

# Fundamentos Matemáticos de la Ingeniería

*impartido por*

María Begoña Del Hoyo y Virginia Muto

Departamento de Matemática Aplicada  
y Estadística e Investigación Operativa

Facultad de Ciencia y Tecnología

Universidad del País Vasco  
Euskal Herriko Unibertsitatea



# Prólogo

En el curso 1999-2000 comenzó a impartirse en la Facultad de Ciencias de la Universidad del País Vasco la titulación de Ingeniería Química.

Dentro de dicha titulación se nos asignó a las profesoras María Begoña del Hoyo y Virginia Muto, la docencia de la asignatura de “*Fundamentos Matemáticos para la Ingeniería*”. Como el temario era amplio y el tiempo que teníamos para dedicar a nuestros alumnos era corto, decidimos preparar unos apuntes que les sirvieran de ayuda para “no perderse” por la asignatura y adentrarse así en el mundo de la Matemática que consideramos básica para poder desarrollar con éxito su formación en la Facultad.

Desafortunadamente nuestra experiencia nos dice que los alumnos que llegan a primero de Ingeniería Química carecen del hábito e incluso en muchos casos de la capacidad para el estudio y correcta interpretación de los textos usualmente disponibles en el mercado. La motivación principal que nos ha inducido a escribir este libro y probablemente nuestra aportación original esencial al mismo, ha sido la de producir un texto que pudiera jugar un papel intermedio entre el profesor-tutor y los textos ordinarios, por decirlo en otras palabras que proveyera al alumno con una especie de servicio de tutorización impresa, haciéndoles fácilmente digerible ideas, conceptos y métodos expresados de forma menos elaborada y compacta en otras obras.

Después de dos años de andar con hojas “para adelante y para atrás” hemos creído conveniente publicar estos apuntes en formato libro con el único objetivo de que para nuestros alumnos sea más fácil disponer de los apuntes completos de la asignatura desde el primer día de clase.

Para confeccionar dichos apuntes nos basamos en los siguientes libros:

N. Piskunov: Cálculo Diferencial e Integral. Montaner y Simón, Barcelona, 1978.

E. Marsden & A. J. Tromba: Cálculo Vectorial. Addison-Wesley Iberoamericana, 1987.

L. Salas & E. Hille: Calculus - Cálculo de una y varias variables con geometría analítica. Reverté, 1995.

B. P. Demidovich: Problemas y ejercicios de Análisis Matemático. Paraninfo, 1969.

B. P. Demidovich: 5000 Problemas de Análisis Matemático. Paraninfo, Madrid, 1990.

M. Spivak: Cálculos. Cálculo Infinitesimal. Reverté. 1970.

J. Martínez Salas: Elementos de Matemáticas. Gráficas Andrés Martín, Valladolid, 1977.

S. Lipschutz: Algebra Lineal. McGraw-Hill, 1992.

M. Castellet & I. Llerena: Algebra Lineal y Geometría. Reverté, Barcelona, 1992.

E. Tebar Flores: Problemas de Cálculo Infinitesimal. Tebar Flores, Albacete.

A. Luzarraga: Problemas resueltos de Algebra Lineal. Romargraf, 1966.

y en otros apuntes que en nuestra experiencia docente de largos años habíamos ido acumulando.

Agradecemos cualquier sugerencia que los lectores nos hagan, para poder subsanar en el futuro defectos y errores en el trabajo que deben ser imputados a nuestra única responsabilidad. Siempre con el objetivo de conseguir un texto útil para nuestros alumnos de Ingeniería Química y si es posible, también, para alumnos de otras secciones.

Agradecemos la ayuda inestimable de César, sin la cual no hubiésemos podido “arrancar.”<sup>el</sup> 1 de Octubre de 1999, a nuestros maridos Alberto y Jon por sus primeras lecturas y críticas y a nuestros hijos Patxi, Ana, Ane Miren y Mikel, que sobre todo el primer curso tuvieron que aguantar a unas madres que eran un manojo de nervios.

Leioa, Junio 2001  
Begoña y Virginia

# Índice general

<b>I Tomo 1</b>	<b>13</b>
<b>-1. Introducción histórica</b>	<b>15</b>
<b>0. Conceptos Básicos.</b>	<b>17</b>
0.1. Los números reales. . . . .	17
0.2. Sucesiones de números reales. . . . .	32
0.3. Funciones reales de variable real. . . . .	54
0.4. Límite de una función en un punto. . . . .	68
0.5. Infinitos e infinitésimos. . . . .	80
0.6. Continuidad de una función. . . . .	87
<b>1. Derivación.</b>	<b>101</b>
1.1. Derivada de una función. . . . .	101
1.2. Continuidad de las funciones de una variable. . . . .	105
1.3. Diferencial de una función. . . . .	117
1.4. Derivadas de orden superior. . . . .	120
1.5. Diferenciales de diversos ordenes. . . . .	124
<b>2. Teoremas del valor medio. Aplicaciones.</b>	<b>129</b>
2.1. Teoremas clásicos sobre derivación. . . . .	129
2.2. Regla de L'Hôpital. . . . .	134
2.3. Fórmula de Taylor. Resto de Lagrange. . . . .	137
2.4. Máximos y mínimos relativos y absolutos. . . . .	140
2.5. Trazado de curvas planas definidas de forma explícita. . . . .	153
<b>3. Integral de Riemann.</b>	<b>169</b>
3.1. Introducción a la integral de Riemann. . . . .	169
3.2. Propiedades de la integral definida. . . . .	171
3.3. Teorema del valor medio integral. . . . .	172
3.4. Teorema fundamental del cálculo integral. . . . .	173
3.5. Cambio de variable en la integral definida. . . . .	175
3.6. Aplicaciones de la integral definida. . . . .	176
3.6.1. Cálculo de áreas. . . . .	176

3.6.2.	Cálculo de longitudes de arco de una curva. . . . .	178
3.6.3.	Cálculo de volúmenes. . . . .	180
3.6.4.	Cálculo del área de una superficie de revolución. . . . .	181
<b>4.</b>	<b>Técnicas de integración.</b>	<b>183</b>
4.1.	Función primitiva e integral indefinida. . . . .	183
4.2.	Integrales inmediatas. . . . .	188
4.3.	Integración por cambio de variable o sustitución. . . . .	189
4.4.	Integración por partes. . . . .	192
4.5.	Integración de fracciones racionales. . . . .	195
4.6.	Integración de fracciones irracionales. . . . .	202
4.6.1.	Diferenciales binomias. . . . .	203
4.6.2.	Sustituciones de Euler. . . . .	206
4.7.	Integración de funciones trigonométricas. . . . .	208
4.8.	Integrales racionales de funciones trigonométricas. . . . .	213
4.9.	Funciones hiperbólicas. . . . .	215
4.10.	Método de Hermite. . . . .	216
<b>5.</b>	<b>Integrales impropias.</b>	<b>219</b>
5.1.	Definición de integral impropia. . . . .	219
5.2.	Integrales extendidas a un intervalo infinito. (Integrales de 1ª especie). . .	219
5.3.	Integrales de funciones no acotadas. (Integrales de 2ª especie). . . . .	221
5.4.	Criterios de convergencia. . . . .	226
5.5.	Criterio de convergencia de Cauchy. . . . .	231
<b>6.</b>	<b>Métodos Numéricos del Cálculo Integral.</b>	<b>235</b>
6.1.	Introducción. . . . .	235
6.2.	Fórmula de los rectángulos. . . . .	237
6.3.	Fórmula de los trapecios. . . . .	238
6.4.	Fórmula de Simpson. . . . .	238
<b>7.</b>	<b>Series.</b>	<b>241</b>
7.1.	Conceptos previos. . . . .	241
7.2.	Convergencia de una serie. . . . .	244
7.3.	Criterios de convergencia. . . . .	248
7.3.1.	Condición necesaria de convergencia de una serie. . . . .	248
7.3.2.	Teoremas de comparación. . . . .	251
7.4.	Series Alternadas. . . . .	265
7.5.	Series de términos positivos y negativos. . . . .	267
7.5.1.	Convergencia absoluta y condicional. . . . .	268
7.6.	Sumación de Series. . . . .	273
7.6.1.	Serie hipergeométrica. . . . .	273
7.6.2.	Serie aritmético-geométrica. . . . .	273
7.6.3.	Serie telescópica. . . . .	274

7.6.4. Series descomponibles en factores simples. . . . .	275
7.6.5. Series descomponibles mediante el número $e$ . . . . .	276
7.7. Series de Funciones. . . . .	276
7.8. Series de potencias. Intervalo de convergencia. . . . .	280
7.8.1. Series de Taylor y de MacLaurin. . . . .	284
7.8.2. Serie binómica. . . . .	291

**II Tomo 2 309**

**8. Algebra Matricial. 311**

8.1. Matrices. Operaciones con matrices. . . . .	311
8.2. Aplicaciones lineales. . . . .	317
8.3. Matriz asociada a una aplicación lineal. . . . .	323
8.4. Suma, producto y composición de aplicaciones lineales. . . . .	328
8.5. Determinante de una matriz $n \times n$ . Propiedades. . . . .	329
8.6. Cálculo de determinantes. . . . .	335
8.7. Tipos de matrices. . . . .	337
8.8. Normas de vectores y de matrices. . . . .	345
8.9. Autovalores y autovectores. . . . .	349
8.10. Diagonalización de matrices. . . . .	357

**9. La geometría del espacio euclídeo. 363**

9.1. Vectores en el espacio tridimensional. . . . .	363
9.2. Producto escalar. . . . .	370
9.3. Producto vectorial. . . . .	374
9.4. Coordenadas esféricas y cilíndricas. . . . .	381
9.5. Espacio euclídeo de dimensión $n$ . . . . .	385

**10. Diferenciación. 389**

10.1. La geometría de las funciones con valores reales. . . . .	389
10.2. Límites y continuidad. . . . .	398
10.3. Diferenciación. . . . .	409
10.4. Propiedades de la derivada. . . . .	418
10.5. Gradientes y derivadas direccionales. . . . .	424
10.6. Derivadas parciales iteradas. . . . .	433
10.7. Trayectorias y velocidad. Longitud de arco. . . . .	438

**11. Derivadas de orden superior: máximos y mínimos. 445**

11.1. Teorema de Taylor. . . . .	445
11.2. Extremos de funciones con valores reales. . . . .	448
11.3. Extremos con restricciones y multiplicadores de Lagrange. . . . .	460
11.4. Métodos numéricos de optimización con y sin restricciones. . . . .	466

<b>12. Integración.</b>	<b>471</b>
12.1. Introducción.	471
12.2. La integral doble sobre un rectángulo.	475
12.3. La integral doble sobre regiones más generales.	485
12.4. Cambio del orden de integración.	490
12.5. La integral triple.	497
12.6. Cambio de variables en la integral múltiple.	507
12.6.1. La geometría de las funciones de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2$ .	507
12.6.2. Cambio de variables en la integral doble.	511
12.6.3. Cambio de variables en la integral triple.	522
12.7. Algunas aplicaciones de las integrales múltiples.	527
<b>13. Integrales sobre trayectorias y superficies.</b>	<b>535</b>
13.1. Campos vectoriales.	535
13.1.1. Divergencia y rotacional de un campo vectorial.	540
13.1.2. Cálculo diferencial vectorial.	545
13.2. La integral de trayectoria.	548
13.3. La integral de línea.	551
13.4. Superficies parametrizadas.	568
13.5. Integrales de funciones escalares sobre superficies.	579
13.6. Integrales de superficie de funciones vectoriales.	585
13.7. Teorema de Green.	594
13.8. Teorema de Stokes.	601
13.9. Teorema de Gauss.	609