac{1}{f'(p)}$.

En particular, se obtendrá convergencia cuadrática para el esquema

$$p_n = g(p_{n-1}) = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})},$$

el cual puede reconocerse como el método de Newton.

En la discusión anterior, se impuso la restricción de que $f'(p) \neq 0$, donde p es la solución de $f(x) = 0$. De la definición del método de Newton, es claro que pueden presentarse dificultades si $f'(p_n)$ tiende a cero simultáneamente con $f(p_n)$. En particular, este método y el método de la secante traerán generalmente problemas si $f'(p) = 0$ cuando $f(p) = 0$. Para examinar estas dificultades con más detalle haremos la siguiente definición.

Definición. Se dice que una solución p de $f(x) = 0$ es un **cero de multiplicidad m** de f si $f(x)$ puede escribirse como $f(x) = (x - p)^m q(x)$, para $x \neq p$, donde $\lim_{x \rightarrow p} q(x) \neq 0$.

Esencialmente $q(x)$ representa la porción de $f(x)$ que no contribuye al cero de f . El siguiente resultado da una manera fácil de identificar a los ceros de las funciones que tienen multiplicidad uno. A estos ceros se les llama **simples**.

Teorema X.2

Una función $f \in C^1[a, b]$ tiene un cero simple en p en (a, b) si y sólo si $f(p) = 0$, pero $f'(p) \neq 0$.

El resultado del Teorema X.2 implica que existe un intervalo alrededor de p en el cual el método de Newton converge cuadráticamente a p para cualquier aproximación inicial, siempre y cuando p sea una raíz simple. Un ejemplo que muestra que no necesariamente hay convergencia cuadrática si la raíz no es simple es el caso de la función $f(x) = e^x - x - 1$ que tiene una raíz de multiplicidad dos en $p = 0$.

Los términos generados por el método de Newton aplicado a f con $p_0 = 1$ se muestran en la tabla siguiente. Está claro que la sucesión no converge cuadráticamente a cero.

Tabla 1

n	p_n	n	p_n
0	1.0	9	2.7750×10^{-3}
1	0.58198	10	1.3881×10^{-3}
2	0.31906	11	6.9424×10^{-4}
3	0.16800	12	3.4716×10^{-4}
4	0.08635	13	1.7358×10^{-4}
5	0.04380	14	8.6773×10^{-5}
6	0.02206	15	4.3329×10^{-5}
7	0.01107	16	2.1635×10^{-5}
8	0.005545		

Una manera de *atacar* el problema de raíces múltiples consiste en definir una función $\mu(x)$ por

$$\mu(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Si p es una raíz de multiplicidad $m \geq 1$, y $f(x) = (x - p)^m q(x)$, entonces

$$\mu(x) = \frac{(x - p)^m q(x)}{m (x - p)^{m-1} q(x) + (x - p)^m q'(x)} = \frac{(x - p) q(x)}{m q(x) + (x - p) q'(x)}$$

tendrá también una raíz en p , pero de multiplicidad uno. El método de Newton puede entonces aplicarse a la función μ para dar

$$g(x) = x - \frac{\mu(x)}{\mu'(x)} = x - \frac{f(x)/f'(x)}{\{[f'(x)]^2 - f(x) f''(x)\}/[f'(x)]^2}$$

o

$$g(x) = x - \frac{f(x) f'(x)}{[f'(x)]^2 - f(x) f''(x)}. \quad (X.1)$$

La fórmula (X.1) se conoce como **fórmula de Newton generalizada** para raíces múltiples.

Si g cumple con las condiciones de continuidad requeridas, la iteración funcional aplicada a g tendrá convergencia cuadrática independientemente de la multiplicidad de la raíz. Teóricamente, las únicas desventajas de este método son los cálculos adicionales de $f''(x)$ y el hecho de que el procedimiento es más laborioso para calcular las iteraciones. En la práctica, sin embargo, la presencia de una raíz múltiple puede causar serios problemas de redondeo.

Ejemplo. En un ejemplo del capítulo XVI resolvimos $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ para la raíz $p = 1.365230013$. Para comparar la convergencia del método de Newton y el método de Newton generalizado, ecuación (X.1), para una raíz de multiplicidad uno, sea (i):

$$p_n = p_{n-1} - \frac{p_{n-1}^3 + 4 p_{n-1}^2 - 10}{3 p_{n-1}^2 + 8 p_{n-1}}, \quad \text{del método de Newton}$$

y, de la ecuación (X.1), (ii):

$$p_n = p_{n-1} - \frac{(p_{n-1}^3 + 4 p_{n-1}^2 - 10) (3 p_{n-1}^2 + 8 p_{n-1})}{(3 p_{n-1}^2 + 8 p_{n-1})^2 - (p_{n-1}^3 + 4 p_{n-1}^2 - 10) (6 p_{n-1} + 8)}.$$

Con $p_0 = 1.5$, las primeras iteraciones para (i) y (ii) son las siguientes.

Tabla 2

	(i)	(ii)
p_1	1.373333333	1.356898976
p_2	1.365262015	1.365195849
p_3	1.365230014	1.365230013
p_4	1.365230013	1.365230013

Ejemplo. Para ilustrar la situación que se presenta en una raíz múltiple, consideremos la ecuación $f(x) = x^4 - 4x^2 + 4 = 0$, que tiene una raíz de multiplicidad dos en $x = \sqrt{2} = 1.414213562$. Usar el método de Newton y la versión modificada (X.1) produce, después de algunas simplificaciones, las sucesiones con términos (i):

$$p_n = p_{n-1} - \frac{p_{n-1}^2 - 2}{4 p_{n-1}}, \quad \text{del método de Newton}$$

y, (ii):

$$p_n = p_{n-1} - \frac{(p_{n-1}^2 - 2) p_{n-1}}{(p_{n-1}^2 + 2)}, \quad \text{de la ecuación (X.1).}$$

Con $p_0 = 1.5$, las tres primeras iteraciones para (i) y (ii) nos dan lo siguiente:

Tabla 3

	(i)	(ii)
p_1	1.458333333	1.411764706
p_2	1.436607143	1.414211438
p_3	1.425497619	1.414213562

La solución real correcta en 10^{-9} es la que aparece para p_3 en (ii). Para obtener esta precisión con el método normal de Newton-Raphson se requerirían 20 iteraciones.

3. CONVERGENCIA ACELERADA Y EL ALGORITMO Δ^2 DE AITKEN

En este apartado consideraremos una técnica, llamada **método Δ^2 de Aitken**, que se usa para acelerar la convergencia de cualquier sucesión que converja linealmente, independientemente de su origen.

Supongamos que $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión linealmente convergente con límite p ; o sea que, para $e_n = p_n - p$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|} = \lambda \quad \text{y} \quad 0 < \lambda < 1.$$

Para investigar la construcción de una sucesión $\{\hat{p}_n\}_{n=0}^{\infty}$ que converja más rápidamente a p , supongamos que n es lo suficientemente grande para que el cociente pueda usarse para aproximar el límite. Si suponemos también que todas las e_n tienen el mismo signo, entonces

$$e_{n+1} \approx \lambda e_n \quad \text{y} \quad e_{n+2} \approx \lambda e_{n+1}.$$

Así que

$$p_{n+2} = e_{n+2} + p \approx \lambda e_{n+1} + p$$

ó

$$p_{n+2} \approx \lambda (p_{n+1} - p) + p \quad \text{o sea} \quad \lambda = \frac{p_{n+2} - p}{p_{n+1} - p}. \quad (\text{X.2a, b}).$$

Reemplazando $(n+1)$ por n en las ecuaciones (X.2) da

$$p_{n+1} \approx \lambda (p_n - p) + p \quad \text{o sea} \quad \lambda = \frac{p_{n+1} - p}{p_n - p}; \quad (\text{X.3a, b})$$

y resolviendo las ecuaciones (X.2) y (X.3) para p mientras se elimina λ nos lleva a que

$$\begin{aligned}
 p &\approx \frac{p_{n+2} p_n - p_{n+1}^2}{p_{n+2} - 2 p_{n+1} + p_n} \approx \\
 &\approx \frac{p_n^2 + p_n p_{n+2} + 2 p_n p_{n+1} - 2 p_n p_{n+1} - p_n^2 - p_{n+1}^2}{p_{n+2} - 2 p_{n+1} + p_n} \approx \\
 &\approx \frac{(p_n^2 + p_n p_{n+2} - 2 p_n p_{n+1}) - (p_n^2 - 2 p_n p_{n+1} + p_{n+1}^2)}{p_{n+2} - 2 p_{n+1} + p_n} \approx \\
 &\approx p_n - \frac{(p_{n+1} - p_n)^2}{p_{n+2} - 2 p_{n+1} + p_n} .
 \end{aligned}$$

El método Δ^2 de Aitken está basado en la suposición de que la sucesión $\{\hat{p}_n\}_{n=0}^\infty$ definida por

$$\hat{p}_n = p_n - \frac{(p_{n+1} - p_n)^2}{p_{n+2} - 2 p_{n+1} + p_n} , \quad (X.4)$$

converge más rápidamente a p que la sucesión original $\{p_n\}_{n=0}^\infty$.

Ejemplo. La sucesión $\{p_n\}_{n=1}^\infty$, donde $p_n = \cos(\frac{1}{n})$, converge linealmente a $p = 1$. Los primeros términos de la sucesión $\{p_n\}_{n=1}^\infty$ y $\{\hat{p}_n\}_{n=1}^\infty$ están dados en la siguiente tabla.

Tabla 4

n	p_n	\hat{p}_n
1	0.54030	0.96178
2	0.87758	0.98213
3	0.94496	0.98979
4	0.96891	0.99342
5	0.98007	0.99541
6	0.98614	
7	0.98981	

Es evidente que $\{\hat{p}_n\}_{n=0}^\infty$ converge más rápidamente a p que $\{p_n\}_{n=0}^\infty$.

La notación Δ asociada con esta técnica tiene su origen en la siguiente **definición**: Dada la sucesión $\{p_n\}_{n=0}^\infty$, se define la **diferencia progresiva** Δp_n mediante

$$\Delta p_n = p_{n+1} - p_n \quad \text{para } n \geq 0 .$$

Las potencias mayores $\Delta^k p_n$ se definen recursivamente mediante

$$\Delta^k p_n = \Delta^{k-1}(\Delta p_n) \quad \text{para } k \geq 2 .$$

Debido a la definición,

$$\begin{aligned}
 \Delta^2 p_n &= \Delta(p_{n+1} - p_n) = \\
 &= \Delta p_{n+1} - \Delta p_n = \\
 &= (p_{n+2} - p_{n+1}) - (p_{n+1} - p_n) = \\
 &= p_{n+2} - 2 p_{n+1} + p_n .
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la fórmula para \hat{p}_n dada en (X.4) se puede escribir como

$$\hat{p}_n = p_n - \frac{(\Delta p_n)^2}{\Delta^2 p_n} \quad \text{para toda } n \geq 0. \quad (\text{X.5})$$

Para ilustrar el método Δ^2 de Aitken de otra manera, supongamos que la sucesión $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge al límite p como una sucesión geométrica decreciente con factor k :

$$p_{n+1} - p = k(p_n - p), \quad |k| < 1 \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Entonces, k y p pueden ser obtenidos a partir de p_n , p_{n+1} y p_{n+2} usando las ecuaciones

$$\begin{aligned} p_{n+1} - p &= k(p_n - p), \\ p_{n+2} - p &= k(p_{n+1} - p). \end{aligned}$$

Haciendo la resta de estas ecuaciones:

$$k = \frac{p_{n+2} - p_{n+1}}{p_{n+1} - p_n},$$

y sustituyendo en la primera ecuación, dado que $k \neq 1$:

$$p = \frac{k p_n - p_{n+1}}{k - 1} = \frac{p_n p_{n+2} - p_{n+1}^2}{p_{n+2} - 2 p_{n+1} + p_n},$$

que es la misma ecuación (X.4).

Hasta ahora, en nuestra discusión del método Δ^2 de Aitken, hemos dicho que la sucesión $\{\hat{p}_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge más rápidamente a p que la sucesión original $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$, pero no hemos dicho qué se entiende por *convergencia más rápida*. Los siguientes Teoremas explican esta terminología.

Teorema X.3

Sea $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ cualquier sucesión que converja linealmente a un límite p con $e_n = p_n - p \neq 0$ para toda $n \geq 0$. Entonces la sucesión $\{\hat{p}_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge a p más rápidamente que $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ en el sentido de que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\hat{p}_n - p}{p_n - p} = 0.$$

Demostración: si la sucesión converge linealmente a p con $e_n = p_n - p \neq 0$, $\forall n \geq 0$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|} = \lambda$. Supongamos que n es lo suficientemente grande para que el cociente pueda usarse para aproximar el límite y que toda las e_n tienen el mismo signo, entonces $e_{n+1} \approx \lambda e_n$. Ahora calculamos el cociente:

$$\begin{aligned} \frac{\hat{p}_n - p}{p_n - p} &= \frac{p_n - \frac{(p_{n+1} - p_n)^2}{p_{n+2} - 2 p_{n+1} + p_n} - p}{p_n - p} = \frac{e_n - \frac{(p_{n+1} - p_n)^2}{p_{n+2} - 2 p_{n+1} + p_n}}{e_n} \\ &= 1 - \frac{1}{e_n} \frac{(p_{n+1} - p_n + p - p)^2}{p_{n+2} - 2 p_{n+1} + p_n + 2 p - 2 p} = 1 - \frac{(e_{n+1}/e_n)^2 - 2 e_{n+1}/e_n + 1}{e_{n+2}/e_n - 2 e_{n+1}/e_n + 1}. \end{aligned}$$

Pasando al límite para $n \rightarrow \infty$ obtenemos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\hat{p}_n - p}{p_n - p} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 - \frac{\lambda^2 - 2\lambda + 1}{\lambda^2 - 2\lambda + 1} \right] = 1 - 1 = 0 .$$

c.q.d.

Teorema X.4

Sea $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ cualquier sucesión que se comporte asintóticamente como una sucesión geométrica, es decir existe k , $|k| < 1$, tal que

$$p_{n+1} - p = (k + \delta_n) (p_n - p), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0 .$$

Entonces la sucesión $\{\hat{p}_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge a p más rápidamente que $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ en el sentido de que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\hat{p}_n - p}{p_n - p} = 0 .$$

Demostración: por hipótesis el error $e_n = p_n - p$ satisface $e_{n+1} = (k + \delta_n) e_n$. Entonces:

$$\begin{aligned} p_{n+2} - 2p_{n+1} + p_n &= e_{n+2} - 2e_{n+1} + e_n = \\ &= e_n [(k + \delta_{n+1})(k + \delta_n) - 2(k + \delta_n) + 1] = \\ &= e_n ((k - 1)^2 + \mu_n) \quad \text{con } \mu_n \rightarrow 0 , \end{aligned}$$

y

$$p_{n+1} - p_n = e_{n+1} - e_n = e_n [(k - 1) + \delta_n] .$$

Desde luego, $p_{n+2} - 2p_{n+1} + p_n \neq 0$ para grandes valores de n , dado que $e_n \neq 0$, $k \neq 1$ y $\mu_n \rightarrow 0$. Entonces la sucesión $\{\hat{p}_n\}_{n=0}^{\infty}$ definida en (X.4) está bien definida. Además,

$$\hat{p}_n - p = p_n - p - \frac{(p_{n+1} - p_n)^2}{p_{n+2} - 2p_{n+1} + p_n} = e_n - e_n \frac{[(k - 1) + \delta_n]^2}{(k - 1)^2 + \mu_n}$$

para valores grandes de n , y entonces (dado que $\delta_n \rightarrow 0$ y $\mu_n \rightarrow 0$ para $n \rightarrow \infty$):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\hat{p}_n - p}{p_n - p} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 1 - \frac{[(k - 1) + \delta_n]^2}{(k - 1)^2 + \mu_n} \right\} = 0 .$$

c.q.d.

Algoritmo Δ^2 de Aitken.

=====
Para encontrar una solución de $p = g(p)$, dada una aproximación inicial p_0 :

Entrada: aproximación inicial p_0 ; tolerancia TOL ; número máximo de iteraciones N_0 ;

Salida: solución aproximada p o mensaje de fracaso.

Paso 1: tomar $i = 1$, y calcular $p_1 = g(p_0)$;

Paso 2: mientras que $i \leq N_0$ seguir pasos 3–6;

Paso 3: tomar:

$$p_2 = g(p_1); \text{ (calcular } p_{1+i});$$

$$p = p_0 - \frac{(p_1 - p_0)^2}{(p_2 - 2p_1 + p_0)}; \text{ (calcular } \hat{p}_{i-1});$$

Paso 4: si $|p - p_2| < TOL$ entonces SALIDA (p); (procedimiento completado satisfactoriamente) PARAR;

Paso 5: tomar $i = i + 1$

Paso 6: tomar

$$p_0 = p_1; \text{ (redefinir } p_0);$$

$$p_1 = p_2; \text{ (redefinir } p_1);$$

Paso 7: SALIDA ('El método fracasó después de N_0 iteraciones, $N_0 = \dots, N_0$); (procedimiento completado sin éxito); PARAR.

4. CONVERGENCIA ACELERADA Y EL ALGORITMO DE STEFFERSEN

Aplicando el método Δ^2 de Aitken a una sucesión que converge linealmente obtenida de la iteración de punto fijo, podemos acelerar la convergencia a cuadrática. Este procedimiento es conocido como el **método de Steffersen** y difiere un poco de aplicar el método Δ^2 de Aitken directamente a una sucesión de iteración de punto fijo que sea linealmente convergente. El procedimiento directo construiría en orden

$$p_0, p_1 = g(p_0), p_2 = g(p_1), \quad \rightarrow \quad \hat{p}_0 = \{\Delta^2\}p_0,$$

$$p_3 = g(p_2), \quad \rightarrow \quad \hat{p}_1 = \{\Delta^2\}p_1, \dots,$$

donde $\{\Delta^2\}$ se usa para indicar que se emplea la técnica Δ^2 de Aitken.

El método de Steffersen construye los mismos primeros cuatro términos p_0, p_1, p_2, \hat{p}_0 ; sin embargo, en el siguiente paso, supone que \hat{p}_0 es una mejor aproximación a p que p_2 y aplica iteración de punto fijo a \hat{p}_0 en lugar de a p_2 . Cada tercer término es generado usando la técnica Δ^2 de Aitken; para los otros, se usa la iteración de punto fijo en el término anterior. La sucesión generada es entonces:

$$p_0, p_1 = g(p_0), p_2 = g(p_1), \quad \rightarrow \quad \hat{p}_0 = \{\Delta^2\}p_0,$$

$$p_3 = \hat{p}_0, p_4 = g(p_3), p_5 = g(p_4), \quad \rightarrow \quad \hat{p}_1 = \{\Delta^2\}p_3, \dots$$

Es decir, usando una nueva notación útil para el algoritmo empezando con la aproximación inicial $p_0 \equiv p_0^{(0)}$ tendremos

$$p_0^{(0)}, p_1^{(0)} = g(p_0^{(0)}), p_2^{(0)} = g(p_1^{(0)}), \quad \rightarrow \quad p_0^{(1)} = \{\Delta^2\}p_0^{(0)},$$

$$p_1^{(1)} = g(p_0^{(1)}), p_2^{(1)} = g(p_1^{(1)}), \quad \rightarrow \quad p_0^{(2)} = \{\Delta^2\}p_0^{(1)},$$

$$p_1^{(2)} = g(p_0^{(2)}), p_2^{(2)} = g(p_1^{(2)}), \quad \rightarrow \quad p_0^{(3)} = \{\Delta^2\}p_0^{(2)},$$

⋮

Algoritmo de Steffersen.

=====
 Para encontrar una solución de $p = g(p)$, dada una aproximación inicial p_0 :

Entrada: aproximación inicial p_0 ; tolerancia TOL ; número máximo de iteraciones N_0 ;

Salida: solución aproximada p o mensaje de fracaso.

Paso 1: tomar $i = 1$;

Paso 2: mientras que $i \leq N_0$ seguir pasos 3–6;

Paso 3: tomar:

$$p_1 = g(p_0); \text{ (calcular } p_1^{(i-1)});$$

$$p_2 = g(p_1); \text{ (calcular } p_2^{(i-1)});$$

$$p = p_0 - \frac{(p_1 - p_0)^2}{(p_2 - 2p_1 + p_0)}; \text{ (calcular } p_0^{(i)});$$

Paso 4: si $|p - p_2| < TOL$ entonces SALIDA (p); (*procedimiento completado satisfactoriamente*) PARAR;

Paso 5: tomar $i = i + 1$

Paso 6: tomar $p_0 = p$; (*redefinir* p_0);

Paso 7: SALIDA (*'El método fracasó después de N_0 iteraciones, $N_0 = \dots, N_0$*); (*procedimiento completado sin éxito*); PARAR.

=====

Nótese que $\Delta^2 p_n$ puede ser cero. Si esto sucediera, terminaríamos la sucesión y seleccionaríamos $p_2^{(n-1)}$ como la respuesta aproximada, ya que de otra manera esto introduciría un cero en el denominador de la siguiente iteración.

En el ejemplo siguiente, veremos que el método de Steffersen da convergencia cuadrática sin el inconveniente de tener que evaluar derivadas, como con el método de Newton-Raphson. De hecho es posible demostrar el siguiente teorema.

Teorema X.5

Supongamos que $x = g(x)$ tiene la solución p con $g'(p) \neq 1$. Si existe $\delta > 0$ tal que $g \in C^3[p - \delta, p + \delta]$, entonces el método de Steffersen da convergencia cuadrática para cualquier $p_0 \in [p - \delta, p + \delta]$.

La debilidad del método de Steffersen reside en la necesidad de que $g'(p) \neq 1$, condición que es equivalente a requerir que la multiplicidad del cero p sea uno, para el problema correspondiente de búsqueda de la raíz de $f(x) = 0$. Como consecuencia de esto, no se puede esperar que el método de Steffersen acelere a cuadrática la convergencia lineal que resulta generalmente cuando el método de Newton se usa para aproximar un cero de multiplicidad mayor que uno.

Ejemplo. Queremos resolver $f(x) = x^2 - \cos x = 0$ usando el método de Steffersen, y comparar con el método Δ^2 de Aitken y con el de Newton-Raphson. Entonces, escribimos

$$x = g(x) = \sqrt{\cos x}, \quad \text{para los métodos de Aitken y de Steffersen,}$$

$$p_{n+1} = p_n - \frac{p_n^2 - \cos p_n}{2 p_n + \sin p_n}, \quad \text{para las iteraciones de Newton - Raphson.}$$

Usando $p_0 = 1.0$, la iteración funcional, el método Δ^2 de Aitken, el algoritmo de Steffersen y el de Newton-Raphson dan los resultados de la tabla siguiente:

Tabla 5

k	Punto fijo	Aitken	Steffersen	Newton
0	1.0	0.820545868	0.820545868	1.0
1	0.735052587	0.823387630	0.824131023	0.838218410
2	0.861275501	0.823989495	0.824132312	0.824241868
3	0.807137107	0.824103654	0.824132312	0.824132319
4	0.831606374	0.824126663		0.824132312
5	0.820785901	0.824131189		0.824132312
6	0.825618791	0.824132090		
7	0.823469674	0.824132268		
8	0.824427236	0.824132304		
9	0.824000957	0.824132311		
10	0.824190798	0.824132312		
11	0.824106268	0.824132312		
15	0.824131288			
20	0.824132330			
25	0.824132312			

CAPITULO XI. METODOS DE INTERPOLACION

1. EL METODO DE INTERPOLACION DE LA POSICION FALSA

Los métodos de interpolación que vamos a discutir en el resto de este capítulo son muy útiles para determinar los ceros de una función real $f(x)$ cualquiera. A diferencia del método de Newton, en los métodos de interpolación que veremos no se necesita calcular la derivada de f , y además convergen más rápidamente.

El método de interpolación más simple es el conocido como **regula falsi** o método de **la falsa posición**. Es muy parecido al método de bisección en el cual dos números p_n y a_n se obtienen en cada paso de forma que $f(p_n) \cdot f(a_n) < 0$. El intervalo $[p_n, a_n]$ contiene entonces al menos un cero de $f(x)$, y los valores p_n vienen determinados en manera que converjan hacia uno de estos ceros.

En el método de interpolación de la posición falsa, para definir los valores p_{n+1} , a_{n+1} , se considera μ_n el cero de la función interpolante lineal:

$$P(x) = f(p_n) + (x - p_n) \frac{f(p_n) - f(a_n)}{p_n - a_n}$$

donde $P(p_n) = f(p_n)$ y $P(a_n) = f(a_n)$, es decir

$$\mu_n = p_n - f(p_n) \frac{p_n - a_n}{f(p_n) - f(a_n)} = \frac{a_n f(p_n) - p_n f(a_n)}{f(p_n) - f(a_n)}. \quad (XI.1a)$$

Por el hecho de que $f(p_n) \cdot f(a_n) < 0$, tenemos que $f(p_n) - f(a_n) \neq 0$; entonces μ_n está siempre bien definido y satisface ó $p_n < \mu_n < a_n$ ó $a_n < \mu_n < p_n$. A menos que $f(\mu_n) = 0$, definimos:

$$\begin{cases} p_{n+1} = \mu_n & \text{y} & a_{n+1} = a_n, & \text{si} & f(\mu_n) \cdot f(p_n) > 0, \\ p_{n+1} = \mu_n & \text{y} & a_{n+1} = p_n, & \text{si} & f(\mu_n) \cdot f(p_n) < 0. \end{cases} \quad (XI.1b, c)$$

El algoritmo termina si $f(\mu_n) = 0$, es decir si μ_n es el cero.

Para discutir la convergencia del método de la falsa posición, asumiremos por simplicidad que f'' existe y que para algun valor i :

$$p_i < a_i, \quad (XI.2a)$$

$$f(p_i) < 0, \quad f(a_i) > 0, \quad (XI.2b)$$

$$f''(x) \geq 0, \quad \forall x \in [p_i, a_i], \quad (XI.2c)$$

Con estas hipótesis ó $f(\mu_i) = 0$ ó

$$f(\mu_i) \cdot f(p_i) > 0$$

y entonces $p_i < p_{i+1} = \mu_i < a_{i+1} = a_i$ (ver figuras 1 y 2).

Es ahora fácil ver que las fórmulas (XI.2) son válidas para todo $i \geq i_0$ si son válidas para un i_0 . Entonces, $a_i = a$ para $i \geq i_0$, y las p_i forman una secuencia monótona acotada creciente, y el límite $\lim_{i \rightarrow \infty} p_i = \bar{p}$ existe. Por el hecho de que f es continua, y por (XI.2) se sigue que

$$f(a) > 0, \quad f(\bar{p}) \leq 0.$$

Además, pasando al límite en (XI.1)

$$\bar{p} = \frac{a f(\bar{p}) - \bar{p} f(a)}{f(\bar{p}) - f(a)} \Rightarrow (\bar{p} - a) f(\bar{p}) = 0.$$

Pero $\bar{p} \neq a$, y entonces $f(\bar{p}) = 0$.

Figura 1

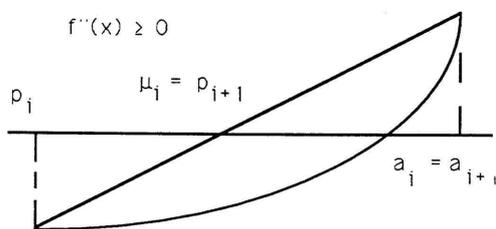
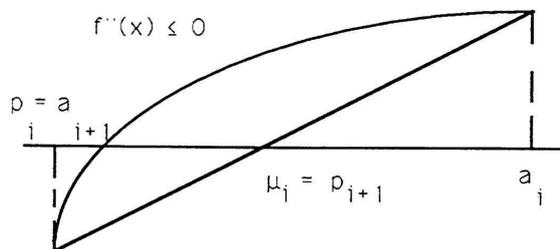


Figura 2



Está claro que bajo las hipótesis (XI.2), la regla falsi, usará sólo las primeras dos fórmulas de recursión (XI.1b). Nótese que este caso se reduce al método de la secante presentado en el Capítulo XVII, en el cual el extremo fijo es aquél para el cual el signo de la función $f(x)$ coincide con el signo de su segunda derivada $f''(x)$.

La variación del método de la falsa posición, basada exclusivamente en la segundas dos fórmulas de recursión (XI.1c)

$$p_{n+1} = \frac{p_{n-1} f(p_n) - p_n f(p_{n-1})}{f(p_n) - f(p_{n-1})}$$

no es nada más que el método de la secante modificado que hemos encontrado en el Capítulo IX.

Ejemplo. Consideramos el polinomio $P(x) = -x^3 + 6x^2 + 4x - 24$. En el intervalo $[0, 3]$, donde hay un cero, no se puede usar el método de la secante, pero si el de la secante modificada y el de la regla falsi. Los resultados están resumidos en la siguientes tablas, respectivamente.

$p_0 = 3.0$	$f(p_0) = 15.0$	$p_1 = 0.0$	$f(p_1) = -24.0$
i	p_i		$f(p_i)$
2	1.846153846		-2.457897135
3	2.056795132		0.90853891
4	1.99994694		-8.4896×10^{-4}
5	2.0000000011		1.76×10^{-7}
6	2.0		0.0

$p_1 = 0$	$f(p_1) = -24.0$	$a_1 = 3.0$	$f(a_1) = 15.0$
i	μ_i		$f(\mu_i)$
1	1.846153846		-2.457897135
2	2.008603833		0.137660691
3	1.999987967		-1.92528×10^{-4}
4	2.0		0.0

2. EL METODO DE INTERPOLACION DE MÜLLER

Estudiaremos ahora un método presentado por primera vez por D.E. Müller en 1956. Esta técnica puede ser usada en cualquier problema de búsqueda de raíces, pero es particularmente útil para aproximar raíces de polinomios.

El método de Müller es una generalización del método de la secante. El método de la secante modificado empieza con dos aproximaciones iniciales x_0 y x_1 y determina la siguiente aproximación x_2 como la intersección del eje x con la recta que pasa por $(x_0, f(x_0))$ y $(x_1, f(x_1))$. El método de Müller usa tres aproximaciones iniciales x_0 , x_1 y x_2 y determina la siguiente aproximación x_3 considerando la intersección del eje x con la parábola que pasa por $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$ y $(x_2, f(x_2))$.

La derivación del procedimiento de Müller comienza considerando el polinomio cuadrático

$$P(x) = a (x - x_2)^2 + b (x - x_2) + c$$

que pasa por $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$ y $(x_2, f(x_2))$. Las constantes a , b y c pueden determinarse de las condiciones

$$\begin{aligned} f(x_0) &= P(x_0) = a (x_0 - x_2)^2 + b (x_0 - x_2) + c , \\ f(x_1) &= P(x_1) = a (x_1 - x_2)^2 + b (x_1 - x_2) + c , \\ f(x_2) &= P(x_2) = c ; \end{aligned}$$

las cuales nos dan

$$\begin{aligned} c &= f(x_2) , \\ b &= \frac{(x_0 - x_2)^2 [f(x_1) - f(x_2)] - (x_1 - x_2)^2 [f(x_0) - f(x_2)]}{(x_0 - x_2) (x_1 - x_2) (x_0 - x_1)} , \\ a &= \frac{(x_1 - x_2) [f(x_0) - f(x_2)] - (x_0 - x_2) [f(x_1) - f(x_2)]}{(x_0 - x_2) (x_1 - x_2) (x_0 - x_1)} . \end{aligned} \tag{XI.3}$$

Para determinar x_3 , la raíz de P , aplicamos la fórmula cuadrática a P . Debido a problemas del error de redondeo causados por la sustracción de números casi iguales, se aplica la fórmula

$$x_3 - x_2 = \frac{-2 c}{b \pm \sqrt{b^2 - 4 a c}} .$$

Esto da dos posibilidades para x_3 dependiendo del signo que precede al término bajo radical. En el método de Müller, el signo se elije para que coincida con el de b . Escogido

de esta manera, el denominador será el más grande en magnitud y resultará en seleccionar a x_3 como la raíz de P más cercana a x_2 . Así,

$$x_3 = x_2 - \frac{2c}{b + \text{signo}(b)\sqrt{b^2 - 4ac}}$$

donde a , b y c están dadas en (XI.3). Una vez que se determina x_3 , el procedimiento se reinicializa usando x_1 , x_2 y x_3 en lugar de x_0 , x_1 y x_2 para determinar la siguiente aproximación x_4 . El método continúa hasta que se obtiene una conclusión satisfactoria. Ya que el método involucra en cada paso el radical $\sqrt{b^2 - 4ac}$, el método aproximará raíces complejas cuando sea apropiado.

Algoritmo de Müller.

=====

Para encontrar una solución a $f(x) = 0$ dadas tres aproximaciones x_0 , x_1 y x_2 :

Entrada: aproximaciones iniciales x_0 , x_1 y x_2 ; tolerancia TOL; número máximo de iteraciones N_0 ;

Salida: solución aproximada de p ó mensaje de fracaso.

Paso 1: tomar

$$\begin{aligned} h_1 &= x_1 - x_0; h_2 = x_2 - x_1; \\ \delta_1 &= [f(x_1) - f(x_0)]/h_1; \delta_2 = [f(x_2) - f(x_1)]/h_2; \\ a &= (\delta_2 - \delta_1)/(h_2 + h_1); \\ i &= 2; \end{aligned}$$

Paso 2: mientras que $i \leq N_0$ seguir pasos 3–7;

Paso 3: tomar:

$$\begin{aligned} b &= \delta_2 + h_2 a; \\ D &= \sqrt{b^2 - 4f(x_2)a}; \end{aligned}$$

Paso 4: si $|b - D| < |b + D|$ entonces tomar $E = b + D$, si no tomar $E = b - D$;

Paso 5: tomar:

$$\begin{aligned} h &= -2f(x_2)/E; \\ p &= x_2 + h; \end{aligned}$$

Paso 6: si $|h| < TOL$ entonces SALIDA (p); (*procedimiento completado satisfactoriamente*) PARAR;

Paso 7: tomar (*preparar para la siguiente iteración*):

$$\begin{aligned} x_0 &= x_1; x_1 = x_2; x_2 = p; \\ h_1 &= x_1 - x_0; h_2 = x_2 - x_1; \\ \delta_1 &= [f(x_1) - f(x_0)]/h_1; \delta_2 = [f(x_2) - f(x_1)]/h_2; \\ a &= (\delta_2 - \delta_1)/(h_2 + h_1); \\ i &= i + 1; \end{aligned}$$

Paso 8: SALIDA (*'El método fracasó después de N_0 iteraciones, $N_0 = \dots, N_0$*); PARAR.

=====

Ejemplo. Consideramos el polinomio $P(x) = 16x^4 - 40x^3 + 5x^2 + 20x + 6$. Usando el algoritmo de Müller con $TOL = 10^{-5}$ y diferentes valores de x_0 , x_1 y x_2 , tenemos los resultados que se muestran en la tabla siguiente. Los valores reales de las raíces de la

ecuación son 1.241677445 , 1.970446079 y $-0.356062 \pm 0.162758 i$, lo que demuestra que las aproximaciones del método de Müller son excelentes.

$x_0 = 0.5$	$x_1 = -0.5$	$x_2 = 0.0$	
i	x_i		$f(x_i)$
3	$-0.555556 + 0.598352 i$		$-29.4007 - 3.89872 i$
4	$-0.435450 + 0.102101 i$		$1.33223 - 1.19309 i$
5	$-0.390631 + 0.141852 i$		$0.375057 - 0.670164 i$
6	$-0.357699 + 0.169926 i$		$-0.146746 - 0.00744629 i$
7	$-0.356051 + 0.162856 i$		$-0.183868 \times 10^{-2} + 0.539780 \times 10^{-3} i$
8	$-0.356062 + 0.162758 i$		$0.286102 \times 10^{-2} + 0.953674 \times 10^{-6} i$

$x_0 = 0.5$	$x_1 = 1.0$	$x_2 = 1.5$	
i	x_i		$f(x_i)$
3	1.287855		-1.376275
4	1.237459		1.269422×10^{-1}
5	1.241604		2.194520×10^{-3}
6	1.241677		1.321123×10^{-6}
7	1.241677		1.321123×10^{-6}

$x_0 = 2.5$	$x_1 = 2.0$	$x_2 = 2.25$	
i	x_i		$f(x_i)$
3	1.960592		-6.113129×10^{-1}
4	1.970564		7.456961×10^{-3}
5	1.970447		3.133506×10^{-5}
6	1.970447		2.720395×10^{-6}

Este ejemplo ilustra que el método de Müller puede aproximar las raíces del polinomio con una variedad de valores iniciales. De hecho, la importancia del método de Müller reside en que esta técnica generalmente convergerá a la raíz del polinomio para cualquier elección de las aproximaciones iniciales. Se pueden construir problemas en los que no habrá convergencia para ciertas aproximaciones iniciales. Por ejemplo, si x_i , x_{i+1} y x_{i+2} para alguna i tienen la propiedad de que $f(x_i) = f(x_{i+1}) = f(x_{i+2})$, la ecuación cuadrática se reducirá a una función constante no cero y nunca cruzará al eje x ; sin embargo, éste no es usualmente el caso.

El método de Müller no es tan eficiente como el método de Newton: su orden de convergencia cerca de una raíz es aproximadamente $\alpha = 1.84$ comparado con el cuadrático, $\alpha = 2$, del método de Newton, pero es mejor que el método de la secante, cuyo orden es aproximadamente $\alpha = 1.62$.

CAPITULO XII. CEROS DE POLINOMIOS

1. EL METODO DE HORNER

Una función de la forma

$$P(x) = a_0 x^N + a_1 x^{N-1} + \dots + a_{N-1} x + a_N , \quad (XII.1)$$

donde las a_i , llamadas los **coeficientes** de P , son constantes y $a_0 \neq 0$, se llama un **polinomio de grado N** . La función cero, $P(x) = 0$ para todos los valores de x , se considera un polinomio pero no se le asigna ningún grado.

Teorema XII.1 (Teorema Fundamental del Algebra)

Si P es un polinomio de grado $N \geq 1$, entonces $P(x) = 0$ tiene al menos una raíz (posiblemente compleja).

Corolario XII.2

Si $P(x) = a_0 x^N + a_1 x^{N-1} + \dots + a_{N-1} x + a_N$ es un polinomio de grado $N \geq 1$, entonces existen constantes únicas x_1, x_2, \dots, x_k , posiblemente complejas, y enteros positivos, m_1, m_2, \dots, m_k tales que $\sum_{i=1}^k m_i = N$ y

$$P(x) = a_0 (x - x_1)^{m_1} (x - x_2)^{m_2} \dots (x - x_k)^{m_k} . \quad (XII.2)$$

El Corolario XII.2 afirma que los ceros de un polinomio son únicos y que si cada cero x_i es contado tantas veces como su multiplicidad m_i , entonces un polinomio de grado N tiene exactamente N ceros.

Corolario XII.3

Sean P y Q polinomios a lo sumo de grado N . Si $x_1, x_2, \dots, x_k, k > N$, son números distintos con $P(x_i) = Q(x_i)$ para $i = 1, 2, \dots, k$, entonces $P(x) = Q(x)$ para todo valor de x .

Para usar el procedimiento de Newton-Raphson en localizar aproximadamente los ceros de un polinomio P , es necesario evaluar a P y a su derivada en valores específicos. Como P y sus derivadas son polinomios, la eficiencia computacional requerirá que la evaluación de estas funciones sea hecha de manera anidada. El método de Horner descrito en el siguiente Teorema incorpora esta técnica y como consecuencia requiere solamente de N multiplicaciones y N sumas para evaluar un polinomio de enésimo grado arbitrario.

Teorema XII.4 (Método de Horner)

Sea

$$P(x) = a_0 x^N + a_1 x^{N-1} + \dots + a_{N-1} x + a_N .$$

Si

$$d_0 = a_0 \quad \text{y} \quad d_k = a_k + d_{k-1} x_0 , \quad (XII.3)$$

para $k = 1, 2, \dots, N - 1, N$, entonces

$$d_N = P(x_0) . \quad (XII.4)$$

Además, si

$$Q(x) = d_0 x^{N-1} + d_1 x^{N-2} + \dots + d_{N-2} x + d_{N-1} , \quad (XII.5)$$

entonces

$$P(x) = (x - x_0) Q(x) + d_N . \quad (XII.6)$$

Demostración: la primera parte de la demostración es obvia, debido a la definición de los coeficientes d_k (basta sólo escribir el polinomio en forma *anidada*).

Veamos ahora la segunda parte. Por la definición de $Q(x)$:

$$\begin{aligned} (x - x_0) Q(x) + d_N &= (x - x_0) (d_0 x^{N-1} + d_1 x^{N-2} + \dots + d_{N-2} x + d_{N-1}) + d_N = \\ &= (d_0 x^N + d_1 x^{N-1} + \dots + d_{N-2} x^2 + d_{N-1} x) + \\ &\quad - (d_0 x_0 x^{N-1} + d_1 x_0 x^{N-2} + \dots + d_{N-2} x_0 x + d_{N-1} x_0) + \\ &\quad + d_N = \\ &= d_0 x^N + (d_1 - d_0 x_0) x^{N-1} + \dots + (d_{N-2} - d_{N-3} x_0) x^2 + \\ &\quad (d_{N-1} - d_{N-2} x_0) x + (d_N - d_{N-1} x_0) . \end{aligned}$$

Ahora, por las hipótesis $d_0 = a_0$ y $d_k - d_{k-1} x_0 = a_k$, así que

$$(x - x_0) Q(x) + d_N = a_0 x^N + a_1 x^{N-1} + \dots + a_{N-1} x + a_N = P(x) \quad \text{y} \quad d_N = P(x_0) .$$

c.q.d.

Ejemplo. Evaluar $P(x) = 2 x^4 - 3 x^2 + 3 x - 4$ en $x_0 = -2$ usando el método de Horner. Usando el Teorema XII.4

$$\begin{aligned} d_0 &= 2, & d_1 &= 2(-2) + 0 = -4, \\ d_2 &= (-4)(-2) - 3 = 5, & d_3 &= 5(-2) + 3 = -7, \end{aligned}$$

y finalmente

$$P(-2) = d_4 = (-7)(-2) - 4 = 10 .$$

Además, el Teorema XII.4 nos dice que

$$P(x) = (x + 2)(2 x^3 - 4 x^2 + 5 x - 7) + 10 .$$

Cuando en el método de Horner se hacen los cálculos a mano, se construye primero una tabla, que sugiere el nombre de **división sintética** con frecuencia aplicado a esta técnica. Para el problema del ejemplo anterior, la tabla aparecería como:

	Coef. de x^4	Coef. de x^3	Coef. de x^2	Coef. de x	Término constante
	$a_0 = 2$	$a_1 = 0$	$a_2 = -3$	$a_3 = 3$	$a_4 = -4$
$x_0 = -2$		$d_0 x_0 = -4$	$d_1 x_0 = 8$	$d_2 x_0 = -10$	$d_3 x_0 = 14$
	$d_0 = 2$	$d_1 = -4$	$d_2 = 5$	$d_3 = -7$	$d_4 = 10$

Una ventaja adicional al usar el procedimiento de Horner es que, como

$$P(x) = (x - x_0) Q(x) + d_N ,$$

donde

$$Q(x) = d_0 x^{N-1} + d_1 x^{N-2} + \dots + d_{N-2} x + d_{N-1} ,$$

diferenciando con respecto a x da

$$P'(x) = Q(x) + (x - x_0) Q'(x)$$

y

$$P'(x_0) = Q(x_0) . \tag{XII.7}$$

Así, cuando se use el método de Newton-Raphson para encontrar un cero aproximado de un polinomio P , ambos P y P' pueden ser evaluados de esta manera. El algoritmo siguiente calcula $P(x_0)$ y $P'(x_0)$ usando el método de Horner.

Algoritmo de Horner.

=====
Para evaluar el polinomio

$$P(x) = a_0 x^N + a_1 x^{N-1} + \dots + a_{N-1} x + a_N ,$$

y su derivada en x_0 :

Entrada: grado N ; coeficientes a_0, a_1, \dots, a_N ; punto donde evaluar el polinomio x_0 ;

Salida: $y = P(x_0)$ y $z = P'(x_0)$.

Paso 1: tomar

$$y = a_0; \text{ (calcular } d_0 \text{ para } P);$$

$$z = a_0; \text{ (calcular } \tilde{d}_0 \text{ para } Q);$$

Paso 2: para $j = 1, 2, \dots, N - 1$ tomar

$$y = x_0 y + a_j; \text{ (calcular } d_j \text{ para } P);$$

$$z = x_0 z + y; \text{ (calcular } \tilde{d}_j \text{ para } Q);$$

Paso 3: tomar:

$$y = x_0 y + a_N; \text{ (calcular } d_N \text{ para } P);$$

Paso 4: SALIDA (y, z); PARAR.

=====

Un uso interesante del algoritmo de Horner es expresar el desarrollo de Taylor de un polinomio alrededor de cualquier punto. Sea el polinomio P dado por (XII.1), y suponemos que buscamos los coeficientes c_k de la ecuación

$$\begin{aligned} P(x) &= a_0 x^N + a_1 x^{N-1} + \dots + a_{N-1} x + a_N , \\ &= c_0 (x - x_0)^N + c_1 (x - x_0)^{N-1} + \dots + c_{N-1} (x - x_0) + c_N . \end{aligned}$$

Es obvio por el teorema de Taylor de que $c_k = \frac{1}{(N - k)!} P^{(N-k)}(x_0)$, para $k = 0, 1, \dots, N$, pero es nuestra intención buscar un algoritmo más eficiente. Claramente, $c_N = P(x_0)$, de

modo que este coeficiente se obtiene aplicando el algoritmo de Horner al polinomio P en el punto x_0 . El algoritmo también genera el polinomio:

$$\begin{aligned} Q(x) &= \frac{P(x) - P(x_0)}{x - x_0} = d_0 x^{N-1} + d_1 x^{N-2} + \dots + d_{N-2} x + d_{N-1} = \\ &= c_0 (x - x_0)^{N-1} + c_1 (x - x_0)^{N-2} + \dots + c_{N-1} . \end{aligned}$$

Esto demuestra que el segundo coeficiente, c_{N-1} , se puede obtener aplicando el algoritmo de Horner al polinomio Q con el punto x_0 , ya que $d_{N-1} = c_{N-1} = Q(x_0)$. El proceso se repite hasta que se encuentren todos los coeficientes c_k .

Ejemplo. Encontrar una aproximación a uno de los ceros de

$$P(x) = 2x^4 - 3x^2 + 3x - 4 .$$

Hacer los cálculos con aritmética de cuatro dígitos significativos y usar el procedimiento de Newton-Raphson y división sintética para evaluar $P(x_n)$ y $P'(x_n)$ para cada iteración.

Usando $x_0 = -2$ como una aproximación inicial, obtenemos $P(-2)$ por:

	2	0	-3	3	-4
$x_0 = -2$		-4	8	-10	14
	2	-4	5	-7	10 = $P(-2)$

Usando el Teorema XII.4 y la ecuación (XII.7), obtenemos

$$Q(x) = 2x^3 - 4x^2 + 5x - 7 \quad \text{y} \quad P'(-2) = Q(-2) ;$$

así, $P'(-2)$ se puede encontrar de una manera similar, evaluando $Q(-2)$:

	2	-4	5	-7
$x_0 = -2$		-4	16	-42
	2	-8	21	-49 = $Q(-2) = P'(-2)$

y

$$x_1 = x_0 - \frac{P(x_0)}{P'(x_0)} = -2 - \frac{10}{-49} \approx -1.796 .$$

Repitiendo el procedimiento para encontrar x_2 , tenemos que

	2	0	-3	3	-4
-1.796		-3.592	6.451	-6.198	5.744
	2	-3.592	3.451	-3.198	1.744 = $P(x_1)$
-1.796		-3.592	12.90	-29.36	
	2	-7.184	16.35	-32.56 = $Q(x_1) = P'(x_1)$	

Así $P(-1.796) = 1.744$, $P'(-1.796) = -32.56$, y

$$x_2 = x_1 - \frac{P(x_1)}{P'(x_1)} = -1.796 - \frac{1.744}{-32.56} \approx -1.742 .$$

Un cero real con cinco dígitos decimales significativos es -1.74259 .

Nótese que el polinomio denotado por Q depende de la aproximación usada y cambia de iteración a iteración.

Un problema al aplicar el método de Newton a polinomios es el concerniente a la posibilidad de que el polinomio tenga raíces complejas aún cuando todos los coeficientes sean números reales. Si la aproximación inicial al usar el método de Newton es un número real, todas las aproximaciones sucesivas serán también números reales. Una manera de superar esta dificultad es empezar con aproximaciones iniciales no reales y hacer todos los cálculos usando aritmética compleja. Un enfoque diferente se basa en el siguiente Teorema.

Teorema XII.5

Si $z = \beta + \gamma i$ es un cero complejo de multiplicidad m del polinomio P , entonces $\bar{z} = \beta - \gamma i$ es también un cero de multiplicidad m del polinomio P y $(x^2 - 2\beta x + \beta^2 + \gamma^2)^m$ es un factor de P .

Consideremos ahora el problema de evaluar un polinomio $P(x)$ en un valor complejo del argumento $x = \beta + i \gamma$, donde los coeficientes $a_k = b_k + i c_k$ son complejos. Poniendo $d_k = Q_k + i R_k$ obtenemos:

$$\begin{cases} Q_n = b_0 , & R_0 = c_0 \\ Q_k = Q_{k-1} \beta - R_{k-1} \gamma + b_k , & k = 1, 2, \dots, N , \\ R_k = R_{k-1} \beta + Q_{k-1} \gamma + c_k , & k = 1, 2, \dots, N , \end{cases}$$

Entonces, la división sintética compleja funciona de la siguiente manera:

Coef. de x^N	Coef. de x^{N-1}	...	Coef. de x	Término constante
b_0 , c_0	b_1 , c_1	...	b_{N-1} , c_{N-1}	b_N , c_N
$\beta + i \gamma$	$Q_0\beta - R_0\gamma , \dots$ $Q_0\gamma + R_0\beta \dots$...	$Q_{N-2}\beta - R_{N-2}\gamma , Q_{N-1}\beta - R_{N-1}\gamma ,$ $Q_{N-2}\gamma + R_{N-2}\beta \quad Q_{N-1}\gamma + R_{N-1}\beta$	
Q_0 , R_0	Q_1 , R_1	...	Q_{N-1} , R_{N-1}	Q_N , R_N

Ejemplo. Encontrar una aproximación a los ceros de

$$P(x) = x^3 - 2 = 0 ,$$

usando el procedimiento de Newton-Raphson y división sintética para evaluar $P(x_n)$ y $P'(x_n)$ para cada iteración, con aritmética de cuatro dígitos.

Con el valor inicial $x_0 = 1$, obtenemos:

	1	0	0	-2
$x_0 = 1$		1	1	1
<hr/>				
$x_0 = 1$	1	1	1	-1 = $P(1)$
		1	2	
<hr/>				
	1	2	3 = $P'(1)$	

Entonces,

$$x_1 = x_0 - \frac{P(x_0)}{P'(x_0)} = 1 - \frac{-1}{3} \approx 1.333 .$$

Repetiendo el procedimiento para encontrar x_2 , tenemos que

	1	0	0	-2
$x_1 = 1.333$		1.333	1.777	2.369
<hr/>				
$x_1 = 1.333$	1	1.333	1.777	0.369 = $P(1.333)$
		1.333	3.553	
<hr/>				
	1	2.666	5.330 = $P'(1.333)$	

Así $P(1.333) = 0.369$, $P'(1.333) = 5.330$, y

$$x_2 = x_1 - \frac{P(x_1)}{P'(x_1)} = 1.333 - \frac{0.369}{5.330} \approx 1.264 .$$

Después de dos iteraciones hemos obtenido un valor aproximado de 1.264, que no está mal comparado con el valor verdadero $p \approx 1.260$ ($p^3 = 2$). Evidentemente el proceso es convergente. Sin embargo, no hay ninguna posibilidad de convergencia a una de las dos raíces complejas $-0.630 \pm 1.091 i$ si no usamos un valor inicial complejo. Así que ahora repetimos la división sintética y las iteraciones del método de Newton con la aproximación inicial $x_0 = i$.

	1 , 0	0 , 0	0 , 0	-2 , 0
$0 + 1 i$		0 , 1	-1 , 0	0 , -1
<hr/>				
$0 + 1 i$	1 , 0	0 , 1	-1 , 0	-2 , -1
		0 , 1	-2 , 0	
<hr/>				
	1 , 0	0 , 2	-3 , 0	

Así $P(i) = -2 - i$, $P'(i) = -3$, y

$$x_1 = x_0 - \frac{P(x_0)}{P'(x_0)} = i - \frac{-2 - i}{-3} = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3} i .$$

Entonces, parece que el método converge a la raíz compleja $-0.630 + 1.091 i$.

2. LA TECNICA DE DEFLACION

Si la n -ésima iteración, x_n , en el procedimiento de Newton-Raphson es un cero aproximado del polinomio P de grado N , entonces

$$P(x) = (x - x_n) Q(x) + d_N = (x - x_n) Q(x) + P(x_n) \approx (x - x_n) Q(x) ;$$

de lo cual, $x - x_n$ es un factor aproximado de $P(x)$. Tomando $\hat{x}_1 = x_n$ como un cero aproximado de P y $Q_1(x)$ como el factor aproximado,

$$P(x) \approx (x - \hat{x}_1) Q_1(x) ,$$

podemos encontrar un segundo cero aproximado de P aplicando el procedimiento de Newton-Raphson a $Q_1(x)$. Si P es un polinomio de grado N con N ceros reales, este procedimiento aplicado repetidamente, resultará eventualmente en $(N - 2)$ ceros aproximados de P y en un factor cuadrático aproximado $Q_{N-2}(x)$. A este nivel, $Q_{N-2}(x) = 0$ puede resolverse por la fórmula cuadrática para encontrar los dos últimos ceros aproximados de P . Aún cuando este método puede ser usado para encontrar ceros aproximados de muchos polinomios, depende del uso repetido de aproximaciones y en ocasiones puede llevar a aproximaciones muy imprecisas. Este procedimiento se llama **deflación**. La dificultad de precisión de la deflación se debe al hecho de que, cuando obtenemos los ceros aproximados de P , el procedimiento de Newton-Raphson se usa en el polinomio reducido Q_k , o sea, el polinomio con la propiedad de que

$$P(x) \approx (x - \hat{x}_1) (x - \hat{x}_2) \dots (x - \hat{x}_k) Q_k(x) .$$

Un cero aproximado \hat{x}_{k+1} de Q_k generalmente no aproximará a una raíz de $P(x) = 0$ tan bien como una raíz de $Q_k(x) = 0$. La imprecisión usualmente es incrementada conforme k crezca. Una manera de eliminar esta dificultad consiste en usar las ecuaciones reducidas, esto es, los factores aproximados del polinomio original P , para encontrar aproximaciones, $\hat{x}_2, \hat{x}_3, \dots, \hat{x}_k$ a los ceros de P y luego mejorar estas aproximaciones aplicando el procedimiento de Newton-Raphson al polinomio original P .

La deflación se usa con el método de Müller una vez que se ha determinado una raíz aproximada. Después de que se ha determinado una aproximación a la raíz de la ecuación deflactada es aconsejable usar, ya sea en el método de Müller o en el método de Newton, el polinomio original con esta aproximación como condición inicial. Esto asegurará que la raíz que se está aproximando sea una solución de la ecuación verdadera y no de la ecuación deflactada.

La siguiente técnica ha sido sugerida por Wilkinson: una vez encontrada una raíz p , entonces se considera la función

$$T(x) = \frac{P(x)}{x - p} .$$

El método de Newton se aplica entonces a la función $T(x)$ para dar

$$x_{n+1} = x_n - \frac{T(x_n)}{T'(x_n)} = x_n - \left[\frac{P'(x_n)}{P(x_n)} - \frac{1}{x_n - p} \right]^{-1} .$$

De esta manera uno puede trabajar con el polinomio original $P(x)$ en vez del polinomio deflactado, reduciendo el error. En general, habiendo encontrado los ceros p_1, p_2, \dots, p_s , se puede usar la fórmula general

$$x_{n+1} = x_n - \left[\frac{P'(x_n)}{P(x_n)} - \sum_{k=1}^s \frac{1}{x_n - p_k} \right]^{-1}.$$

Se ha indicado previamente que el éxito del método de Newton depende frecuentemente de la obtención de una buena aproximación inicial. Una aproximación inicial x_0 mal escogida puede originar que la sucesión $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ diverga también por polinomios. Si el polinomio real $P(x)$ no tiene raíces reales, entonces el método de Newton tiene que diverger para cualquier valor inicial $p_0 \in \mathcal{R}$. No hay reglas generales para escoger valores iniciales en el caso de polinomios genéricos, aunque la idea básica para encontrar ceros aproximados de P es la siguiente: evaluar P en puntos x_i para $i = 1, 2, \dots, k$. Si $P(x_i) P(x_j) < 0$, entonces P tiene un cero entre x_i y x_j . El problema se transforma en escoger las x_i de tal manera que la posibilidad de perder un cambio de signo se minimice, mientras se mantiene el número de las x_i razonablemente pequeño. Sin embargo, existe una regla en el caso en que el polinomio tenga todas las raíces reales.

Teorema XII.6

Sea $P(x)$ un polinomio de grado $N \geq 2$ con coeficientes reales. Si todas las raíces ξ_i de $P(x)$ son reales y $\xi_N \leq \xi_{N-1} \leq \dots \leq \xi_2 \leq \xi_1$, entonces el método de Newton lleva a una sucesión $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ convergente y estrictamente decreciente para cualquier valor inicial $p_0 > \xi_1$.

Demostración: sin perder generalidad podemos asumir que $P(p_0) > 0$. Dado que $P(x)$ no cambia de signo para $x > \xi_1$, tenemos que $P(x) = a_0 x^N + \dots + a_N > 0$ para $x > \xi_1$, y entonces $a_0 > 0$. La derivada P' tiene $N - 1$ ceros reales α_i con (para el Teorema de Rolle)

$$\xi_N \leq \alpha_{N-1} \leq \xi_{N-1} \leq \dots \leq \alpha_2 \leq \xi_2 \leq \alpha_1 \leq \xi_1.$$

Dado que $P'(x)$ es de grado $N - 1 \geq 1$, éstas son todas las raíces, y además $P'(x) > 0$ para $x > \alpha_1$, dado que $a_0 > 0$. Usando otra vez el Teorema de Rolle, y recordando que $N \geq 2$, obtenemos:

$$P''(x) > 0 \quad \text{y} \quad P'''(x) \geq 0 \quad \text{para} \quad x \geq \alpha_1.$$

Entonces, P y P' son funciones convexas para $x \geq \alpha_1$. Ahora bien, el hecho de que $p_n \geq \xi_1$ implica que

$$p_{n+1} = p_n - \frac{P(p_n)}{P'(p_n)} < p_n$$

dado que $P'(p_n) > 0$ y $P(p_n) > 0$.

Nos queda por demostrar que $p_{n+1} > \xi_1$. Por el Teorema de Taylor tenemos:

$$\begin{aligned} 0 = P(\xi_1) &= P(p_n) + (\xi_1 - p_n) P'(p_n) + \frac{(\xi_1 - p_n)^2}{2} P''(\delta) \\ &> P(p_n) + (\xi_1 - p_n) P'(p_n) \end{aligned}$$

dado que $\alpha_1 \leq \xi_1 < \delta < p_n$ implica que $P''(\delta) > 0$. De la definición de p_{n+1} se tiene que $P(p_n) = P'(p_n) (p_n - p_{n+1})$. Entonces,

$$0 > P'(p_n) (p_n - p_{n+1} + \xi_1 - p_n) = P'(p_n) (\xi_1 - p_{n+1})$$

que implica $\xi_1 - p_{n+1} < 0$ dado que $P'(p_n) > 0$, es decir, $p_{n+1} > \xi_1$. c.q.d.

3. EL METODO DE BAIRSTOW

Basandose sobre el Teorema XII.5, se puede diseñar una división sintética que involucre polinomios cuadráticos para factorizar aproximadamente el polinomio, de tal manera que uno de los términos sea un polinomio cuadrático cuyas raíces complejas sean aproximaciones a las raíces del polinomio original. Para introducir la **división sintética cuadrática**, consideremos el polinomio $P(x)$ de grado N , de la forma (XII.1), $P(x) = a_0 x^N + a_1 x^{N-1} + \dots + a_{N-1} x + a_N$ y sea $x^2 - r x - s$ un término cuadrático fijo. Entonces, podemos escribir $P(x)$ de la forma

$$P(x) = (x^2 - r x - s) Q(x) + u (x - r) + v, \tag{XII.8}$$

donde los términos $u (x - r) + v$ constituyen el resto cuando el polinomio $P(x)$ se divide entre $x^2 - r x - s$. Así, $Q(x)$ es un polinomio de grado $(N - 2)$ y se puede representar como

$$Q(x) = b_0 x^{N-2} + b_1 x^{N-3} + \dots + b_{N-3} x + b_{N-2}. \tag{XII.9}$$

Si ponemos $b_{N-1} = u$ y $b_N = v$, entonces la ecuación (XII.8) se puede reescribir como

$$P(x) = (x^2 - r x - s) (b_0 x^{N-2} + b_1 x^{N-3} + \dots + b_{N-3} x + b_{N-2}) + b_{N-1} (x - r) + b_N,$$

que representado en potencias de x tiene la forma

$$\begin{aligned} P(x) = & b_0 x^N + (b_1 - r b_0) x^{N-1} + (b_2 - r b_1 - s b_0) x^{N-2} + \\ & + \dots + (b_k - r b_{k-1} - s b_{k-2}) x^k + \dots + \\ & + (b_{N-1} - r b_{N-2} - s b_{N-3}) x + b_N - r b_{N-1} - s b_{N-2}. \end{aligned} \tag{XII.10}$$

Comparando los coeficientes de las potencias x^k de la ecuación (XII.10) con los de la (XII.1), obtenemos los números b_k . Las fórmulas recursivas son las siguientes:

$$\begin{cases} b_0 = a_0 \\ b_1 = a_1 + r b_0 \\ b_k = a_k + r b_{k-1} + s b_{k-2} \quad \text{para } k = 2, 3, \dots, N \end{cases} \tag{XII.11}$$

Cuando se hacen los cálculos a mano, se construye una nueva tabla para esta división sintética cuadrática que tiene la siguiente forma.

	a_0	a_1	a_2	a_3	\dots	a_k	\dots	a_{N-2}	a_{N-1}	a_N
s			$s b_0$	$s b_1$	\dots	$s b_{k-2}$	\dots	$s b_{N-4}$	$s b_{N-3}$	$s b_{N-2}$
r		$r b_0$	$r b_1$	$r b_2$	\dots	$r b_{k-1}$	\dots	$r b_{N-3}$	$r b_{N-2}$	$r b_{N-1}$
	b_0	b_1	b_2	b_3	\dots	b_k	\dots	b_{N-2}	b_{N-1}	b_N

Ahora usaremos la división sintética cuadrática para introducir una técnica, conocida como el **método de Bairstow**, que es usada para encontrar un factor cuadrático, del tipo $(x^2 - r x - s)$, del polinomio $P(x)$.

Suponemos que empezamos con un factor cuadrático inicial

$$x^2 - r_0 x - s_0 \quad (XII.12)$$

y que el polinomio $P(x)$ se pueda expresar como

$$P(x) = (x^2 - r_0 x - s_0) Q(x) + u(x - r_0) + v. \quad (XII.13)$$

Cuando u y v son pequeños, el polinomio cuadrático (XII.12) está cerca del factor del polinomio $P(x)$. Queremos encontrar nuevos valores r_1 y s_1 de manera que

$$x^2 - r_1 x - s_1 \quad (XII.14)$$

sea más cerca al factor de $P(x)$ que el polinomio cuadrático inicial (XII.12). Nótese que u y v en (XII.13) son funciones de r y s , así que $u = u(r, s)$ y $v = v(r, s)$. Los nuevos valores r_1 y s_1 satisfacen las relaciones

$$r_1 = r_0 + \Delta r \quad \text{y} \quad s_1 = s_0 + \Delta s. \quad (XII.15)$$

Los diferenciales de las funciones u y v dan las aproximaciones

$$\begin{aligned} v(r_1, s_1) &\approx v(r_0, s_0) + v_r(r_0, s_0)\Delta r + v_s(r_0, s_0)\Delta s, \\ u(r_1, s_1) &\approx u(r_0, s_0) + u_r(r_0, s_0)\Delta r + u_s(r_0, s_0)\Delta s. \end{aligned} \quad (XII.16)$$

Si el polinomio cuadrático (XII.14) es un factor del polinomio $P(x)$, entonces los nuevos valores r_1 y s_1 tienen que satisfacer

$$u(r_1, s_1) = 0 \quad \text{y} \quad v(r_1, s_1) = 0. \quad (XII.17)$$

Cuando las cantidades Δr y Δs son pequeñas, las aproximaciones (XII.16) se pueden usar de manera que Δr y Δs sean la solución del sistema lineal

$$\begin{aligned} 0 &= v(r_0, s_0) + v_r(r_0, s_0)\Delta r + v_s(r_0, s_0)\Delta s, \\ 0 &= u(r_0, s_0) + u_r(r_0, s_0)\Delta r + u_s(r_0, s_0)\Delta s. \end{aligned} \quad (XII.18)$$

Si se conocen los valores de las derivadas parciales que aparecen en el sistema (XII.18), entonces Δr y Δs se pueden calcular usando las fórmulas de Cramer, y los nuevos valores de r_1 y s_1 se obtienen desde las ecuaciones (XII.15). Deduciremos más adelante las expresiones de las derivadas parciales; por el momento decimos que estas están dadas por

$$v_r = c_{N-1}, \quad v_s = c_{N-2}, \quad u_r = c_{N-2}, \quad u_s = c_{N-3}, \quad (XII.19)$$

donde los coeficientes c_k están dados por las fórmulas recursivas

$$\begin{cases} c_0 = b_0 \\ c_1 = b_1 + r c_0 \\ c_k = b_k + r c_{k-1} + s c_{k-2} \quad \text{para } k = 2, 3, \dots, N \end{cases} \quad (XII.20)$$

Las fórmulas (XII.20) usan los coeficientes b_k que se habían calculado en las fórmulas recursivas (XII.11). Dado que $u(r_0, s_0) = b_{N-1}$ y $v(r_0, s_0) = b_N$, el sistema lineal (XII.18) se puede reescribir como

$$\begin{aligned} c_{N-1} \Delta r + c_{N-2} \Delta s &= -b_N, \\ c_{N-2} \Delta r + c_{N-3} \Delta s &= -b_{N-1}. \end{aligned} \quad (XII.21)$$

Usamos ahora las fórmulas de Cramer para resolver el sistema (XII.21). Los determinantes que se necesitan son

$$D = \det \begin{pmatrix} c_{N-1} & c_{N-2} \\ c_{N-2} & c_{N-3} \end{pmatrix}, \quad D_1 = \det \begin{pmatrix} -b_N & c_{N-2} \\ -b_{N-1} & c_{N-3} \end{pmatrix}, \quad D_2 = \det \begin{pmatrix} c_{N-1} & -b_N \\ c_{N-2} & -b_{N-1} \end{pmatrix},$$

y los nuevos valores r_1 y s_1 se calculan como

$$r_1 = r_0 + \frac{D_1}{D} \quad \text{y} \quad s_1 = s_0 + \frac{D_2}{D}. \quad (XII.22)$$

El proceso iterativo continua hasta que se encuentren buenas aproximaciones de r y s . Si las aproximaciones iniciales r_0 y s_0 se escogen pequeñas, la iteración en general converge. Cuando $x \approx 0$, las potencias grandes de x en el polinomio $P(x)$, (XII.1), se pueden trascurar, y tenemos la aproximación $0 \approx P(x) \approx a_{N-2} x^2 + a_{N-1} x + a_N$. Entonces, las aproximaciones iniciales podrían ser

$$r_0 = -\frac{a_{N-1}}{a_{N-2}} \quad \text{y} \quad s_0 = -\frac{a_N}{a_{N-2}}, \quad (XII.23)$$

siempre que $a_{N-2} \neq 0$.

Vamos ahora a derivar las fórmulas (XII.20). La idea es diferenciar las ecuaciones (XII.11) con respecto a r y s . Para empezar, nótese que $b_0 = a_0$ es una constante, así que sus derivadas parciales son cero. Continuando en la lista obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} b_0 &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial r} b_0 &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial r} b_1 &= b_0, \\ \frac{\partial}{\partial r} b_2 &= b_1 + r \frac{\partial}{\partial r} b_1 \\ &= b_1 + r b_0, \\ \frac{\partial}{\partial s} b_1 &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial s} b_2 &= b_0 + r \frac{\partial}{\partial s} b_1 = b_0, \\ \frac{\partial}{\partial s} b_3 &= b_1 + r \frac{\partial}{\partial s} b_2 + s \frac{\partial}{\partial s} b_1 \\ &= b_1 + r b_0. \end{aligned} \quad (XII.24)$$

Diferenciando el término general en (XII.11) con respecto a r y s , obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial r} b_k = 0 + b_{k-1} + r \frac{\partial}{\partial r} b_{k-1} + 0 + s \frac{\partial}{\partial r} b_{k-2} , \tag{XII.25}$$

y

$$\frac{\partial}{\partial s} b_{k+1} = 0 + 0 + r \frac{\partial}{\partial s} b_k + b_{k-1} + s \frac{\partial}{\partial s} b_{k-1} . \tag{XII.26}$$

Entonces, empezando con las ecuaciones (XII.24) y usando las (XII.25) y (XII.26), sigue que

$$\frac{\partial}{\partial r} b_k = \frac{\partial}{\partial s} b_{k+1} , \quad \text{para } k = 0, 1, \dots, N . \tag{XII.27}$$

Y si definimos c_{k-1} el término común en (XII.27), entonces, (XII.25) se puede usar para mostrar que

$$\begin{aligned} c_{k-1} &= \frac{\partial}{\partial r} b_k = b_{k-1} + r \frac{\partial}{\partial r} b_{k-1} + s \frac{\partial}{\partial r} b_{k-2} = \\ &= b_{k-1} + r c_{k-2} + s c_{k-3} . \end{aligned} \tag{XII.28}$$

Un método compacto para el cálculo es poner

$$b_{-1} = b_{-2} = c_{-1} = c_{-2} = 0 , \tag{XII.29}$$

$$b_k = a_k + r b_{k-1} + s b_{k-2} \quad \text{y} \quad c_k = b_k + r c_{k-1} + s c_{k-2} , \tag{XII.30}$$

para $k = 0, 1, \dots, N$, como dicho en las fórmulas (XII.20).

Cuando se hacen los cálculos a mano del método de Bairstow, se construye una extensión de la tabla para la división sintética cuadrática que tiene la siguiente forma.

	a_0	a_1	a_2	a_3	\dots	a_{N-3}	a_{N-2}	a_{N-1}	a_N
s			$s b_0$	$s b_1$	\dots	$s b_{N-5}$	$s b_{N-4}$	$s b_{N-3}$	$s b_{N-2}$
r		$r b_0$	$r b_1$	$r b_2$	\dots	$r b_{N-4}$	$r b_{N-3}$	$r b_{N-2}$	$r b_{N-1}$
	b_0	b_1	b_2	b_3	\dots	b_{N-3}	b_{N-2}	b_{N-1}	b_N
s			$s c_0$	$s c_1$	\dots	$s c_{N-5}$	$s c_{N-4}$	$s c_{N-3}$	
r		$r c_0$	$r c_1$	$r c_2$	\dots	$r c_{N-4}$	$r c_{N-3}$	$r c_{N-2}$	
	c_0	c_1	c_2	c_3	\dots	c_{N-3}	c_{N-2}	c_{N-1}	

Ejemplo. Dado el polinomio $P(x) = x^4 + x^3 + 3x^2 + 4x + 6$, usar el método de Bairstow, empezando con $r_0 = -2.1$ y $s_0 = -1.9$, para encontrar $r_1, s_1, r_2, s_2, \dots$, los factores cuadráticos y las raíces de $P(x)$.

La tabla para calcular r_1 y s_1 es

	1.0000	1.0000	3.0000	4.0000	6.0000
$s = -1.9$			-1.9000	2.0900	-6.4790
$r = -2.1$		-2.1000	2.3100	-7.1610	2.2491
	1.0000	-1.1000	3.4100	-1.0710 = b_3	1.7701 = b_4
$s = -1.9$			-1.9000	6.0800	
$r = -2.1$		-2.1000	6.7200	-17.283	
	1.0000	-3.2000 = c_1	8.2300 = c_2	-12.274 = c_3	

El sistema lineal para Δr y Δs resultante es entonces

$$\begin{aligned} -12.274 \Delta r + 8.2300 \Delta s &= -1.7701, \\ 8.2300 \Delta r - 3.2000 \Delta s &= 1.0710. \end{aligned}$$

Usamos ahora las fórmulas de Cramer para resolver este sistema. Los determinantes son

$$D = -28.4561, \quad D_1 = -3.15001, \quad D_2 = 1.422469.$$

Entonces, los nuevos valores r_1 y s_1 son

$$r_1 = -2.1 + \frac{-3.15001}{-28.4561} = -1.98930282 \quad \text{y} \quad s_1 = -1.9 + \frac{1.422469}{-28.4561} = -1.94998819.$$

Otra iteración nos daría $r_2 = -1.99999277$ y $s_2 = -2.00015098$. Las sucesiones convergen a los valores $r = -2$ y $s = -2$, y $P(x)$ tiene la siguiente factorización

$$P(x) = (x^2 + 2x + 2)(x^2 - x + 3).$$

Finalmente, sigue que las cuatro raíces complejas son

$$x_{1,2} = 1 \pm i \quad \text{y} \quad x_{3,4} = 0.5 \pm i 1.65831239.$$