.

Curso de Fundamentos Matemáticos de la Ingeniería

Año Académico 1999-2000 – Primer Curso de Ingeniería Química

Examen Final Junio - Primera parte

1. El límite de la sucesión cuyo término general es

$$a_n = \left(\frac{\sqrt{9\,n^2+n}-n}{4\,n+5} \right)^{\dfrac{-n^2+3}{n}}$$

$a)\quad 0$ $\qquad b)\quad \infty$ $\qquad c)\quad -\dfrac{1}{5}$

2. La función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{x+1}} & \text{si } x \geq 0 \\ \dfrac{\ln(x^2+1)}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

es derivable en:

$a)\quad \mathbb{R}$ $\qquad b)\quad \mathbb{R}-\{0\}$ $\qquad c)\quad (-1,\infty)$

3. Las asintotas de la función $y = x\,e^{1/x^2}$ son:

$a)\quad x = e$ $\qquad b)\quad x=0, y=x+1$ $\qquad c)\quad x=0, y=x$

4. El valor de la siguiente integral

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} \operatorname{sen} x\, dx$$

es:

$a)\quad \dfrac{1}{2}$ $\qquad b)\quad \infty$ $\qquad c)\quad \dfrac{3}{4}$

5. La serie cuyo término general es $a_n = \dfrac{1}{n^2-1}, \quad (n \geq 2)$ es:

$a)\quad$ divergente $\qquad b)\quad \text{convergente, suma}: \dfrac{3}{4}$ $\qquad c)\quad \text{convergente, suma}: 1$

NOTA: Cada pregunta vale un punto; las respuestas incorrectas restan 0.3 puntos.

.

Curso de Fundamentos Matemáticos de la Ingeniería

Año Académico 1999-2000 – Primer Curso de Ingeniería Química

Examen Final Junio - Segunda parte

1. ¿Sobre qué direcciones θ existe el límite finito

$$\lim_{\rho \to 0^+} e^{\frac{x}{x^2+y^2}}$$

si $x = \rho\,\cos\theta$, $y = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta$?

(0.7 puntos)

2. Determina el ángulo formado por los gradientes de la función

$$u = x^2 + y^2 - z^2$$

en los puntos $A\,(\varepsilon, 0, 0)$ y $B\,(0, \varepsilon, 0)$, $A_1\,(\frac{1}{2}, 1, 2)$ y $B_1\,(-\frac{1}{2}, 2, -1)$, respectivamente.

(0.4 puntos)

3. Los cursos de dos ríos (dentro de los límites de una región determinada) representan aproximadamente una parábola, $y = x^2$, y una recta, $x - y - 2 = 0$. Hay que unir estos ríos por medio de un canal rectilíneo que tenga la menor longitud posible. ¿Por qué puntos habrá que trazarlo?

(1.5 puntos)

4. Dado Ω un paralelogramo de lados $y = x$, $y = x + a$, $y = a$, $y = 3\,a$ $(a > 0)$, calcula

$$\int\!\!\int_{\Omega} (x^2 + y^2)\,dx\,dy.$$

(1.2 puntos)

5. Calcula

$$\int_c y^2\,dx + x^2\,dy$$

donde c es la mitad superior de la elipse

$$x = a\,\cos t, \qquad y = b\,\mathrm{sen}\,t$$

que se sigue en el sentido de las agujas del reloj. **(1.2 puntos)**

.

Curso de Fundamentos Matemáticos de la Ingeniería

Año Académico 1999-2000 – Primer Curso de Ingeniería Química

Examen Final Septiembre

1. Calcula

$$\lim_{n\to\infty}(n+1)^{-1/2}\left[\frac{1^{1/2}}{2}+\frac{2^{1/2}}{3}+\frac{3^{1/2}}{4}+\ldots+\frac{n^{1/2}}{n+1}\right]$$

(0.8 puntos)

2. Dada la función

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{x}{2}+a}, & \text{si } x<1,\\ 4 & \text{si } x=1,\\ \dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{3}}{x-1} & \text{si } x>1.\end{cases}$$

a) Encuentra el valor de a para que exista $\lim_{x\to 1} f(x)$.

(0.8 puntos)

b) ¿Es continua la función para el valor de a obtenido en el apartado anterior?

(0.4 puntos)

3. Sea

$$f(x)=3-|x-4|.$$

Comprueba que $f(1)=f(7)=0$, y sin embargo $f'(x)$ no se anula para ningún $x\in[1,7]$. ¿Contradice esto al teorema de Rolle? Razona la respuesta.

(1.0 punto)

4. Halla la longitud del arco de curva

$$y=\ln\frac{1}{1-x^2}$$

comprendido entre los puntos de abscisas $x=0$ y $x=\dfrac{1}{2}$.

(1.0 punto)

5. Razona por qué la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3\,n+1}{3^n}$$

es convergente. Calcula su suma.

(1.0 punto)

6. Halla, en el punto $M\,(1,2)$, la derivada de la función

$$z = 3\,x^4 - x\,y + y^3$$

siguiendo la dirección que forma con el eje OX el ángulo de 45^o.

(0.8 puntos)

7. Determina los valores máximo y mínimo de la función

$$z = x^3 + y^3 - 3\,x\,y$$

en la región $0 \leq x \leq 2$, $-1 \leq y \leq 2$.

(1.2 puntos)

8. En el cuadrante del espacio en que son positivas la x y la y, se considera el volumen limitado por los planos $x = 0$, $y = 0$, el casquete del paraboloide $x^2 + y^2 + z = 1$ en que $z > 0$ y el casquete de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ en que $z < 0$.

a) Plantea el volumen con una integral triple en coordenadas cartesianas.

(0.8 puntos)

b) Calcula el volumen en coordenadas cilíndricas.

(1.2 puntos)

9. Sea

$$f(x,y) = (3-x)\,(3-y)\,(x+y-3).$$

a) ¿En qué regiones del plano es $f(x,y) \geq 0$? Haz un dibujo mostrando dichas regiones.

(0.6 puntos)

b) Demuestra, sin utilizar el criterio de la matriz Hessiana, que el punto $(3,0)$ es un punto de ensilladura para $f(x,y)$.

(0.4 puntos)

.

Curso de Fundamentos Matemáticos de la Ingeniería

Año Académico 2000-2001 – Primer Curso de Ingeniería Química

Examen Final Junio - Primera parte

1. Calcula el límite de la sucesión cuyo término general es

$$a_n = \sqrt[n]{n^{n+1}\left(\sqrt{a}-1\right)}.$$

(0.5 puntos)

2. Dada la función $f(x) = \left|x^3(x-4)\right| - 1$
   (a) Estudia su continuidad y derivabilidad.
   (b) Calcula sus extremos relativos.
   (c) Represéntala gráficamente.
   (d) Prueba que la ecuación $f(x) = 0$ tiene una única solución en el intervalo $(0, 1)$.

(1.3 puntos)

3. Encuentra el triángulo rectángulo de área mínima situado en el primer cuadrante cuyos catetos estén sobre los ejes coordenados $x = 0$, $y = 0$ y la hipotenusa sea tangente a la función $y = \dfrac{1}{x}$. Justifica el resultado obtenido.

(1.0 puntos)

4. Calcula el área limitada por la curva $y = \dfrac{1}{x^2+6x+10}$ y las rectas $x \geq 0$ e $y \geq 0$.

(1.0 puntos)

5. Desarrolla el intervalo de convergencia de la función $f(x) = x\sqrt{1+3x^2}$.

(1.2 puntos)

.

Curso de Fundamentos Matemáticos de la Ingeniería

Año Académico 2000-2001 – Primer Curso de Ingeniería Química

Examen Final Junio - Segunda parte

1. Dada la función

$$f(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{1}{x\,y\,z}\sin x\,y\,z + 2\,x + y & \text{si} \quad x\,y\,z \neq 0 \\ 1 + 2\,x + y & \text{si} \quad x\,y\,z = 0 \end{cases},$$

calcula las siguientes derivadas parciales: $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,1,1)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,1,0)$, $\dfrac{\partial f}{\partial z}(0,0,1)$.

(0.6 puntos)

2. Sea la función $z = f(x,y)$, con $x = \rho\,\cos\theta$, $\;y = \rho\,\sin\theta$, $\;$ prueba que

$$z_x^2 + z_y^2 = z_\rho^2 + \frac{1}{\rho^2}\,z_\theta^2.$$

(1.1 puntos)

3. Determina los puntos de máximo y mínimo de la función $f(x,y) = (x-1)^2+(y+1)^2$ sujeta a la restricción $x^2 + y^2 = 2\,k^2$ en función del parámetro $k \neq 0$.

(1.1 puntos)

4. Dado Ω el triángulo de vértices $(0,0)$, $(1,0)$ y $(0,1)$, calcula

$$\int\!\!\int_\Omega e^{(y-x)/(y+x)}\,dx\,dy,$$

aplicando la sustitución $y + x = u, y - x = v$.

(1.1 puntos)

5. Calcula

$$\int_c x\,y\,dx$$

donde c es la circunferencia de centro $(-1,0)$ y radio $\sqrt{2}$, en el sentido positivo.

(1.1 puntos)

.

Curso de Fundamentos Matemáticos de la Ingeniería

Año Académico 2000-2001 – Primer Curso de Ingeniería Química

Examen Final Septiembre

1. Calcula $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln(n!)}{\ln\left(n^n\right)}$.

(1.0 punto)

2. Estudia si existen o no valores de los parámetros A y B que hagan derivable a la siguiente función, en toda la recta real:

$$f(x) = \begin{cases} A + B\cos x & x \leq 0, \\ -2Ax + 3Bx^2 & x > 0. \end{cases}$$

En caso de que existan dichos parámetros, tiene algún nombre especial la función $f(x)$?

(1.5 puntos)

3. Halla la longitud del arco de la curva $y = \ln \dfrac{1}{1-x^2}$ comprendido entre los puntos de abscisas $x = 0$ y $x = \frac{1}{2}$.

(1.3 puntos)

4. Razona por qué la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3\,n+1}{3^n}$$

es convergente. Calcula su suma.

(1.2 puntos)

5. Sea

$$f(x,y) = \frac{y^4 + \sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$$

cuando $(x,y) \neq (0,0)$, ¿podemos definir la función f en el punto $(0,0)$ de modo que sea continua?

(0.8 puntos)

6. Determina los valores máximo y mínimo de la función

$$z = x^2 + y^2 - x\,y + x + y$$

en la región

$$x \le 0, \qquad y \le 0, \qquad x + y \ge -3.$$

(1.5 puntos)

7. En el cuadrante del espacio en que son positivas la x y la y, se considera el volumen limitado por los planos $x = 0$, $y = 0$, el casquete del paraboloide $x^2 + y^2 + z = 1$ en que $z > 0$ y el casquete de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ en que $z < 0$. Calcula el volumen en coordenadas cilíndricas.

(1.2 puntos)

8. Calcula

$$\int_c y^2\,dx + x^2\,dy$$

donde c es la mitad superior de la elipse

$$x = a\,\cos t, \qquad y = b\,\mathrm{sen}\,t$$

que se sigue en el sentido de las agujas del reloj.

(1.5 puntos)